Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2001), **21**, 421–441
Printed in the United Kingdom © *2001 Cambridge University Press*

Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative

J.-P. CONZE et S. LE BORGNE

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042, Rennes Cedex, France
(e-mail: {conze,sleborgn}@univ-rennes1.fr)

(*Received* 2 *April* 1999 *and accepted in revised form* 26 *October* 1999)

Abstract. Let $(\mathcal{T}^1S, m, (T^t)_{t\in\mathbb{R}})$ be the geodesic flow on the unit tangent bundle of a surface S of negative constant curvature and finite volume. We show that every Hölder function on $\mathcal{T}^1S$ is, for the discrete time action of the geodesic flow, homologous to a martingale increment. From this representation follow the central limit theorem and its improvements, and a characterization of Hölder functions which are coboundaries in the class of measurable functions.

Résumé. Soit $(\mathcal{T}^1S, m, (T^t)_{t\in\mathbb{R}})$ le flot géodésique sur le fibré unitaire d'une surface S de courbure négative constante de volume fini. Nous montrons que toute fonction höldérienne sur $\mathcal{T}^1S$ est, pour l'action du flot géodésique à temps discret, homologue à un accroissement de martingale. Cette représentation permet d'obtenir le théorème de la limite centrale et ses extensions, et de caractériser les fonctions höldériennes qui sont des cobords dans la classe des fonctions mesurables.

0. *Introduction*

L'article [**17**] de Sinaï de 1960 sur le flot géodésique est l'un des premiers consacrés à la preuve d'un théorème 'central limite' (TCL) pour un système dynamique concret. Depuis, ce problème a fait l'objet de nombreux travaux pour le cas de systèmes de type hyperbolique (en particulier ceux de Ratner [**11**] et de Le Jan [**10**] pour le flot géodésique).

La méthode des martingales peut être employée pour prouver le TCL et s'avère être particulièrement efficace dans les situations de faible régularité (cas des mesures de Gibbs) (cf. [**2**]) ou d'hyperbolicité partielle. Elle permet en outre d'obtenir des résultats plus précis que le seul TCL, tels que le principe d'invariance. Elle peut être appliquée à des situations où la construction de partitions markoviennes est techniquement compliquée, ou impossible (cf. [**8, 9**] pour le cas des automorphismes ergodiques non hyperboliques

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

du tore). Nous la présentons ici pour le flot géodésique sur une surface S de courbure constante négative de volume fini.

Après la construction d'une filtration croissante sur le fibré unitaire tangent à S, nous montrons que toute fonction höldérienne est homologue à une fonction engendrant (pour le flot géodésique à temps discret) un accroissement de martingale.

Nous montrons également, de façon simple, que si une fonction régulière est un cobord dans la classe des fonctions mesurables, elle l'est dans la classe des fonctions régulières. Ce résultat permet d'obtenir un critère assurant que la loi limite dans le TCL est non dégénérée.

La méthode et les résultats présentés peuvent être étendus aux flots sur les espaces homogènes de groupes semi-simples et feront l'objet d'un travail ultérieur.

Nous remercions Marc Peigné pour des discussions fructueuses sur le flot géodésique, ainsi que le rapporteur pour sa lecture attentive du manuscrit et ses remarques.

1. *Notations, le flot géodésique*

1.1. Soit S une surface de courbure constante négative de volume fini, réalisée comme le quotient $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ par un sous-groupe discret Γ du groupe $G = SL(2,\mathbb{R})$ (un réseau). Nous supposerons que Γ contient $\pm Id$, où Id est l'élément neutre de G.

Notons X le quotient $X = SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$. En identifiant $\mathcal{T}^1 S$, le fibré unitaire tangent de S, à X, on peut représenter le flot géodésique sur $\mathcal{T}^1 S$ comme l'action sur X,

$$x \in X = G/\Gamma \to T^t x = g_t x,$$

du groupe à un paramètre $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$, où

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les flots horocycliques sont définis par l'action des deux groupes à un paramètre $(h_t^u)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(h_t^s)_{t\in\mathbb{R}}$, où

$$h_t^u = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$h_t^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les orbites des groupes à un paramètre (h_t^u) et (h_t^s) forment respectivement les feuilletages instable et stable du flot géodésique. On vérifie immédiatement les deux égalités :

$$g_t h_a^u g_t^{-1} = h_{e^t a}^u, \quad g_t h_a^s g_t^{-1} = h_{e^{-t} a}^s, \quad \forall t,\ a \in \mathbb{R}. \tag{1.1.1}$$

Nous noterons $K = (r_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ le sous-groupe de rotation de G, où

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Désignons par d_0 une distance invariante à droite sur G, par $B(x,r)$ la boule de centre x dans G et de rayon r, par d la distance sur X déduite de d_0. Notons m la mesure sur $\mathcal{T}^1 S$ déduite de la mesure invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$. La surface S étant de volume fini, nous pouvons normaliser m pour que $m(\mathcal{T}^1 S) = 1$.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

1.2. Nous raisonnerons sur le système dynamique à temps discret $(\mathcal{T}^1S, \mathcal{A}, T, m)$, $\mathcal{A}$ étant la tribu borélienne de $\mathcal{T}^1S$ et T la transformation de $\mathcal{T}^1S$ dans lui-même définie par l'action du flot géodésique au temps 1.

Pour toute fonction f sur X et tout entier $n \geq 1$, les sommes ergodiques sous l'action du flot (à temps discret) géodésique, $\sum_0^{n-1} f(T^k x)$, seront notées $S_n f(x)$.

D'après le théorème de Hopf, le système dynamique $(\mathcal{T}^1S, \mathcal{A}, T, m)$ est ergodique : pour toute fonction m-intégrable f à valeurs réelles sur $\mathcal{T}^1S$, on a, pour m-presque tout x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n f(x) = m(f). \tag{1.2.1}$$

Sous certaines conditions sur f, on peut préciser la vitesse de convergence dans (1.2.1) et montrer (Sinaï [**17**]) un TCL, c'est-à-dire une convergence en loi de la forme

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left| m\left\{ x : \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_n f(x) - n \int_X f \, dm \right) < \alpha \right\} - \Phi(\alpha) \right| = 0,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$\sigma = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \| S_n f(x) - n m(f) \|_2.$$

2. *Variance, cobords, martingales (rappels)*

L'application de la méthode des martingales aux processus stationnaires, développée depuis les travaux de Billingsley, Ibragimov, Gordin, permet de renforcer le théorème de la limite centrale. Le Théorème 2.8 rappelé ci-dessous donne un procédé pour faire apparaître des accroissements de martingale pour certaines fonctions sous l'action d'un système dynamique.

Nous nous proposons d'appliquer cette méthode, en montrant que les conditions du Théorème 2.8 sont vérifiées dans la situation du flot géodésique considérée ici. Nous obtenons de cette façon, en même temps que le TCL, les propriétés découlant de la méthode des martingales (cf. Hall et Heyde [**5**]).

Rappelons quelques résultats de théorie ergodique générale qui nous seront utiles. Nous considérons dans ces rappels un système dynamique inversible noté $(X, \mathcal{A}, m, T)$.

Soit f une fonction à valeurs réelles dans $L^2(m)$ que nous supposerons d'intégrale nulle, $m(f) = 0$. Nous noterons $T^n f$ les composées $f \circ T^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Définitions 2.1. La *variance* $\sigma^2(f)$ est définie comme la limite (si cette limite existe et est finie) :

$$\sigma^2(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \| f + Tf + \cdots + T^{n-1} f \|_2^2. \tag{2.1.1}$$

Elle est liée à la vitesse de décorrélation de la suite $(T^n f)$, i.e. à la vitesse de convergence vers 0 de la suite $(\langle T^n f, f \rangle)$.

Si la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle T^k f, f \rangle|$ converge, la variance $\sigma^2(f)$ existe et est donnée par l'expression

$$\sigma^2(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle T^k f, f \rangle = \| f \|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^k f, f \rangle. \tag{2.1.2}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

On dit qu'une fonction f est un *cobord* (dans la classe des fonctions mesurables), s'il existe h mesurable telle que $f = Th - h$. Si h est dans L^2, on dit que f est un cobord dans L^2.

Si la corrélation tend suffisamment vite vers zéro, on peut caractériser les fonctions de variance nulle : ce sont les cobords dans L^2.

LEMME 2.2. *Sous la condition de décorrélation* $\sum_{n\geq 0} n|\langle T^n f, f\rangle| < +\infty$, *la suite* $(\|S_n f\|^2 - n\sigma^2(f))_{n\geq 0}$ *est bornée. La variance* $\sigma^2(f)$ *est nulle alors si, et seulement si,* f *est un cobord dans* L^2.

Preuve. Nous avons :

$$|\|S_n f\|^2 - n\sigma^2(f)| = \left|n\|f\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\langle T^k f, f\rangle - n\left[\|f\|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\langle T^k f, f\rangle\right]\right|$$
$$= 2\left|n\sum_{k=n+1}^{\infty}\langle T^k f, f\rangle - \sum_{k=1}^{n} k\,\langle T^k f, f\rangle\right| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} k|\langle T^k f, f\rangle|;$$

ce qui établit la première assertion.

Si $\sigma^2(f) = 0$, la suite $(\|S_n f\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ceci implique qu'il existe une fonction $h \in L^2(m)$ telle que $f = Th - h$. Rappelons la preuve de ce résultat.

Nous avons $TS_k f = S_k f - f + T^k f$; d'où, pour tout entier $n \geq 1$,

$$T\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k f\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k f - f + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k f. \tag{2.2.1}$$

D'après nos hypothèses, la suite $(n^{-1}\sum_{k=1}^{n} T^k f)$ converge en norme vers 0 et la suite $(n^{-1}\sum_{k=1}^{n} S_k f)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2(m)$. Nous pouvons donc extraire de cette dernière suite une sous-suite qui converge faiblement vers un élément g de $L^2(m)$ vérifiant, d'après la relation (2.2.1), $Tg = g - f$.

On note que la fonction g vérifie $\|g\| \leq \sup_n \|S_n f\|_2$. □

2.3. Considérons maintenant un flot à temps continu $(T^t, t \in \mathbb{R})$ préservant la mesure sur $(X, \mathcal{A}, m)$ et tel que chaque transformation T^t, pour $t > 0$ soit ergodique. Soit f une fonction dans $L^2(m)$ d'intégrale nulle. Sa variance, sous l'action du flot, peut être définie comme la limite, si elle existe :

$$\tilde{\sigma}^2(f) = \lim_N \frac{1}{N}\left\|\int_0^N f(T^s\cdot)\,ds\right\|^2_{L^2(m)}. \tag{2.3.1}$$

Sous la condition

$$\int_0^\infty |\langle T^s f, f\rangle|\,ds < \infty, \tag{2.3.2}$$

la variance existe et est égale à :

$$\tilde{\sigma}^2(f) = 2\int_0^\infty \langle T^s f, f\rangle\,ds. \tag{2.3.3}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

Dans l'étude du flot géodésique, nous raisonnerons à temps discret. Sous une hypothèse de vitesse de décorrélation, qui sera vérifiée dans le cas du flot géodésique, on passe facilement du temps discret au temps continu.

En effet, supposons qu'il existe une fonction ϕ décroissante positive telle que :

$$|\langle T^t f, f\rangle| \leq \phi(t) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty t\phi(t)\,dt < \infty. \tag{2.3.4}$$

Pour tout $\delta > 0$, posons

$$f_\delta(\cdot) = \int_0^\delta f(T^s\cdot)\,ds.$$

Pour chaque $\delta > 0$, le processus $(T^{n\delta} f_\delta)$ possède une variance égale à $\sigma_\delta^2(f) = \delta\widetilde{\sigma}^2(f)$ et nous avons :

$$|\langle T^{n\delta} f_\delta, f_\delta\rangle| \leq \delta^2\phi(\delta(n-1)).$$

LEMME 2.4. *Sous l'hypothèse (2.3.4), les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la variance $\widetilde{\sigma}^2(f)$ est nulle,*

(ii) *il existe $\delta > 0$ tel que f_δ soit un cobord dans $L^2(m)$,*

(iii) *la fonction f est un cobord (au sens du flot) dans $L^2(m)$: il existe $h \in L^2(m)$ telle que $f_\delta = T^\delta h - h$, $\forall \delta > 0$.*

Preuve. Si la variance $\sigma_\delta^2(f) = 0$ pour un $\delta > 0$, alors elle est nulle pour tout δ et ceci est équivalent à $\widetilde{\sigma}^2(f) = 0$.

D'après (2.3.4) et le Lemme 2.2, la condition $\sigma_\delta^2(f) = 0$ équivaut à : f_δ est un cobord dans L^2 pour T^δ. Il existe alors h_δ d'intégrale nulle (déterminée de façon unique d'après l'hypothèse d'ergodicité) dans $L^2(m)$ telle que $f_\delta = T^\delta h_\delta - h_\delta$. En utilisant la relation

$$T^{p\delta} h_{p\delta} - h_{p\delta} = f_{p\delta} = \sum_{k=0}^{p-1} T^{k\delta} f_\delta = T^{p\delta} h_\delta - h_\delta, \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

et l'unicité de h_δ, pour chaque δ, on obtient : $h_{p/q} = h_1$, pour tout rationnel p/q.

Montrons la continuité faible de $\delta \to h_\delta$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le raisonnement du Lemme 2.2, la norme $\|h_\delta\|_2$ est bornée indépendamment de δ. Nous avons en effet la majoration

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} T^{k\delta} f_\delta \right\|_2^2 \leq 2\sum_{k=0}^{\infty} k|\langle T^{k\delta} f_\delta, f_\delta\rangle| \leq 2\int_0^\infty |t|\phi(t)\,dt.$$

Pour montrer la continuité faible de la fonction $\delta \to h_\delta$, il suffit de vérifier que h_{δ_0} est l'unique valeur d'adhérence de (h_δ), pour δ tendant vers un $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$. Une telle valeur d'adhérence h vérifie la relation de cobord $T^{\delta_0} h - h = f_{\delta_0}$ et est d'intégrale nulle, donc égale à h_{δ_0}.

On a ainsi $h_\delta = h_1$, pour tout $\delta > 0$.

On a montré que (ii) implique qu'il existe $h = h_1$ dans $L^2(m)$ telle que $f_\delta = T^\delta h - h$. □

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

Filtrations et martingales.

Définitions 2.5. Nous appellerons T-filtration une suite décroissante de sous-tribus $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}_{n+1} = T^{-1}\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (filtration de K-système).

Nous dirons qu'une fonction f est homologue dans $L^2(m)$ à une fonction g engendrant une suite d'accroissements de martingale (renversée), s'il existe une T-filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}$ et des fonctions h et g dans $L^2(m)$ telles que

$$f = g + Th - h, \tag{2.5.1}$$

et g est $\mathcal{A}_0$-mesurable et vérifie $\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_1) = 0$.

La suite des sommes partielles $(\sum_0^{n-1} T^k g)_{n\geq 1}$ forme alors, pour la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, une martingale renversée et la variance $\sigma^2(f)$ associée au processus $(T^n f)$ est égale à $\|g\|_2^2$.

Rappelons le résultat classique suivant (cf. Hall et Heyde [**5**]) :

THÉORÈME 2.6. *Si une fonction f est homologue dans $L^2(m)$ à une fonction g engendrant une suite d'accroissements de martingale et si la fonction f n'est pas un cobord, elle vérifie le TCL avec la variance $\|g\|_2^2$, le TCL fonctionnel et le théorème du logarithme itéré.*

Remarques 2.7. (1) En faisant la construction donnée dans la suite de l'article pour le flot géodésique avec T^{-1}, on obtient une représentation de la forme (2.5.1) avec g engendrant une martingale 'directe', ce qui est le cadre du Théorème 2.6. On peut également utiliser la propriété de martingale 'renversée', au moins pour le TCL et le théorème fonctionnel.

(2) Supposons que la fonction f vérifie les conditions de la Définition 2.5. Si f est un cobord, $f = Th_0 - h_0$, avec h_0 *mesurable*, alors la loi limite de $((1/\sqrt{n})S_n f(\cdot))$ est dégénérée et la variance correspondante du processus $(T^n f)$ est nulle. La fonction g de (2.5.1) est alors nulle. On a donc, à une constante près, $h_0 = h$, ce qui établit que f est un cobord dans L^2.

Un procédé introduit par Gordin [**4**] pour montrer que f vérifie la condition d'homologie (2.5.1) consiste à établir les conditions (2.8.1) et (2.8.2) du théorème suivant.

THÉORÈME 2.8. *Soient $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique ergodique inversible, $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une T-filtration dans $\mathcal{A}$, f une fonction dans $L^2(m)$ telle que $\int_X f\,dm = 0$ et*

$$\sum_{n\geq 0} \|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty, \tag{2.8.1}$$

$$\sum_{n\geq 0} \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-n})\|_2 < \infty. \tag{2.8.2}$$

Alors f est homologue dans $L^2(m)$ à une fonction g engendrant une suite d'accroissements de martingale (renversée).

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

3. *Enoncé du résultat*

Revenons au cas de l'action du flot géodésique T (à temps discret) sur un quotient $X = SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ de volume fini. Nous montrons dans §§4, 5 et 6 le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. *Pour le système dynamique $(\mathcal{T}^1S, \mathcal{A}, m, T)$, il existe une T-filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}$ telle que, pour toute fonction höldérienne sur $\mathcal{T}^1S$ d'intégrale nulle,*

$$\sum_{n\geq 0} \|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty, \tag{3.1.1}$$

$$\sum_{n\geq 0} \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-n})\|_2 < \infty. \tag{3.1.2}$$

En particulier, toute fonction höldérienne sur $\mathcal{T}^1S$ est homologue dans $L^2(m)$ à une fonction engendrant une suite d'accroissements de martingale (renversée).

COROLLAIRE 3.2. *Une fonction f höldérienne sur $\mathcal{T}^1S$ qui n'est pas un cobord vérifie sous l'action du flot géodésique, le TCL, le TCL fonctionnel et le théorème du logarithme itéré.*

Mentionnons, comme application, le résultat suivant. Dans [**3**], Furman et Weiss construisent des flots extensions du flot géodésique qui n'ont pas la propriété de Bernoulli. La 'non-bernoullicité', obtenue à l'aide d'un critère de Rudolph [**15**], utilise la construction de fonctions 'asymptotiquement browniennes' non dégénérées. Cette construction peut être effectuée en utilisant le Théorème 3.1, les propriétés vérifiées par les accroissements de martingales et le critère assurant qu'une fonction höldérienne n'est pas un cobord (§7). On peut ainsi éviter le recours aux partitions markoviennes. De plus, on dispose d'une méthode généralisable aux flots sur les espaces homogènes de groupes semi-simples.

4. *Construction de la filtration $(\mathcal{A}_n)$*

4.1. La construction d'une filtration a été donnée par Sinaï dans ses travaux sur le flot géodésique [**16**]. Nous allons donner une construction simple de la filtration $(\mathcal{A}_n)$ du Théorème 3.1 à partir d'une partition $\mathcal{P}$ de $\mathcal{T}^1S$. La partition mesurable associée à chaque tribu $\mathcal{A}_n$ est formée de segments d'horocycles contractés par T et la longueur de ces segments, importante pour obtenir la convergence dans (3.1.1), peut être minorée sur un ensemble de grande mesure.

L'identification classique de $PSL(2,\mathbb{R})$ au fibré unitaire tangent du demi-plan de Poincaré permet de donner une description simple d'un recouvrement (dénombrable) $\mathcal{R}$ de $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$, à partir duquel on construit la filtration $(\mathcal{A}_n)$.

Notons $(z = \xi + i\zeta, \theta)$ le vecteur unitaire tangent en $\xi + i\zeta$ à $\mathbb{H}^2$ faisant un angle θ avec le vecteur $(0,1)$. On définit l'action (isométrique) de $SL(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$ par :

$$z \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+c}{bz+d}.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

est identifiée au point $((ai+c)/(bi+d), 2\,\mathrm{Arg}(bi+d))$ du fibré tangent unitaire de $\mathbb{H}^2$.

La mesure de Haar m_0, dans ce modèle, est donnée à un facteur près par

$$dm_0 = \frac{d\xi\, d\zeta}{\zeta^2}\, d\theta.$$

Soient Γ un sous-groupe discret de $SL(2,\mathbb{R})$ et D un domaine de Dirichlet pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}^2$. Par exemple, dans le cas de $SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$, on peut prendre pour $D \subset \mathbb{H}^2$ l'ensemble des nombres complexes

$$\{\xi + i\zeta : |\xi| \le \tfrac{1}{2}, \xi^2 + \zeta^2 \ge 1\},$$

qui est un domaine fondamental pour l'action de $PSL(2,\mathbb{Z})$ à droite sur $\mathbb{H}^2$.

Soit S la surface obtenue en identifiant deux à deux les points du bord de D. Lorsque D est de mesure finie, la surface S présente un nombre fini de pointes (cusps) et de singularités. Le quotient $X = SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ et le fibré unitaire tangent $\mathcal{T}^1 S = S \times \mathbb{T}$ sont identifiés.

A chaque pointe, associons une 'bande' E, qui peut être représentée dans le modèle du demi-plan de Poincaré, pour un $\zeta_0 > 0$ assez grand, comme l'ensemble $\{\xi + i\zeta : |\xi| \le \frac{1}{2}, \zeta \ge \zeta_0\}$ dont on identifie les bords (cf. Lang [7]).

Décomposons la surface $\mathcal{T}^1 S$ en un nombre fini de sous-ensembles comprenant :

- un nombre fini d'ensembles $\widetilde{E} = E \times \mathbb{T}$ associés à une pointe,
- le fibré $\mathcal{T}^1 S_0$ au-dessus d'une partie compacte S_0, où le rayon d'injectivité est borné inférieurement par un nombre $\delta_0 > 0$.

Définissons les deux familles d'applications ϕ_x et ψ_x de $\mathbb{R}^3$ dans $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ par :

$$\phi_x(a,b,c) = h_a^s g_b h_c^u x,$$
$$\psi_x(a,b,c) = h_a^u g_b h_c^s x.$$

Soit $\delta(x)$ tel que, pour tout x, la restriction de ψ_x à $]-\delta(x), \delta(x)[^3 \to \mathcal{T}^1 S$ soit un difféomorphisme sur un voisinage de x.

Nous allons recouvrir $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ par une famille dénombrable d'images de petits cubes de la forme $\phi_x(]-\delta(x), \delta(x)[^3)$.

Considérons une bande $E = \{\xi + i\zeta : |\xi| \le \frac{1}{2}, \zeta \ge \zeta_0\}$ associée à une pointe. Pour tout $n \ge 1$, appelons $\widetilde{E}_n$ l'ensemble

$$\widetilde{E}_n = \{(\xi + i\zeta, \theta) \in \mathcal{T}^1 S : e^n \le \zeta \le e^{n+1}\}.$$

A 'hauteur' ζ, le rayon d'injectivité de la variété $\mathcal{T}^1 S$ est à peu près ζ^{-1}. On en déduit l'existence d'un nombre $a_0 > 0$ indépendant de x tel que, pour tout n et tout $x \in \widetilde{E}_n$, les applications ψ_x et ϕ_x soient des difféomorphismes de $]-a_0 e^{-n}, a_0 e^{-n}[^3$ sur leur image.

Soit $c \in]0,1[$ un réel. Pour tout triplet d'entiers (j,k,l) appartenant à

$$]-c^{-1}, c^{-1}[\times]0, e^n c^{-1}[\times]0, 2\pi e^n c^{-1}[\,,$$

posons

$$P_{j,k,l}^{(n)} = \{(\xi + i\zeta, \theta) : \xi \in]c(j-1), c(j+1)[\,,$$
$$\zeta \in]e^n e^{c(k-1)e^{-n}}, e^n e^{c(k+1)e^{-n}}[\,,$$
$$\theta \in]c(l-1)e^{-n}, c(l+1)e^{-n}[\}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

Les ensembles $P_{j,k,l}^{(n)}$ forment un recouvrement de $\widetilde{E}_n$. Ils sont en nombre inférieur à $M_c e^{2n}$, où M_c est une constante ne dépendant que de c.

Si c est suffisamment petit, pour tout n, pour tout (j,k,l), pour tout $x \in P_{j,k,l}^{(n)}$, l'ensemble $P_{j,k,l}^{(n)}$ est inclus dans $\phi_x(]-a_0e^{-n}, a_0e^{-n}[^3)$.

On peut donc recouvrir chaque ensemble $\widetilde{E}_n$ par une famille, dont le cardinal est inférieur à $M_c e^{2n}$, formée d'ensembles de la forme $\phi_x(]-a_0e^{-n}, a_0e^{-n}[^3)$. Si a_0 est assez petit, la réunion de ces famillles fournit un recouvrement $\mathcal{R}_E$ de $\mathcal{T}^1E$ ayant, avec une constante un peu plus grande que nous noterons encore M_c, les propriétés suivantes :

$\mathcal{R}(1)$ il existe $M_c > 0$ tel que, pour tout n, au plus $M_c e^{2n}$ éléments de $\mathcal{R}_E$ ont une intersection non vide avec $\widetilde{E}_n$;

$\mathcal{R}(2)$ pour tout élément R de $\mathcal{R}_E$, il existe $x \in \mathcal{T}^1S$ et $\delta(x) > 0$ tels que R et $]-\delta(x), \delta(x)[^3$ soient difféomorphes par l'application ϕ_x ;

$\mathcal{R}(3)$ pour tout $y \in R = \phi_x(]-\delta(x), \delta(x)[^3) \in \mathcal{R}_E$, l'application ψ_y est un difféomorphisme de $]-\delta(x), \delta(x)[^3$ sur son image.

On recouvre de cette façon un voisinage de chaque pointe, puis la partie compacte $\mathcal{T}^1S_0$, par une famille ayant les propriétés $\mathcal{R}(i)$, $i = 1,2,3$. On obtient un recouvrement $\mathcal{R}$ de G/Γ.

Définissons alors la partition $\mathcal{Q}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{Q} = \{\cap_{R\in\mathcal{R}} A_R : A_R = R \text{ ou } {}^cR\}.$$

Pour tout point x, notons $\mathcal{Q}(x)$ l'élément de la partition $\mathcal{Q}$ contenant x. La partition $\mathcal{P}$ est définie par

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{Q}(x) \cap \{h_t^s x : |t| < \delta(x)\},$$

enfin les partitions $\mathcal{P}_n^\infty$ sont définies, pour tout x, par

$$\mathcal{P}_n^\infty(x) = T^{-n}\mathcal{P}(T^n x) \cap T^{-(n+1)}\mathcal{P}(T^{n+1}x) \cap \cdots .$$

Pour tout n, notons $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{P}_n^\infty$. La suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration décroissante telle que $\mathcal{A}_{n+1} = T^{-1}\mathcal{A}_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

La propriété $\mathcal{R}(1)$ nous permet de contrôler la mesure de l'ensemble des points de $\mathcal{T}^1S$ à petite distance des bords des éléments de $\mathcal{R}$.

La propriété $\mathcal{R}(2)$ du recouvrement $\mathcal{R}$ assure que les atomes des partitions $\mathcal{P}_n^\infty$ sont des morceaux connexes d'horocycles contractants.

Notons $I(n,x)$ l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par

$$I(n,x) = \{t \in \mathbb{R} : h_t^s x \in \mathcal{P}_n^\infty(x)\}$$

et $\ell(I(n,x))$ sa longueur. Soient $\epsilon_1(x)$, $\epsilon_2(x)$ les extrémités de l'intervalle $I(0,x)$.

Pour l'estimation de l'intégrale le long d'horocycles, nous utiliserons la notion de pavé définie ainsi :

Définition 4.2. Etant donnés un intervalle $]\epsilon_1, \epsilon_2[$ de longueur > 0 et un réel $\delta > 0$, un ensemble de la forme

$$K_x^{(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta)} = K_x = \{h_c^u g_b h_a^s x : a \in]\epsilon_1, \epsilon_2[\,, (b,c) \in]-\delta, \delta[^2\}$$

sera appelé $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta)$-*pavé*, si l'application $\psi_x : (a,b,c) \mapsto h_a^u g_b h_c^s x$ de $]\epsilon_1, \epsilon_2[\times]-\delta, \delta[^2$ dans $\mathcal{T}^1S$ est un difféomorphisme sur K_x.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

La propriété $\mathcal{R}(3)$ permet de garantir que, pour tout point x, l'ensemble $K_x^{(\epsilon_1(x),\epsilon_2(x),\delta)}$ est un $(\epsilon_1(x), \epsilon_2(x), \delta)$-pavé, pour tout $\delta \in]0, \delta(x)]$, $\delta(x)$ étant défini dans la condition $\mathcal{R}(2)$.

Probabilités conditionnelles.
Les partitions $\mathcal{P}_n^\infty$ sont mesurables au sens de Rokhlin [**14**]. Il existe donc des familles de probabilités conditionnelles $(m_P)_{P\in\mathcal{P}_n^\infty}$ permettant d'exprimer l'espérance conditionnelle par rapport aux tribus $\mathcal{A}_n$: pour toute fonction f intégrable, pour m-presque tout x,

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) = \int_{\mathcal{P}_n^\infty(x)} f(y)\, dm_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(y).$$

PROPOSITION 4.3. *Les probabilités conditionnelles s'expriment, pour toute fonction f intégrable, pour m-presque tout x, sous la forme :*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) = \frac{1}{\ell(I(n,x))} \int_{I(n,x)} f(h_t^s x)\, dt. \tag{4.3.1}$$

Preuve. L'égalité (4.3.1) se déduit du résultat général suivant.

Soit H un groupe de Lie connexe de mesure de Haar à gauche notée $m_H(dh) = dh$. Supposons que H agisse sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, m)$ en laissant la mesure m invariante et de sorte que, pour tout compact $K \subset H$ et tout ensemble mesurable $A \subset X$, KA soit mesurable.

Soit $\mathcal{M}$ une partition mesurable de X telle que, pour tout x, l'élément de $\mathcal{M}$ contenant x soit de la forme $\mathcal{M}(x) = V_x x$, où V_x est un sous-ensemble de H de frontière négligeable tel que

$$\overline{V_x} = \overline{{}^\circ V_x}.$$

Supposons que l'application $h \in V_x \to hx$, soit bijective bimesurable de V_x sur $V_x x$. Alors, pour presque tout x,

$$\int_{\mathcal{M}(x)} f(s)\, dm(s|\mathcal{M}(x)) = \frac{1}{m_H(V_x)} \int_{V_x} f(hx)\, dh. \qquad \square$$

La valeur de $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x)$ est donc liée à la répartition des horocycles contractants dans $\mathcal{T}^1 S$, si la longueur des horocycles formant la partition $\mathcal{P}_n^\infty$ est assez grande, ce que nous allons établir.

Notons $\partial\mathcal{P}$ la réunion des bords des éléments de $\mathcal{P}$.

LEMME 4.4. *Il existe une constante $K > 0$ telle que l'on ait l'inégalité :*

$$m\{x \in \mathcal{T}^1 S : d(x, \partial\mathcal{P}) < \epsilon\} \le -K\epsilon \operatorname{Log} \epsilon. \tag{4.4.1}$$

Preuve. En comparant le volume de l'ensemble des points qui sont à une distance inférieure à ϵ du bord d'un domaine à la surface de ce bord, nous obtenons qu'il existe une constante M telle que, dans $\mathcal{T}^1 S$, pour tout $x \in \mathcal{T}^1 S$ et tout δ, on ait

$$m\{y \in \mathcal{T}^1 S : d(y, \partial\phi_x(]-\delta, \delta[^{[3]})) < \epsilon\} \le M\delta^2\epsilon.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

La partie compacte $\mathcal{T}^1 S_0$ étant recouverte par une famille finie d'éléments de $\mathcal{R}$, il existe $K_0 > 0$ tel que

$$m\{x \in \mathcal{T}^1 S_0 : d(x, \partial\mathcal{P}) < \epsilon\} \leq K_0 \epsilon. \tag{4.4.2}$$

Détaillons maintenant le cas d'une pointe.

L'ensemble $\widetilde{E}_k \cap \partial\mathcal{P}$ est la réunion de moins de $M_c e^{2k}$ cubes de la forme $\phi_x(] - ae^{-k}, ae^{-k}[^3)$. On a donc

$$m\{x \in \widetilde{E}_k : d(x, \partial\mathcal{P}) < \epsilon\} \leq M_c e^{2k} M a^2 e^{-2k} \epsilon = M_c M a^2 \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. On peut écrire

$$\begin{aligned} m\{x \in \mathcal{T}^1 S : d(x, \partial\mathcal{P}) < \epsilon\} &\leq \sum_0^n m\{x \in \widetilde{E}_k : d(x, \partial\mathcal{P}) < \epsilon\} + m(\cup_{n+1}^{\infty} \widetilde{E}_k) \\ &\leq (n+1) M_c M a'^2 \epsilon + e^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

En choisissant $n = [\operatorname{Log} 1/\epsilon]$, on obtient une majoration en $K\epsilon \operatorname{Log} 1/\epsilon$; d'où l'inégalité (4.4.1). □

LEMME 4.5. *Pour tout réel $\beta > 1$, il existe $K_1 > 0$ tel que :*

$$m\{x : \ell(I(0,x)) \leq 2\beta^{-n}\} \leq K_1 (n+1) \beta^{-n}. \tag{4.5.1}$$

Preuve. Soit δ tel que $e > \delta > 1$. Notons U_n l'ensemble des x tels que, pour tout $k \geq 0$, la courbe

$$\{h_r^s T^k x : |r| \leq \beta^{-n} \delta^{-k}\}$$

ne rencontre pas $\partial\mathcal{P} = \cup_{P \in \mathcal{P}} \partial P$. Il existe $K_0 > 0$ tel que $m({}^c U_n) \leq K_0 (n+1) \beta^{-n}$.

Nous avons, en effet,

$${}^c U_n \subset \bigcup_{k \geq 0} \{x : \{h_r^s T^k x : |r| \leq \beta^{-n} \delta^{-k}\} \cap \partial\mathcal{P}\} \neq \emptyset\}.$$

Comme par ailleurs, il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tout $k \geq 0$,

$$\{x : \{h_r^s x : |r| \leq \beta^{-n} \delta^{-k}\} \cap \partial\mathcal{P}\} \neq \emptyset\} \subset \{x : d(x, \partial\mathcal{P}) \leq C_1 \delta^{-k} \beta^{-n}\},$$

le lemme précédent et l'invariance de la mesure m donne l'inégalité :

$$m({}^c U_n) \leq C_1 \beta^{-n} \sum_{k \geq 0} \delta^{-k} \operatorname{Log}(C_1 \beta^{-n} \delta^{-k}).$$

Supposons maintenant que x appartienne à U_n. Nous avons alors, pour tout k,

$$\{h^s_{e^k r} x : |r| \leq \beta^{-n} \delta^{-k}\} \subset T^{-k} \mathcal{P}(T^k x).$$

Comme $\mathcal{P}_0^{\infty}(x) = \bigcap_{k \geq 0} T^{-k} \mathcal{P}(T^k x)$, ceci signifie que

$$\ell(I(0,x)) \geq \inf_{k \geq 0} 2e^k \delta^{-k} \beta^{-n} \geq 2\beta^{-n};$$

ce qui implique que l'ensemble $\{x : \ell(I(0,x)) \leq 2\beta^{-n}\}$ est inclus dans ${}^c U_n$. □

Notons que, dans le cas compact, en remplaçant la majoration (4.4.1) par la majoration (4.4.2) dans ce qui précède, on obtient une majoration de la forme :

$$m\{x : \ell(I(0,x)) \leq 2\beta^{-n}\} \leq K_1 \beta^{-n}. \tag{4.5.2}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

5. *Vitesse de mélange et répartition des horocycles*

Cas compact. Nous devons maintenant estimer la vitesse de convergence dans (4.3.1). Dans le cas compact, nous disposons d'un résultat d'équirépartition. Nous utiliserons la forme suivante due à Burger [**1**].

Notons $\|\cdot\|_{H_2^3}$ une norme de Sobolev L^2 faisant intervenir toutes les dérivées jusqu'à l'ordre 3.

THÉORÈME 5.1. [**1**] *Il existe* $0 < \alpha < 1/2$ *et* $C > 0$ *tels que, pour toute fonction* f C^∞ *sur* $\mathcal{T}^1S$, *pour tout* x *et pour tout* $t \geq 1$, *on ait :*

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(h_r^s x)\,dr - \int_{\mathcal{T}^1S} f(x)\,dm(x)\right| \leq Ct^{-\alpha}\|f\|_{H_2^3}. \tag{5.1.1}$$

Lorsque n tend vers l'infini, nous avons vu que $\ell(I(n,x))$ est 'généralement' très grand, ce qui permet d'appliquer la majoration (5.1.1) aux fonctions régulières.

Cas non compact.

5.2. Il est facile de voir qu'une vitesse exponentielle de convergence vers 0 de la suite $(\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2)$ pour les fonctions régulières implique une vitesse de décorrélation (mélange exponentiel) pour ces fonctions. Dans le cas non compact, où l'on ne dispose plus des estimations fournies par (5.1.1), le comportement dans (4.3.1) peut être déduit de la vitesse de décorrélation (mélange) du flot géodésique. On peut en effet, à l'inverse, déduire de cette vitesse (obtenue par exemple par la théorie des représentations) une vitesse d'équirépartion des feuilles stables translatées par le flot. Cette méthode a été employée par Kleinbock et Margulis dans [**6**].

Dans la situation traitée ici, nous appliquons le Théorème 5.3 ci-dessous de Ratner [**12**] comme point de départ des majorations de décorrélation. Donnons d'abord quelques notations.

Notons N_p la norme höldérienne d'ordre p, $0 < p \leq 1$, d'une fonction f sur $X = G/\Gamma$:

$$N_p(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^p}, x \neq y\right\}.$$

Une fonction sera dite (globalement) *höldérienne* d'ordre p si elle vérifie : $N_p(f) < +\infty$.

Remarquons que toute fonction höldérienne sur X est dans $L^p(G/\Gamma)$, pour tout $p \in [1, \infty[$.

Une notion plus faible de régularité d'ordre p d'une fonction f (dans la direction du sous-groupe K) apparaît dans l'étude de la décorrélation. Elle est mesurée par

$$K_p(f) = \sup\left\{\frac{\|T_{r(\theta)}f - f\|_2}{|\theta|^p}, \theta \neq 0\right\},$$

où $(T_{r(\theta)}f)(g\Gamma) = f(r(\theta)g\Gamma)$.

Une fonction sera dite *K-höldérienne* d'ordre p si elle vérifie : $K_p(f) < +\infty$. Il est clair que $K_p(f) \leq N_p(f)$.

THÉORÈME 5.3. [**12**] *Il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $\alpha_0 > 1$ *telles que, pour toutes fonctions* v *et* w *d'intégrale nulle K-höldériennes d'ordre* p, *on ait :*

$$|\langle v, T^n w\rangle| \leq C(\|v\|_2\|w\|_2 + K_p(v)\|w\|_2 + K_p(w)\|v\|_2)\alpha_0^{-n}. \tag{5.3.1}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 5.4. *Soit f une fonction höldérienne d'ordre p d'intégrale nulle. Il existe une constante C telle que, pour tout $\rho > 1$, pour tout intervalle $]\epsilon_1, \epsilon_2[$ de longueur > 0, tout réel $\delta > 0$ et tout x tels que $K_x^{(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta)}$ soit un $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta)$ pavé, on ait l'inégalité :*

$$\frac{1}{e^n(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \left| \int_{]\epsilon_1 e^n, \epsilon_2 e^n[} f(h_a^s g_{-n} x)\, da \right| \leq C N_p(f) \left[\delta^p + \frac{\alpha_0^{-n}\rho^n + \rho^{-n/2}}{\delta sh(\delta)(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \right]. \quad (5.4.1)$$

Preuve. Soit δ_0 un nombre réel positif. Considérons l'image $K_0^{\delta_0}$ du pavé de côté δ_0 centré en 0 par l'application $\psi : \mathbb{R}^3 \to SL(2, \mathbb{R})$ définie par $\psi(a, b, c) \to h_a^u g_b h_c^s$.

Soit ϕ une fonction lipschitzienne, positive, d'intégrale égale à 1, à support compact inclus dans $K_0^{\delta_0} \subset B(Id, \delta_1)$, pour un $\delta_1 > 0$. Fixons un réel $\rho > 1$ et définissons, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction ϕ_n par

$$\phi_n(\cdot) = C_n \rho^{3n} \phi(\psi(\rho^n \psi^{-1}(\cdot))),$$

où C_n est un coefficient de normalisation. Cette fonction est à support dans $K_0^{\rho^{-n}\delta_0}$.

Les fonctions ϕ_n sont positives et d'intégrale égale à 1. D'autre part, ψ étant un difféomorphisme, il existe $C > 0$ tel que, sur le support de ϕ_n, on ait :

$$\frac{1}{C}\rho^n d(x, y) \leq d(\psi(\rho^n \psi^{-1}(x)), \psi(\rho^n \psi^{-1}(y))) \leq C\rho^n d(x, y).$$

On en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, le support $\mathcal{S}_n$ de ϕ_n est inclus dans $B(Id, C\rho^{-n}\delta_1)$ et que $N_1(\phi_n) \leq C\rho^{4n} N_1(\phi)$.

Soit $K_x^{(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta)}$ un $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta)$ pavé, noté K_x, vu comme Γ-périodique dans G. Posons

$$\begin{aligned} 1_{K_x} * \phi_n(y) &= \int_{SL(2,\mathbb{R})} 1_{K_x}(z^{-1}y)\phi_n(z)\, dm(z) \\ &= \int_{SL(2,\mathbb{R})} 1_{K_x}(z)\phi_n(yz^{-1})\, dm(z). \end{aligned}$$

La fonction $1_{K_x} * \phi_n$ est Γ-périodique. La suite (ϕ_n) est une identité approchée. Comme ϕ_n est à support dans $B(Id, C\rho^{-n}\delta_1)$, la norme $\|1_{K_x} * \phi_n - 1_{K_x}\|_1$ est de l'ordre de la mesure des points situés à une distance inférieure à ρ^{-n} de la frontière F de K_x. Il existe donc C_1 (indépendant de x et de $(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta)$, pourvu que ϵ_1, ϵ_2 et δ restent bornés) tel que, pour la norme calculée dans $L^2(G/\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \|1_{K_x} * \phi_n - 1_{K_x}\|_2^2 &\leq \|1_{K_x} * \phi_n - 1_{K_x}\|_\infty \|1_{K_x} * \phi_n - 1_{K_x}\|_1 \\ &\leq \|1_{K_x} * \phi_n - 1_{K_x}\|_1 \leq C_1 \rho^{-n}. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

La fonction $1_{K_x} * \phi_n$ est lipschitzienne. On a en effet :

$$\begin{aligned} |1_{K_x} * \phi_n(y) - 1_{K_x} * \phi_n(y')| &\leq \int_G 1_{K_x}(z)\, |(\phi_n(yz^{-1}) - \phi_n(y'z^{-1})|\, dm(z) \\ &\leq d(y, y') N_1(\phi_n) \int_G (1_{\mathcal{S}_n^{-1}y}(z) + 1_{\mathcal{S}_n^{-1}y'}(z))\, dm(z) \\ &\leq C_2 \rho^{-3n} \rho^{4n} N_1(\phi) d(y, y') \leq C_2 \rho^n N_1(\phi) d(y, y'), \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

pour une constante $C_2 > 0$. On a donc

$$N_1(1_{K_x} * \phi_n) \leq C_2 \rho^n N_1(\phi). \tag{5.4.3}$$

Le Théorème 5.3 appliqué à f et à $1_{K_x} * \phi_n$ montre alors qu'il existe $C(f) > 0$ tel que

$$|\langle T^n(1_{K_x} * \phi_n), f\rangle| \leq C(f)\alpha_0^{-n}\rho^n.$$

On obtient, en utilisant la majoration (5.4.2) :

$$\begin{aligned} |\langle T^n 1_{K_x}, f\rangle| &\leq |\langle T^n 1_{K_x} - T^n(1_{K_x} * \phi_n), f\rangle| + |\langle T^n(1_{K_x} * \phi_n), f\rangle| \\ &\leq C_1^{1/2}\rho^{-n/2}\|f\|_2 + C(f)\alpha_0^{-n}\rho^n \\ &\leq C_3(f)(\rho^{-n/2} + \alpha_0^{-n}\rho^n). \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

L'ensemble $T^{-n}K_x$ est de la forme :

$$T^{-n}K_x = \{h^u_{e^{-n}c} g_b h^s_{e^n a} g_n x,\ a \in]\epsilon_1, \epsilon_2[\ ,\ (b,c) \in]-\delta, \delta[^2\}.$$

On peut réécrire $\langle T^n 1_{K_x}, f\rangle$ et le relier à l'intégrale de f le long d'un morceau d'horocycle passant par $T^{-n}x$.

Comme f est höldérienne, il existe $C_3 > 0$ tel que, pour tout $(a,b,c) \in]e^n\epsilon_1, e^n\epsilon_2[\times]-\delta,\delta[\times]-e^{-n}\delta, e^{-n}\delta[$:

$$|f(h^u_c g_b h^s_a g_{-n}x) - f(h^s_a g_{-n}x)| \leq C_3(f)\delta^p.$$

Nous avons :

$$\langle T^n 1_{K_x}, f\rangle = \int_{]e^n\epsilon_1, e^n\epsilon_2[\times]-\delta,\delta[\times]-e^{-n}\delta, e^{-n}\delta[} f(h^u_c g_b h^s_a g_{-n}x) e^{-b}\, da\, db\, dc;$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\left|\langle T^n 1_{K_x}, f\rangle - 4\delta sh(\delta)e^{-n}\int_{]\epsilon_1 e^n, \epsilon_2 e^n[} f(h^s_a g_{-n}x)\, da\right| \\ &\quad = \left|\langle T^n 1_{K_x}, f\rangle - \int_{]\epsilon_1 e^n, \epsilon_2 e^n[\times]-\delta,\delta[\times]-e^{-n}\delta, e^{-n}\delta[} f(h^s_a g_{-n}x)\, da\, db\, dc\right| \\ &\quad \leq 4\delta sh(\delta)C_3(f)\delta^p(\epsilon_2 - \epsilon_1). \end{aligned}$$

En divisant par $4\delta\, sh(\delta)(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ et en utilisant l'inégalité (5.4.4), on obtient la majoration (5.4.1) annoncée. □

Remarque 5.5. Soit x un point dont l'orbite par le flot horocyclique n'est pas périodique. On sait (cf. [**13**, Proposition 1.1]) qu'il existe un compact K et une suite strictement croissante d'entiers (k_n) tels que $g_{k_n}x \in K$.

Le rayon d'injectivité étant borné inférieurement sur K, pour ϵ et δ suffisamment petits, l'ensemble $K^{(0,\epsilon,\delta)}_{g_{k_n}x}$ est un $(0,\epsilon,\delta)$ pavé. Pour toute fonction p-höldérienne f d'intégrale nulle pour la mesure m, on a alors, d'après la Proposition 5.4, pour tout $\rho > 1$:

$$\frac{1}{e^{k_n}\epsilon}\left|\int_0^{\epsilon e^{k_n}} f(h^s_a x)\, da\right| \leq C(f)\left[\delta^p + \frac{\alpha_0^{-k_n}\rho^{k_n} + \rho^{-k_n/2}}{\delta sh(\delta)\epsilon}\right].$$

Il en résulte qu'il existe une suite de temps (t_n) tendant vers $+\infty$ et, pour toute fonction höldérienne f, des constantes C et $r > 0$ ne dépendant que de la régularité de f telles que :

$$\frac{1}{t_n}\left|\int_0^{t_n} f(h^s_a x)\, da\right| \leq C t_n^{-r}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

6. *Preuve du Théorème 3.1*

6.1. *Cas compact.* Nous donnons une première preuve basée sur le théorème d'équirépartition (Théorème 5.1). Naturellement le cas compact est aussi un cas particulier du cas général traité en §6.2.

(1) Considérons d'abord une fonction f bornée sur $\mathcal{T}^1S$ telle qu'il existe une suite régularisante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ vérifiant :

$$\sum_{n\geq 0} \|f * g_n - f\|_\infty < \infty \tag{c_1}$$

$$\|f * g_n\|_{H_2^3} < \eta^n \tag{c_2}$$

$$\| \, \|D(f * g_n)\| \, \|_\infty < \eta^n, \tag{c_3}$$

pour un réel $\eta \in]1, e^\alpha[$, α étant le réel introduit dans l'énoncé du Théorème 5.1.

Nous allons montrer que f vérifie alors, pour la filtration $(\mathcal{A}_n)$ construite dans le §4, les conditions (3.1.1) et (3.1.2), i.e.

$$\sum_{n>0} \|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n>0} \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-n})\|_2 < \infty.$$

Grâce aux relations (4.3.1) et (5.1.1), on peut écrire, pour presque tout x,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x)| &= \left| \frac{1}{\ell(I(n,x))} \int_{I(n,x)} f(h_t^s x)\, dt \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\ell(I(n,x))} \int_{I(n,x)} (f(h_t^s x) - f * g_n(h_t^s x))\, dt \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\ell(I(n,x))} \int_{I(n,x)} f * g_n(h_t^s x)\, dt \right| \\
&\leq \|f * g_n - f\|_\infty + K\|f * g_n\|_{H_2^3} \ell(I(n,x))^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Posons $V_n = \{x : \ell(I(0, T^n x)) \geq 2\beta^{-n}\}$, où $\beta > 1$ est choisi tel que $\eta e^{-\alpha}\beta^\alpha < 1$. Son complémentaire est de mesure inférieure à $K_1\beta^{-n}$, d'après l'inégalité (4.5.2) suivant le Lemme 4.5. On a donc :

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2^2 &= \int_X (\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x))^2\, dm(x) \\
&= \int_{^cV_n} (\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x))^2\, dm(x) + \int_{V_n} (\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x))^2\, dm(x) \\
&\leq \|f\|_\infty^2 m(^cV_n) + m(V_n) \sup_{x\in V_n} (\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x))^2 \\
&\leq \|f\|_\infty^2 K\beta^{-n} + (\|f * g_n - f\|_\infty + K\|f * g_n\|_{H_2^3} \sup_{x\in V_n} \ell(I(n,x))^{-\alpha})^2.
\end{aligned}$$

Mais sur l'ensemble V_n, on a

$$\ell(I(n,x)) = e^n \ell(I(0, T^n x)) \geq e^n \beta^{-n};$$

d'où :

$$\|\mathbb{E}(f \mid \mathcal{A}_n)\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2 K\beta^{-n} + (\|f * g_n - f\|_\infty + K(\eta e^{-\alpha}\beta^\alpha)^n)^2; \tag{6.1.1}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

ce qui établit la convergence de la série $\sum_{n>0} \|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2$.

D'autre part, on a la majoration :

$$\begin{aligned}\|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-n})\|_2 &\le \|f - f * g_n\|_2 + \|f * g_n - \mathbb{E}(f * g_n|\mathcal{A}_{-n})\|_2 \\ &\quad + \|\mathbb{E}(f * g_n|\mathcal{A}_{-n}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-n})\|_2 \\ &\le 2\|f - f * g_n\|_\infty + \|f * g_n - \mathbb{E}(f * g_n|\mathcal{A}_{-n})\|_\infty.\end{aligned}$$

Or il existe $R > 0$ tel que, presque sûrement, le diamètre de $\mathcal{P}_{-n}^{\infty}(x)$ soit inférieur à Re^{-n}. On en déduit :

$$\|f * g_n - \mathbb{E}(f * g_n|\mathcal{A}_{-n})\|_\infty \le R\|\|D(f * g_n)\|\|_\infty e^{-n}$$

et la convergence de $\sum_{n>0} \|f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_{-n})\|_2$ en résulte.

(2) Il reste à montrer que, si f est höldérienne, on peut construire une suite (g_n) vérifiant les conditions (c_1), (c_2), (c_3).

Il existe θ et L tels que, pour tout $x \in \mathcal{T}^1 S$, on ait : $|f(x) - f(y)| \le Ld(x, y)^\theta$. En prenant pour $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante telle que, pour tout n, le support de g_n soit inclus dans une boule dont le centre est la classe de l'identité dans $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ et de rayon $n^{-2/\theta}$ et telle que, dans tout système de coordonnées, les dérivées partielles troisièmes de g_n croissent polynomialement avec n, on obtient la suite (g_n) cherchée. □

6.2. *Cas non compact.* Nous considérons maintenant le cas où S est non compacte, de volume fini.

Soit f une fonction höldérienne d'ordre p sur G/Γ, d'intégrale nulle. Définissons comme dans §6.1 l'ensemble V_n par

$$V_n = \{x \in \mathcal{T}^1 S : \ell(I(0, T^n x)) \ge 2\beta^{-n}\},$$

où β est choisi tel que $\beta \in]1, \alpha_0^{1/9}[$.

D'après le Lemme 4.5, son complémentaire ${}^cV_n$ est de mesure inférieure à $K_1(n + 1)\beta^{-n}$. On a donc :

$$\int_{{}^cV_n} \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)^2(x)\, dm(x) \le \|f\|_4^2 (K_1(n + 1)\beta^{-n})^{1/2}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x fixé dans V_n. Notons $]\epsilon_{1,n}(x), \epsilon_{2,n}(x)[$, ou pour simplifier $]\epsilon_{1,n}, \epsilon_{2,n}[$, l'intervalle $I(0, g_n x)$. Nous avons $\epsilon_{2,n} - \epsilon_{1,n} = \ell(I(0, T^n x)) \ge 2\beta^{-n}$. D'après la construction de la partition $\mathcal{P}$ (cf. la remarque suivant la Définition 4.2), pour $\gamma \ge \beta$, l'ensemble

$$\{h_c^u g_b h_a^s g_n x : a \in]\epsilon_{1,n}, \epsilon_{2,n}[\,, (b, c) \in]-\gamma^{-n}, \gamma^{-n}[^2\}$$

est un $(\epsilon_{1,n}, \epsilon_{2,n}, \gamma^{-n})$-pavé.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

On peut donc appliquer l'inégalité (5.4.1). On a, pour une constante $C(f)$, pour tout $x \in V_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) &= \frac{1}{e^n(\epsilon_{2,n}-\epsilon_{1,n})}\left|\int_{]\epsilon_{1,n}e^n,\epsilon_{2,n}e^n[} f(h_a^s g_{-n}x)\,da\right| \\ &\le C(f)\left[\gamma^{-np}+\frac{\alpha_0^{-n}\rho^n+\rho^{-n/2}}{\gamma^{-2n}(\epsilon_{2,n}-\epsilon_{1,n})}\right] \\ &\le C(f)\left[\gamma^{-np}+\frac{\alpha_0^{-n}\rho^n+\rho^{-n/2}}{\gamma^{-2n}\beta^{-n}}\right].\end{aligned}$$

Si on choisit $\gamma=\beta$ et $\rho \in]\beta^6, \alpha_0/\beta^3[$, alors

$$\eta = \inf\left\{\gamma^p, \frac{\alpha_0\rho^{-1}}{\beta^3}, \frac{\rho^{1/2}}{\beta^3}\right\}$$

est un nombre >1 et pour tout $x \in V_n$, on a :

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) \le 3C(f)\eta^{-n},$$

et donc

$$\int_{V_n} \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)^2(x)\,dm(x) \le (3C(f)\eta^{-n})^2.$$

La convergence de la série $\sum_{n>0}\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ est ainsi prouvée.

La convergence de la série $\sum_{n<0}\|f-\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ est une conséquence de la régularité de f et du fait que les atomes de $\mathcal{A}_n$ sont des morceaux d'horocycles contractants. □

Remarques 6.3. (1) Les fonctions f de $L^2(G/\Gamma)$ qui ne dépendent pas de θ (i.e. K-invariantes) vérifient le TCL.

En effet, d'après (2.1.2) et le Théorème 5.3, nous avons $\sigma^2(f) \le C\|f\|_2^2$, où C est une constante ne dépendant pas de f. En approchant en norme L^2 la fonction f par des fonctions höldériennes (ϕ_n) ne dépendant pas de θ, nous obtenons une suite (ϕ_n) de fonctions vérifiant le TCL et telles que $\sigma^2(f-\phi_n) \le C\|f-\phi_n\|_2^2 \to 0$. Il en résulte que f vérifie également le TCL.

(2) Les majorations obtenues pour les séries $\sum_{n>0}\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ et $\sum_{n<0}\|f-\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)\|_2$ ne dépendent que de la régularité höldérienne de f. Ceci assure que les fonctions g et h de la représentation (2.5.1) ont une norme L^2 bornée, quand on fait varier f dans un ensemble de fonctions de régularité höldérienne bornée.

7. *Cobords*

7.1. Dans les sections précédentes, nous avons montré que, si une fonction f régulière n'est pas un cobord, alors elle vérifie certains théorèmes limites non dégénérés. Il est important de disposer d'un critère assurant que f n'est pas un cobord. Si une fonction f est un cobord dans la classe des fonctions continues (i.e. égale à $\phi - T\phi$ pour une fonction ϕ continue), alors, la condition (2.3.4) étant vérifiée, le Lemme 2.4 implique que l'intégrale de f le long de toute orbite périodique du flot géodésique $(T^t, t \in \mathbb{R})$ est nulle.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

Le résultat de cette section permet donc de tester sur les orbites périodiques la condition de cobord, puisqu'il montre que toute fonction höldérienne qui est un cobord dans la classe des fonctions mesurables l'est aussi dans la classe des fonctions höldériennes.

Fixons un réel $A > 0$. Il existe P_A tel que, pour tout $t \in [-A, A]$, on ait :

$$\frac{|t|}{\sqrt{P_A}} \leq d_0(Id, h_t^s) \leq \sqrt{P_A}|t|.$$

Pour tout $x \in G$, tout $t \in [-A, A]$ et tout entier $k \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} d_0(g_k x, g_k h_t^s x) &= d_0(g_k x, h^s_{e^{-k}t} g_k x) \\ &= d_0(Id, h^s_{e^{-k}t}) \leq \sqrt{P_A} e^{-k}|t| \\ &\leq P_A e^{-k} d_0(Id, h_t^s) = P_A e^{-k} d_0(x, h_t^s x) \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

THÉORÈME 7.2. *Soit f une fonction sur $\mathcal{T}^1 S$ höldérienne d'ordre $p \leq 1$. Si f est un cobord mesurable, alors il existe une fonction ψ höldérienne d'ordre $p/2$ telle que $f = \psi - \psi \circ T$.*

Preuve. En la relevant dans G, nous pouvons considérer que la fonction f est une fonction sur G invariante sous l'action de Γ à droite et höldérienne d'ordre p pour la distance d_0. Soit $R > 0$ tel que l'on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq R d_0(x, y)^p, \quad \forall x, y \in G.$$

Si la fonction f est un cobord mesurable, elle est nécessairement d'intégrale nulle sur G/Γ et, d'après la Remarque 2.7(2), est un cobord dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur G/Γ.

En particulier, il existe une fonction ϕ sur G qui est Γ-invariante, intégrable et d'intégrale nulle sur G/Γ, telle que $f = \phi - T\phi$.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $S_n f$ et $S_{-n} f$ les sommes

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} T^k f, \quad S_{-n} f = \sum_{k=-n}^{-1} T^k f.$$

L'égalité de cobord fournit les identités suivantes :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n f = \phi - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n \phi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_{-n} f = -\phi + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^{-n} \phi.$$

Notons

$$B_0 = \left\{ x \in G : \phi(x) = \lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N S_n f(x) = -\lim_N \frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n} f(x) \right\}.$$

D'après l'ergodicité de la transformation T sur G/Γ, les suites $(N^{-1} \sum_1^N T^n \phi)_{N \geq 1}$ et $(N^{-1} \sum_1^N T^{-n} \phi)_{N \geq 1}$ tendent vers 0 presque partout et donc B_0 est de mesure pleine.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

Soit $t \in [-A, A]$. Supposons que x et $h_t^s x$ appartiennent tous les deux à B_0. D'après (7.1.1), nous avons :

$$|f(T^k x) - f(T^k h_t^s x)| \leq R d(T^k x, T^k h_t^s x)^p \leq R P_A^p e^{-kp} d(x, h_t^s x)^p;$$

d'où l'on déduit

$$|S_n f(x) - S_n f(h_t^s x)| \leq R P_A^p \left(\sum_0^{n-1} e^{-kp} \right) d(x, h_t^s x)^p,$$

puis

$$|\phi(x) - \phi(h_t^s x)| \leq R P_A^p \left(\sum_0^{\infty} e^{-kp} \right) d(x, h_t^s x)^p. \tag{7.2.1}$$

Notons R'_A le réel $R P_A^p (\sum_0^\infty e^{-kp})$. Si x et $h_t^u x$ appartiennent tous les deux à B_0, on montre de la même façon en utilisant l'égalité $\phi(x) = -\lim N^{-1} \sum_1^N S_{-n} f$ la majoration

$$|\phi(x) - \phi(h_t^u x)| \leq R'_A d(x, h_t^u x)^p. \tag{7.2.2}$$

Cela signifie que la restriction de ϕ à B_0 est régulière le long des orbites des flots horocycliques et suffit à prouver que ϕ coïncide presque sûrement avec une fonction höldérienne, grâce à la propriété que deux points voisins x et y de $\mathcal{T}^1 S$ peuvent être joints par quatre morceaux d'orbites des flots horocycliques de longueurs comparables à $\sqrt{d(x, y)}$.

C'est ce qu'exprime le Lemme 7.3 ci-dessous, dont l'énoncé tient compte du fait que nous ne disposons des inégalités (7.2.1) et (7.2.2) que si x, $h_t^u x$, $h_t^s x$ appartiennent à B_0.

Avec les notations de ce lemme, que nous admettons provisoirement, soient x dans B_4, y dans $B(x, a)$ et $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}\,]^4$, tels que les points x, $h_{t_1}^s x$, $h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$, $h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$ et $y = h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$ appartiennent à B_0.

Les inégalités (7.2.1) et (7.2.2) entraînent, en prenant pour A le nombre $C\sqrt{a}$:

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \phi(y)| &\leq |\phi(x) - \phi(h_{t_1}^s x)| + |\phi(h_{t_1}^s x) - \phi(h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)| \\
&\quad + |\phi(h_{v_1}^u h_{t_1}^s x) - \phi(h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)| \\
&\quad + |\phi(h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x) - \phi(h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)| \\
&\leq R'_A (d(x, h_{t_1}^s x)^p + d(h_{t_1}^s x, h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)^p \\
&\quad + d(h_{v_1}^u h_{t_1}^s x, h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)^p + d(h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x, h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)^p).
\end{aligned}$$

Les applications $t \mapsto h_t^u z$ et $t \mapsto h_t^s z$ sont lipschitziennes (uniformément en z) et le quadruplet (t_1, t_2, v_1, v_2) appartient à $[-C\sqrt{d(x, y)}, C\sqrt{d(x, y)}\,]^4$. Donc les quatre distances apparaissant ci-dessus sont comparables à $\sqrt{d(x, y)}$: il existe $L > 0$ tel que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L d(x, y)^{p/2}.$$

Pour tout $x \in G$, notons $P(x, a)$ l'ensemble des points y de $B(x, a)$ tels que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L d(x, y)^{p/2}$. Convenons de plus que $P_1(x, a)$ désigne $P(x, a)$ et $P_{-1}(x, a)$ désigne ${}^c B(x, a)$.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

D'après le Lemme 7.3, pour $x \in B_4$, nous avons $m(P(x,a)) = m(B(x,a))$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable d'éléments de B_4, dense dans G. Les ensembles

$$\bigcup_{\epsilon\in\{-1,1\}^n} \bigcap_{k=1}^{n} P_{\epsilon_k}(x_k, a),$$

formés des points y vérifiant vis à vis de $x_1, \ldots, x_n$ la propriété énoncée dans le Lemme 7.3, sont de mesure pleine, pour tout $n \geq 1$, et forment une famille décroissante. Leur intersection

$$B_\infty = \bigcup_{\epsilon\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}} \bigcap_{k=1}^{\infty} P_{\epsilon_k}(x_k, a)$$

est de mesure pleine.

Soient x et y deux points de B_∞ tels que $d(x, y) < a$ et $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite tendant vers x. Nous avons, pour i suffisamment grand,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi(x) - \phi(x_{k_i})| + |\phi(x_{k_i}) - \phi(y)| \leq L(d(x, x_{k_i})^{p/2} + d(x_{k_i}, y)^{p/2}).$$

On en déduit que la restriction de ϕ à B_∞ est höldérienne d'ordre $p/2$. La fonction ψ continue sur G, égale à ϕ sur B_∞, est höldérienne d'ordre $p/2$, Γ-invariante et vérifie $f = \psi - T\psi$. □

Il reste à montrer le lemme.

LEMME 7.3. *Il existe $C > 0$, $a > 0$ et B_4 de mesure pleine tels que, pour tout $x \in B_4$, pour presque tout $y \in B(x, a)$, il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}\,]^4$ tels que les points x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à B_0.*

Preuve. En tout point x, l'application $(t, v, w) \longmapsto h^u_t g_v h^s_w x$ fournit un système de coordonnées locales en x sur G. En appliquant le théorème de Fubini, on montre que :

- il existe B_1 de mesure pleine tel que, si x appartient à B_1, alors $h^s_t x \in B_0$ pour presque tout $t \in [-1, 1]$;
- il existe B_2 de mesure pleine tel que, si x appartient à B_2, alors $h^u_v h^s_t x \in B_0$ pour presque tout $(t, v) \in [-1, 1]^2$.

Posons $B_3 = B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Si x appartient à B_3 alors, pour presque tout $(t, v) \in [-1, 1]^2$, x, $h^s_t x$ et $h^u_v h^s_t x$ appartiennent à B_0.

On montre de la même façon qu'il existe B_4, un ensemble de mesure pleine, tel que si x appartient à B_4 alors, pour presque tout $(t, v) \in [-1, 1]^2$, les points x, $h^s_t x$ et $h^u_v h^s_t x$ appartiennent à B_3. Lorsque $h^u_v h^s_t x$ appartient à B_3, pour presque tout $(t', v') \in [-1, 1]^2$, les points $h^u_v h^s_t x$, $h^s_{t'} h^u_v h^s_t x$ et $h^u_{v'} h^s_{t'} h^u_v h^s_t x$ appartiennent à B_0.

Finalement, si x appartient à B_4 alors, pour presque tout $(t, v, t', v') \in [-1, 1]^4$, les points x, $h^s_t x$, $h^u_v h^s_t x$, $h^s_{t'} h^u_v h^s_t x$ et $h^u_{v'} h^s_{t'} h^u_v h^s_t x$ appartiennent à B_0.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, posons

$$v_1 = \sqrt{|e^{-r} - 1|}, \quad v_2 = -e^r v_1, \quad t_2 = \epsilon(r)\sqrt{|e^{-r} - 1|} \quad \text{et} \quad t_1 = -e^r t_2,$$

où $\epsilon(r)$ vaut 1 ou -1 selon que $(e^{-r} - 1)$ est positif ou négatif. On vérifie immédiatement la relation

$$h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} = g_{2r}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press

Ceci permet d'affirmer qu'il existe $a > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout x dans G et tout $r \leq a$, l'application

$$[-C\sqrt{r/2}, C\sqrt{r/2}\,]^4 \longrightarrow \mathcal{T}^1 S : (t_1, v_1, t_2, v_2) \longmapsto h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$$

soit surjective sur un voisinage de x contenant la boule $B(x, r)$. Comme l'image d'un ensemble de mesure nulle par cette application est de mesure nulle, si x appartient à B_4 et r est inférieur à a, lui-même inférieur à $2C^{-2}$, ce qui précède montre que, pour presque tous les points y de $B(x, r)$, il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{r/2}, C\sqrt{r/2}\,]^4$ tel que x, $h^s_{t_1} x$, $h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$, $h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$ et $y = h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$ appartiennent à B_0.

En particulier, pour tout entier k, pour presque tous les points y de $B(x, 2^{-k}a) \setminus B(x, 2^{-k-1}a)$, il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{2^{-k-1}a}, C\sqrt{2^{-k-1}a}\,]^4$ tel que les points x, $h^s_{t_1} x$, $h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$, $h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$ et $y = h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$ appartiennent à B_0. Dans ce cas $2^{-k-1}a$ est inférieur à $d(x, y)$.

Comme $B(x, a) = \cup_k B(x, 2^{-k}a) \setminus B(x, 2^{-k-1}a)$, le lemme est prouvé. □

RÉFÉRENCES

[1] M. Burger. Horocycle flow on geometrically finite surface. *Duke Math. J.* **61** (1990), 779–803.

[2] J. P. Conze and A. Raugi. Convergence des potentiels pour un opérateur de transfert, applications aux systèmes dynamiques et aux chaînes de Markov. *Séminaires de Rennes*, 1998, Université de Rennes I.

[3] A. Furman and B. Weiss. On the ergodic properties of Cartan flows. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17** (1997), 1371–1382.

[4] M. I. Gordin. On the central limit theorem for stationary processes. *(Dokl. Akad. Nauk SSSR) Soviet Math. Dokl.* **10**(5) (1969), 1174–1176.

[5] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale Limit Theory and its Applications*. Academic Press, New York, 1980.

[6] D. Y. Kleinbock and G. A. Margulis. Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **171** (1996), 141–171.

[7] S. Lang. $SL_2(\mathbb{R})$ *(Graduate Texts in Mathematics, 105)*. Springer, 1985, pp. 224–225.

[8] S. Le Borgne. Dynamique symbolique et propriétés stochastiques pour les automorphismes du tore : cas hyperbolique et quasi-hyperbolique. *Thèse*, Université de Rennes 1, 1997.

[9] S. Le Borgne. Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus. *Israel J. Math.* **109** (1999), 61–73.

[10] Y. Le Jan. The central limit theorem for the geodesic flow on noncompact manifolds of constant negative curvature. *Duke Math. J.* **74** (1994), 159–175.

[11] M. Ratner. The central limit theorem on n-dimensional manifolds of negative curvature. *Israel J. Math.* **16** (1973), 180–197.

[12] M. Ratner. The rate of mixing for geodesic and horocycle flows. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **7** (1987), 267–288.

[13] M. Ratner. Raghunathan's conjectures for $SL(2, \mathbb{R})$. *Israel J. Math.* **80**(1–2) (1992), 1–31.

[14] V. A. Rokhlin. On the fundamental ideas of measure theory. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 1* **10** (1962), 1–54.

[15] D. Rudolph. Asymptotically Brownian skew products give non loosely Bernoulli K-automorphism. *Invent. Math.* **91** (1988), 105–128.

[16] Y. G. Sinaï. Geodesic flows on manifolds of negative constant curvature. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **131** (1960), 335–339.

[17] Y. G. Sinaï. The central limit theorem for the geodesic flow on manifolds of constant negative curvature. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **133** (1960), 983–987.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001213 Published online by Cambridge University Press