Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2002), **22**, 535–554
DOI: 10.1017/S0143385702000263
© *2002 Cambridge University Press*
Printed in the United Kingdom

Échanges d'intervalles affines conjugués à des linéaires

ISABELLE LIOUSSE† et HABIB MARZOUGUI‡

† *U.R.A. AGAT, U.F.R. de Mathématiques, Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*
(e-mail: liousse@gat.univ-lille1.fr)
‡ *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Bizerte, 7021 Jarzouna-Bizerte, Tunisia*

(*Received* 21 *December* 1998 *and accepted in revised form* 5 *April* 2001)

Résumé. Dans cet article, nous étudions le problème de conjugaison par homéomorphismes des échanges d'intervalles affines aux échanges d'intervalles linéaires. Nous montrons que la C^2-conjugaison (C^1 dans le cas $n = 3$) aux échanges linéaires sans orbite périodique implique la C^ω-conjugaison. Ceci nous permet de donner une caractérisation simple des échanges d'intervalles affines qui sont C^2-conjugués aux échanges linéaires sans orbite périodique. D'autre part, nous construisons une famille $(f_t, t \in]0, 1])$ continue à un paramètre d'échanges d'intervalles affines uniquement ergodiques qui sont C^0 mais jamais C^1-conjugués au linéaire f_1, sauf f_1 lui-même, et nous indiquons un exemple d'échange d'intervalles affine (non minimal) qui est C^1 mais pas C^2-conjugué aux linéaires. Ensuite, nous donnons des critères de conjugaison C^0.

Abstract. In this paper, we study the problem of conjugation by homeomorphism between affine and linear interval exchange transformations. We show that C^2-conjugation (C^1 in the case $n = 3$) to a linear interval exchange transformation without periodic orbits implies the C^ω-conjugation. Using this, we give a characterization of affine interval exchange transformations without periodic orbits that are C^2-conjugated to linear interval exchange transformations. We construct a one-parameter continuous family $(f_t, t \in]0, 1])$ of uniquely ergodic affine interval exchange transformations that are C^0 but not C^1-conjugated to the linear f_1, except for f_1 itself. We indicate an example of an affine interval exchange transformation (non-minimal) which is C^1- but not C^2-conjugated to a linear transformation. We also give criteria for C^0-conjugation.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

0. *Introduction, définitions, notations, énoncés des résultats*

Un *échange de n intervalles* linéaire (respectivement affine) est une bijection f de $[0, 1[$ dans lui-même, telle qu'il existe $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ et la restriction de f sur chaque $I_i = [a_{i-1}, a_i[$ est une translation $x \mapsto x + \delta_i$ (respectivement une application affine directe $x \mapsto \alpha_i x + \beta_i$, $\alpha_i > 0$) et a pour image $[b_{\tau(i-1)}, b_{\tau(i-1)+1}[$, où $b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_{n-1} < b_n = 1$ et τ est une permutation de $\{0, \ldots, n-1\}$ dite *associée* à f (pour des exemples voir les Figures 1, 2, 3 ou 4).

Le vecteur $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ (respectivement $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$) est appelé *le vecteur de translation* (respectivement *de pentes*) de f.

Par exemple, toute rotation du cercle d'angle α peut-être associée à un échange de deux intervalles linéaire $g(x) = x + \alpha[\mathrm{mod}\, 1]$ avec comme point de discontinuité $1 - \alpha$. Les propriétés dynamiques et ergodiques de ces deux objets sont les mêmes.

Un échange d'intervalles affine est dit *similaire* lorsque ses pentes sont des puissances entières d'un même scalaire.

Un échange d'intervalles affine est dit *quasi-similaire* lorsque ses pentes sont le produit de puissances entières d'un même scalaire λ avec un réel strictement positif qui n'est pas une puissance de λ.

On note $\mathcal{D}_f^1 := \{a_i, i \in \{0, \ldots, n\}\}$ l'ensemble des discontinuités de f.

Nous dirons qu'un échange d'intervalles f est *véritable*, lorsque les a_i sont de véritables discontinuités de f (i.e. si $f_-(a_i) \neq f(a_i)$ si $i \notin \{0, n\}$ et pour a_0 et a_n si $f_-(a_n) \neq f(a_0)$).

Pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$, l'itéré f^p de f est un échange d'intervalles, nous noterons $\mathcal{D}_f^p$ l'ensemble de ses discontinuités et $Df^p(x)$ sa dérivée en un point $x \notin \mathcal{D}_f^p$.

On note $\mathcal{D}_f^\infty := \bigcup_{p \in \mathbb{Z}^*} \mathcal{D}_f^p$. On note $\mathcal{O}_f(x) := \{f^p(x), p \in \mathbb{Z}\}$, l'orbite de x par f.

Un échange d'intervalles est dit *minimal* lorsque toutes ses orbites sont denses.

Un échange d'intervalles est dit *totalement périodique* lorsque toutes ses orbites sont périodiques.

On appelle *liaison* de f, un sous-ensemble de $[0, 1[$ de la forme : $\{a_i, f(a_i), \ldots, f^p(a_i) = a_j\}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

Un échange d'intervalles de $[0, 1[$ possède toujours la *liaison dite triviale* : $\{a_{\tau^{-1}(0)}, a_0\}$.

Etant donné un échange d'intervalles f et un sous-intervalle $J = [a, b[$ de $[0, 1[$, on appelle *application de premier retour sur J induite par f* l'application définie sur $\{x \in J : \exists n \in \mathbb{N}^* : f^n(x) \in J\}$ par $f_J(x) = f^{n(x)}(x)$, où $n(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}^* : f^n(x) \in J\}$.

Soit F une application d'un intervalle $[a, b[$ dans lui-même, on appelle *renormalisation* de F l'application de $[0, 1[$ dans lui-même : $H \circ F \circ H^{-1}$ où H est l'unique application affine directe qui envoie $[a, b[$ sur $[0, 1[$.

Les échanges d'intervalles généraux (i.e. dont les restrictions aux $[a_{i-1}, a_i[$ ne sont que des homéomorphismes croissants) ont été étudiés par Arnoux [**Ar**], il montre les :

THÉORÈME. [**Ar**] *Soit f un échange d'intervalles général, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'ensemble $\Omega(f) := \{x \in [0, 1[:$ pour tout ouvert $\mathcal{U}$ contenant x, il existe $n \in \mathbb{N}^* : f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ des points non errants de f est $[0, 1[$,*

(ii) *f préserve une mesure de probabilité sans atome et de support total,*

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

(iii) *f est topologiquement conjugué à un échange d'intervalles linéaire (i.e. il existe un homéomorphisme croissant h de [0,1[et un échange d'intervalles linéaire g tels que $f = h \circ g \circ h^{-1}$).*

THÉORÈME. [**Ar**] (Décomposition dynamique) *Soit f un échange d'intervalles linéaire (ou tel que $\Omega(f) = [0, 1[$), l'intervalle $[0, 1[$ se décompose en un nombre fini de composantes invariantes dans lesquelles soit toutes les orbites sont denses (de telles orbites sont dites* localement denses*), soit toutes les orbites sont périodiques de même période.*

Aussi, Keane [**Ke**] a remarqué que, pour les échanges d'intervalles linéaires, l'indépendance rationnelle des longueurs des intervalles de continuité $[a_i, a_{i+1}[$ garantissait la minimalité.

Signalons que les échanges d'intervalles apparaissent naturellement comme applications de premier retour de Poincaré sur des intervalles transverses à certains flots sur les surfaces.

Si les échanges d'intervalles linéaires sont maintenant bien connus, presque rien ne l'est sur les échanges affines.

En 1987, Levitt [**Le**] donne des exemples d'échanges d'intervalles affines f sans orbite périodique, ni orbite localement dense : dans ce cas $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errant est un ensemble de Cantor et f est semi-conjugué à un échange d'intervalles linéaire (i.e. il existe une application continue croissante h de [0,1[dans lui-même, constante sur les composantes du complémentaire de $\Omega(f)$ et un échange d'intervalles linéaire g tels que $h \circ f = g \circ h$). Par construction même, les exemples de Levitt ne sont pas uniquement ergodiques ; tout récemment Camelier et Gutierrez en ont construits possédant ces mêmes propriétés et de plus uniquement ergodiques [**CaGu**].

Dans de récents travaux, Cooper *et al* [**CLR**] font intervenir des échanges d'intervalles similaires particuliers pour lesquels ils ont à décider de la dynamique et donnent un algorithme pour celà .

Dans le cas général, on ne sait pas décider de la dynamique d'un échange d'intervalles affine et ceci requiert une caractérisation des échanges d'intervalles affines qui sont conjugués aux linéaires.

D'autres types de questions, à rapprocher de l'étude menée par Herman [**He**], se posent : elles concernent la régularité des conjugaisons aux linéaires.

Dans le cas $n = 2$, ces questions sont résolues :

- Si $\tau = \mathrm{id}$ (et $f \neq \mathrm{id}$), l'ensemble limite de toute f-orbite est l'ensemble des points fixes hyperboliques de f c'est-à-dire $\{0, 1\}$ et f ne possède pas de mesure invariante non atomique.

- Si $\tau = (1, 2)$, Coelho *et al* [**CLdR**] ont montré que f possède toujours une mesure invariante qui est équivalente à la mesure de Lebesgue et sa densité est explicite, ainsi f est conjugué à 'une rotation' et Coelho *et al* [**CLdR**] peuvent exprimer le nombre de rotation de f.

Le cas $n = 3$ est marginal, son étude se ramène via le procédé d'induction de Rauzy à l'étude d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle, avec 3 morceaux

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

du cercle (§4). Signalons que Herman [**He**, ch. VI, paragraphe 7] a mené l'étude complète de la régularité des conjugaisons aux rotations irrationnelles pour les homéomorphismes du cercle affines par morceaux avec deux morceaux.

Notons qu'à partir de $n = 4$, les échanges d'intervalles linéaires minimaux ne sont plus tous uniquement ergodiques, ainsi un échange d'intervalles affine peut être conjugué à plusieurs échanges d'intervalles linéaires et la différentiabilité de la conjugaison n'est par conséquent pas bien définie, dans de tels cas nous considèrerons toujours la différentiabilité maximale possible.

En résumé, nos deux principales motivations ici, sont :

(1) donner des critères garantissant la conjugaison topologique aux linéaires (i.e. l'existence d'une mesure invariante de support total et sans atome);
(2) étudier la régularité des conjugaisons (des mesures invariantes : absolue continuité, équivalence à la mesure de Lebesgue).

Il est important de noter que dans toute la suite les conjugaisons h entre échanges d'intervalles affines et linéaires sont toujours des homéomorphismes de $[0, 1[$; on appelle *C^p-conjugaison* ($p \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) une conjugaison qui est un difféomorphisme de classe C^p de $[0, 1[$.

Signalons aussi la publication récente de travaux sur laminations affines des surfaces de Oertel [**Oe**], dans lesquels des structures transverses affines sur certains feuilletages de pseudo-Anosov sont construites.

Dans ce papier, nous allons montrer les résultats suivants :

THÉORÈME A. *Soit f un véritable échange de n intervalles affine, sans orbite périodique, notons f_i la restriction de f sur l'intervalle $[a_{i-1}, a_i[$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est C^ω-conjugué à un échange d'intervalles linéaire, par une application de la famille : $h_k(x) = (e^{kx} - 1)/(e^k - 1)$.*
(ii) *f est C^2-conjugué à un échange d'intervalles linéaire (C^1 si $n = 3$).*
(iii) *Les f_i vu comme éléments de GA_+ (groupe affine de la droite réelle) commutent, dans ce cas f est dit* abélien.

THÉORÈME A′. *Soit g un échange d'intervalles linéaire minimal, sans liaison non triviale et de vecteur de translation δ.*

L'ensemble des échanges d'intervalles affines qui sont conjugués à g par un homéomorphisme C^2 par morceaux est la famille à un paramètre $k \in \mathbb{R}^+$, formée des abéliens de pente $e^{k\delta}$.

Remarques. Dans le cas $n = 2$, $\tau = (1, 2)$, il est facile de voir que f_1 et f_2 commutent toujours, et nous retrouvons les résultats de Coelho *et al* [**CLdR**] ci-dessus mentionnés (§3).

Dans la partie (A), la seule implication nécessitant l'hypothèse 'f est sans orbite périodique' est (ii) $\Rightarrow$ (i).

Comme h_k vu comme homéomorphisme du cercle $[0, 1]/0 = 1$ n'est pas dérivable en $0 = 1$, il est facile de construire des exemples minimaux non abéliens, qui sont C^ω par morceaux conjugués aux linéaires mais jamais C^1-conjugués, voir le paragraphe 5. D'où l'intéret de la variante A′) au Théorème A) (exprimée volontairement de manière

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

différente). Aussi dans le paragraphe 5, nous contruisons un échange d'intervalles affine (sans orbite périodique, mais non minimal) C^1-conjugué à un échange d'intervalles linéaire, mais C^2-conjugué à aucun linéaire.

Le résultat suivant concerne la construction d'exemples d'échanges d'intervalles n'entrant pas dans le cadre des théorèmes précédents, nous les appelons exotiques. Précisement, un échange d'intervalles affine est dit *exotique* s'il est minimal et sa mesure invariante n'est pas équivalente à la mesure de Lebesgue, en particulier il est C^0-conjugué à un linéaire, non abélien et ne peut jamais être C^1 par morceaux conjugué à un linéaire.

THÉORÈME B. *Pour tout $n > 2$, il existe une famille continue $(f_t, t \in]0, 1])$ d'échanges de n intervalles affines minimaux uniquement ergodiques tous conjugués, tels que f_1 est un échange linéaire et f_t pour $t \in]0, 1[$ est exotique.*

Dans le théorème suivant, nous indiquons la différentiabilité maximale qu'il est possible d'obtenir pour la conjugaison aux linéaires minimaux d'échanges d'intervalles affines particuliers.

THÉORÈME C.

(i) *Les échanges d'intervalles similaires minimaux (respectivement et sans liaison non triviale) ne peuvent pas être C^1 (respectivement par morceaux) conjugués à des linéaires et les similaires abéliens sont toujours totalement périodiques.*

(ii) *Les échanges d'intervalles quasi-similaires minimaux faiblement mélangeant sont exotiques.*

Nous rappelons qu'un système dynamique (X, μ, T) ((X, μ) étant un espace mesuré et T une transformation préservant μ) est faiblement mélangeant si les fonctions constantes sont les seules fonctions propres de l'opérateur unitaire défini sur l'Hilbert $L^2(X, \mu)$ par $v \mapsto v \circ T$.

Dans le théorème suivant, nous donnons des critères de conjugaison.

THÉORÈME 2. *Soit f un échange d'intervalles affine.*

(1) *Une condition suffisante pour qu'un échange d'intervalles affine f soit conjugué à un échange linéaire est que l'ensemble des x pour lesquels la série $S(x) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} Df^p(x)$ diverge soit dense ($Df^p(x)$ étant la dérivée de f^p au point x).*

(2) *Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue de densité bornée et d'inverse bornée est que $Df^p(x)$ soit uniformément bornée en $x \in [0, 1[$ et en $p \in \mathbb{Z}$.*

Nous tenons tout particulièrement à signaler le fait que Barreto [**Ba**] a indépendament obtenu des résultats analogues au Théorème A et aussi a étudié dans un contexte général les échanges d'intervalles affines qui sont $C^{1+\alpha}$-conjugués (avec $\alpha \in [0, 1[$) et pas mieux aux linéaires.

1. *La famille h_k*

Soit k un réel strictement positif, le difféomorphisme analytique h_k défini par

$$h_k : [0, 1] \to [0, 1]$$
$$x \mapsto \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

conjugue tout échange de n intervalles linéaire à un échange de n intervalles affine de même permutation associée. Il suffit de faire le calcul :

$$h_k^{-1}(x) = \frac{1}{k}\log((e^k-1)x+1).$$

Soit $g_i(x) = x + \delta_i$, on a

$$\begin{aligned}(f_k)_i(x) := h_k \circ g_i \circ h_k^{-1}(x) &= \frac{1}{e^k-1}\left\{\exp\left[k\left(\frac{1}{k}\log((e^k-1)x+1)+\delta_i\right)\right]-1\right\}\\ &= \frac{1}{e^k-1}\{e^{k\delta_i}((e^k-1)x+1)-1\}\\ &= e^{k\delta_i}x + \frac{e^{k\delta_i}-1}{e^k-1}.\end{aligned}$$

Donc $(f_k)_i$ est une application affine de pente $e^{k\delta_i}$.

2. *Preuve des Théorèmes A et A′*

Soit g un échange de n intervalles linéaire de discontinuités $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$, on convient que la restriction g_i de g à $[a_{i-1}, a_i[$ s'écrit $g_i(x) = x + \delta_i$.

Quitte à conjuguer g par l'involution $x \mapsto 1 - x$ on pourra toujours supposer que les conjugaisons sont des homéomorphismes croissants de $[0, 1[$.

Preuve du Théorème A.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). L'application $f_k := h_k \circ g \circ h_k^{-1}$ est un échange de n intervalles affine dont les discontinuités sont $0 = h_k(a_0) < h_k(a_1) < \cdots < h_k(a_{n-1}) < h_k(a_n) = 1$ et dont la permutation associée est la même que celle de g.

Ses restrictions aux intervalles $[h_k(a_{i-1}), h_k(a_i)[$ sont les

$$(f_k)_i(x) := \alpha_i \cdot x + \frac{1}{e^k-1}(\alpha_i - 1), \quad \alpha_i = e^{k\delta_i},$$

et ont le même point fixe $\omega = 1/(1-e^k)$, donc commutent entre elles.

Réciproquement, étant donné f un échange de n intervalles affine dont les restrictions f_i commutent. Cet échange est conjugué par l'homéomorphisme $(h_c)^{-1}$ à un échange linéaire dont le vecteur de translation est $((1/c)\log\alpha_1, \ldots, (1/c)\log\alpha_i, \ldots, (1/c)\log\alpha_n)$, où c est donné par $1/(1-e^c) = \omega$ le point fixe commun des f_i. □

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiate.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit f un échange d'intervalles affine C^2-conjugué à g. Notons h le difféomorphisme de classe C^2 qui les conjugue : $h \circ g = f \circ h$.

On a, pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $h \circ g^p = f^p \circ h$, d'où en dérivant une fois :

$$h'(g^p(x)) = Df^p(h(x)) \cdot h'(x), \text{ pour tout } x \in [0,1[\setminus \mathcal{D}_g^p, \tag{1}$$

puisque Df^p est constante par morceaux, en dérivant une nouvelle fois on obtient :

$$h''(g^p(x)) = Df^p(h(x)) \cdot h''(x), \text{ pour tout } x \in [0,1[\setminus \mathcal{D}_g^p.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

Maintenant, en divisant par $h'(g^p(x))$ (jamais nul, puisque h est un C^2-difféomorphisme) on a

$$\frac{h''(g^p(x))}{h'(g^p(x))} = \frac{h''(x)}{h'(x)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[\backslash\mathcal{D}_g^\infty$ l'application $H = h''/h'$ est constante sur l'orbite pour g de x. Puisqu'elle est continue, elle est constante sur l'adhérence de cette orbite. Maintenant, si f (donc g) n'a pas d'orbite périodique, H ne prend qu'un nombre fini de valeurs (correspondant aux composantes minimales de g), donc sa continuité lui impose d'être constante.

La résolution de l'équation différentielle $h''/h' = k$ donne $h(x) = C_1 e^{kx} + C_2$, puisque h est un homéomorphisme croissant de $[0, 1[$, il est du type h_k. □

Preuve du Théorème A'. Un raisonnement analogue au précédent montre que si h est un homéomorphisme C^2 par morceaux, conjugant un échange affine f à g et si $\mathcal{D}_h$ représente l'ensemble fini des points où h n'est pas C^2 alors pour tout $x \in [0, 1[\backslash\mathcal{D}_g^\infty \cup \mathcal{D}_h$, on a

$$h'(g^p(x)) = Df^p(h(x)) \cdot h'(x) \tag{1}$$

et

$$h''(g^p(x)) = Df^p(h(x)) \cdot h''(x), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Si $h'(x) = 0$, alors d'après (1), h' s'annule sur toute l'orbite pour g de x, ainsi par densité de cette orbite et par continuité par morceaux de h', h' est nulle sur un ouvert, ce qui contredit le fait que h soit un homéomorphisme.

Nous pouvons donc comme précédement diviser par $h'(g^p(x))$, ainsi pour tout $x \in [0, 1[\backslash\mathcal{D}_g^\infty \cup \mathcal{D}_h$, $H := h''/h'$ est constante sur l'orbite pour g de x qui est dense dans $[0, 1[$ donc H est constante sur $[0, 1[$.

Maintenant en intégrant, nous trouvons que $h'(x) = C(x)e^{kx}$, où C est une fonction constante par morceaux qui sont les intervalles sur lesquels h est C^2 c'est-à-dire les composantes connexes de $[0, 1]\backslash\mathcal{D}_h$, et C n'est jamais nulle car h est un homéomorphisme.

Soit $x \in [0, 1[\backslash\mathcal{D}_g^p \cup \mathcal{D}_h$, remplaçons h' dans (1), on obtient :

$$Df^p(h(x))(C(x)e^{kx}) = e^{kg^p(x)}C(g^p(x)),$$

avec $g^p(x) = x + \delta^p(x)$ et $Df^p(h(x)) = \lambda^p(x)$, où δ^p et λ^p sont des fonctions constantes sur les intervalles de continuité de g^p, puisque $Df^p(h(\cdot))$ est constante sur les images par h^{-1} des intervalles de continuité de f^p qui sont exactement les intervalles de continuité de g^p. On a

$$\lambda^p(x)C(x) = e^{k\delta^p(x)}C(g^p(x))$$

en passant au logarithme, on obtient

$$\log\lambda^p(x) + \log C(x) = k\delta^p(x) + \log C(g^p(x)).$$

La fonction $W^p(x) := k\delta_p(x) - \log\lambda^p(x) (= \log C(x) - \log C(g^p(x)))$ est constante par morceaux qui sont les intervalles de continuité de g^p.

Nous allons montrer que si C n'est pas constante (i.e. $\mathcal{D}_h \neq \emptyset$), alors les points de $\mathcal{D}_h$ sont disposés sur des liaisons non triviales de g.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

En effet, soit t un point de $\mathcal{D}_h$, supposons par l'absurde qu'une demi g-orbite, par exemple la positive, de t soit libre, c'est-à-dire ne rencontre par $\mathcal{D}_g^1$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un intervalle ouvert contenant t sur lequel g^m est continue (affine).

D'autre part, par densité de l'orbite positive pour g de t, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $g^p(t)$ soit dans l'intérieur d'un intervalle où h est C^2 (une composante connexe de $[0, 1[\backslash\mathcal{D}_h$).

En considérant l'intersection de l'image par g^p de l'intervalle de continuité de g^p contenant t avec cette composante connexe de $[0, 1[\backslash\mathcal{D}_h$, puis en prennant sa préimage par g^p, on trouve un intervalle ouvert contenant t sur lequel g^p est continue et tel que sur son image par g^p, h est C^2 donc C est constante.

Par hypothèse $t \in \mathcal{D}_h$, donc de part et d'autre de t, C prend deux valeurs différentes, alors que W^p et $C \circ g^p$ restent constantes ce qui contredit l'égalité (2) $\log C(x) = W^p(x) + \log C(g^p(x))$. De même pour la g-orbite négative de t.

On en déduit que la g orbite de t contient une liaison, qui de plus, est de la forme :

$$\{a_i, t_1 = g(a_i) = b_{\tau(i)}, t_2 = g^2(a_i), \ldots, t_k = g^k(a_i) = a_l\}, \quad \text{où chaque } t_j \in \mathcal{D}_h.$$

En effet, tant que la demi-orbite positive issue de t ne rencontre pas les a_j (i.e. $\mathcal{D}_g^1$), C doit prendre des valeurs différentes de part et d'autre de ce morceau d'orbite (i.e. de part et d'autre des $g^s(t)$) d'après (2), puisque les W^s sont constants.

De même, tant que la demi-orbite négative issue de t ne rencontre pas les b_j, C doit prendre des valeurs différentes de part et d'autre de ce morceau d'orbite.

Notons que a_i n'est pas nécessairement un point de $\mathcal{D}_h$, mais s'il l'est alors il doit être lié négativement à un a_j, d'après la ligne précédente.

Maintenant, puisque la seule liaison de g est la liaison triviale : $\{a_{\tau^{-1}(0)}, a_0\}$, on conclut que ou $t = a_{\tau^{-1}(0)}$ et $g(t) = a_0$, ou $t = a_0$ et $g^{-1}(t) = a_{\tau^{-1}(0)}$.

Mais seul le second cas est possible, car d'après la remarque précédente, si $a_{\tau^{-1}(0)} \in \mathcal{D}_h$, il doit être lié négativement ce qui serait une liaison autre que la triviale pour g.

Ainsi, le seul point de discontinuité possible de h' est $a_0 = 0$, c'est-à-dire que h' est continue sur $[0, 1[$, et on se retrouve dans le cas abélien. □

3. *Le cas $n = 2$*

Considérons un échange de deux intervalles affine f dont les discontinuités sont 0, λ et 1, et le vecteur de pentes (α_1, α_2).

On calcule facilement en écrivant $f_1(\lambda) = 1$, $f_2(\lambda) = 0$ et $f_1(0) = f_2(1)$ que

$$f_1(x) = \alpha_1(x - \lambda) + 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) = \left(\frac{1 - \alpha_1\lambda}{1 - \lambda}\right)(x - \lambda).$$

On vérifie que f_1 et f_2 commutent : elles ont même point fixe $\omega = ((1-\alpha_1\lambda)/(1-\alpha_1))$.

On conclut qu'un échange de deux intervalles de permutation associée $(1, 2)$ est toujours conjugué par un h_k à un linéaire g, où g a pour vecteur de translation

$$\left(\frac{\log\alpha_1}{k}, \frac{\log\alpha_2}{k}\right) \quad \text{et} \quad k = \log\left(\frac{\omega - 1}{\omega}\right) = \log\left(\frac{\alpha_1(1 - \lambda)}{1 - \alpha_1\lambda}\right),$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

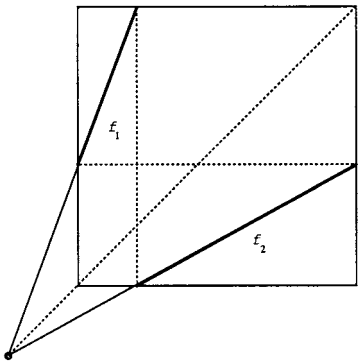


FIGURE 1.

ainsi la rotation du cercle associée à g a pour angle

$$\frac{\log \alpha_1}{\log((\alpha_1(1-\lambda))/(1-\alpha_1\lambda))}.$$

Nous retrouvons ainsi les résultats de [**CLdR**]. □

4. *Le cas $n = 3$*

PROPOSITION 1. *Soit f un échange de trois intervalles affine de permutation associée τ.*

(1) *Si $\tau = (1, 2)$ (respectivement $(2, 3)$), les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   - (i) *les f_i commutent ;*
   - (ii) *f est C^0-conjugué à un échange linéaire ;*
   - (iii) *$f_3 = \mathrm{Id}$ (respectivement $f_1 = \mathrm{Id}$).*

(2) *Si $\tau = (1, 3)$,*
   - (a) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
     - (i) *f n'a pas d'orbite périodique ;*
     - (ii) *f est C^0-conjugué à un échange linéaire minimal uniquement ergodique.*
   - (b) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
     - (i) *les f_i commutent ;*
     - (ii) *f est C^1-conjugué à un échange linéaire ;*
     - (iii) *$(Df_1)(Df_3) = Df_2$.*
   - (c) *Il existe f exotique.*

Remarque. Pour le 2(a) nous n'avons pas besoin de supposer que l'échange d'intervalles f est affine.

Preuve. On convient que f est un échange d'intervalles affines de permutation associée τ, que $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 = 1$ *sont* les discontinuités de f et que les restrictions f_i de f aux $I_i = [a_{i-1}, a_i[$ s'écrivent : $f_i(x) = \alpha_i x + \beta_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $b_{\tau(i)} = f(a_i)$ et $J_i = [b_i, b_{i+1}[$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

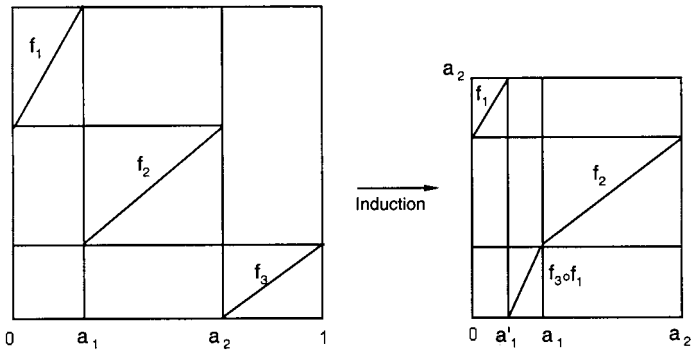


FIGURE 2.

(1) Le cas $\tau = (1, 2)$ (respectivement (2, 3)). Nous avons déja vu (i) $\Rightarrow$ (ii).

Pour (ii) $\Rightarrow$ (iii), il suffit de remarquer que le point 1 (respectivement 0) est fixe par f, donc si f est C^0-conjugué à un linéaire g, 1 (respectivement 0) est fixe par g et par conséquent $g_3 = \mathrm{Id}$ (respectivement $g_1 = \mathrm{Id}$) et finalement $f_3 = \mathrm{Id}$ (respectivement $f_1 = \mathrm{Id}$).

Pour (iii) $\Rightarrow$ (i), si $f_3 = \mathrm{Id}$ (respectivement $f_1 = \mathrm{Id}$), la restriction de f à $I_1 \cup I_2$ (respectivement $I_2 \cup I_3$) renormalisée est un échange de deux intervalles, donc d'après le paragraphe précédent, toujours f_1 et f_2 (respectivement f_2 et f_3) commutent et donc les f_i commutent.

(2) Le cas $\tau = (1, 3)$. La première induite de Rauzy, c'est-à-dire la renormalisée de l'application de premier retour sur l'intervalle $I_1 \cup I_2$ si $l(I_3) < l(J_3)$ (sur $J_1 \cup J_2$ sinon), est un échange de deux intervalles (voir la Figure 2), auquel est associé (en identifiant 0 et 1) un homéomorphisme du cercle affine par morceaux.

Si f n'a pas d'orbite périodique sa première induite de Rauzy et l'homéomorphisme du cercle affine par morceaux qui lui est associé n'en n'ont pas non plus. De plus, d'après le théorème de Denjoy pour les homéomorphismes de classe P [**He**, (VI-5), Théorème 5.5], cet homéomorphisme est minimal, donc f aussi.

Ainsi, f est conjugué à un linéaire minimal g, dont la première induite de Rauzy est une rotation irrationnelle donc uniquement ergodique donc g l'est aussi, d'où le point 2(a).

D'autre part, une condition nécessaire pour que la conjugaison h de f à g soit dérivable est que les pentes de $f_3 \circ f_1$ et f_2 coïncident en a_1 (car h conjugue aussi les applications de premier retour sur des intervalles I, $h(I)$), ce qui montre l'implication (ii) implique (iii) du (b).

Puisque (i) $\Rightarrow$ (ii) est deja vu, il nous reste à prouver que (iii) implique (i).

Les relations

$$f_1(0) = f_2(a_2)$$
$$f_1(a_1) = 1$$
$$f_2(a_1) = f_3(1)$$
$$f_3(a_2) = 0$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

donnent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_2 a_2 + \beta_2\\ 1 &= \alpha_1 a_1 + \beta_1\\ \alpha_3 + \beta_3 &= \alpha_2 a_1 + \beta_2\\ 0 &= \alpha_3 a_2 + \beta_3\end{aligned}$$

en éliminant les a_i :

$$\begin{cases}\alpha_3\beta_1 + \alpha_2\beta_3 = \alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\beta_3 = \alpha_2(1-\beta_1) + \alpha_1\beta_2.\end{cases}$$

Par conséquent, si $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2$ ($Df_1 Df_3 = Df_2$), on a

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_3 + (\beta_1 - \beta_2) &= 0\\ \alpha_2\beta_1 + \alpha_1(\beta_3 - \beta_2) &= 0.\end{aligned} \qquad (*)$$

En éliminant dans $(*)$ $\beta_3 = (1/\alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)$, on obtient :

$$\beta_1(\alpha_2 - 1) = \beta_2(\alpha_1 - 1).$$

Autrement dit, f_1 et f_2 commutent.

Maintenant, en éliminant dans $(*)$ $\alpha_2 = \alpha_1\alpha_3$ et $\beta_2 = \alpha_1\beta_3 + \beta_1$, on trouve :

$$\beta_1(\alpha_3 - 1) = \beta_3(\alpha_1 - 1).$$

Donc f_1 et f_3 commutent.

(c) Pour les constructions d'échanges de trois intervalles affines exotiques, voir le paragraphe 6. □

5. *Exemples où la conjugaison est C^ω par morceaux mais pas C^1, et C^1 mais pas C^2 (remarques du Théorème A)*

(a) En considérant un échange de n intervalles affines abélien minimal et en changeant de point 0 : on fait glisser le carré $[0, 1[\times [0, 1[$ le long de sa diagonnale, comme indiqué sur la Figure 3. On obtient un échange de $n+1$ ou $n+2$ intervalles (suivant si la nouvelle origine est une discontinuité de f ou f^{-1} ou non) minimal (la dynamique est inchangée), C^ω par morceaux conjugué à un linéaire mais qui n'est pas abélien ; de plus si on a pris le soin de choisir un abélien uniquement ergodique, on est assuré qu'il ne sera jamais C^1 conjugué à un linéaire.

(b) Considérons la famille d'échanges de quatre intervalles de permutation associée $\tau = (1, 2) \circ (3, 4)$ obtenus en juxtaposant deux échanges de deux intervalles affines, comme représenté sur la Figure 4.

Soit F un échange de cette famille. Les mesures de probabilité F-invariantes, de support total et sans atome sont $\mu_t = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, $t \in]0, 1[$, où :

- μ_1 est la renormalisation sur $[0, \delta]$ de la mesure de Stieljes associée à h_{k_1} (i.e. définie par $\mu_1([a, b]) = h_{k_1}(b) - h_{k_1}(a)$), où k_1 est uniquement déterminé par la donnée du point fixe commun ω_1 de F_1 et F_2 par $\omega_1 = 1/(1 - e^{k_1})$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

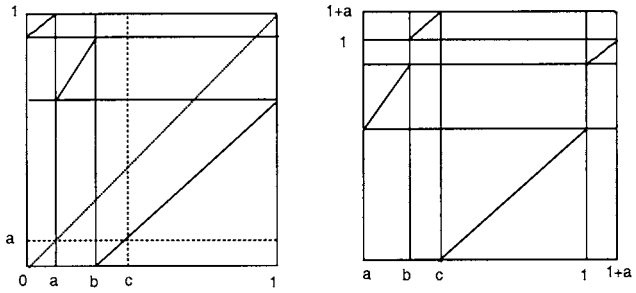


FIGURE 3.

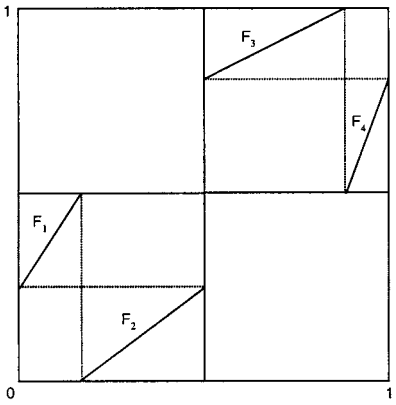


FIGURE 4.

- μ_2 est la renormalisation sur $[\delta, 1]$ de la mesure de Stieljes associée à h_{k_2}, où k_2 est uniquement déterminé par la donnée du point fixe commun ω_2 de F_3 et F_4 par $\omega_2 = 1/(1 - e^{k_2})$.

Par conséquent, les conjugaisons de F aux échanges linéaires sont les homéomorphismes :

$$h_t : [0, 1] \to [0, 1]$$
$$x \mapsto h_t(x) = \begin{cases} H_t \circ h_{k_1} \circ H_\delta^{-1}(x) & \text{si } x \in [0, \delta] \\ \overline{H}_{(1-t)} \circ h_{k_2} \circ \overline{H}_{1-\delta}^{-1}(x) & \text{si } x \in [\delta, 1] \end{cases}$$

où H_λ (respectivement $\overline{H}_\lambda$) désigne l'homothétie de centre 0 (respectivement 1) et de rapport λ. La dérivée p-ième de h_t s'écrit :

$$h_t^{[p]}(x) = \frac{t}{\delta^p} h_{k_1}^{[p]}(H_\delta^{-1}(x)) \quad \text{si } x \in [0, \delta]$$

et

$$h_t^{[p]}(x) = \frac{(1-t)}{(1-\delta)^p} h_{k_2}^{[p]}(\overline{H}_{(1-\delta)}^{-1}(x)) \quad \text{si } x \in [\delta, 1].$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

La continuité en δ de $h^{[p]}$ s'écrit :

$$\frac{t}{\delta^p}\frac{{k_1}^p e^{k_1}}{e^{k_1}-1} = \frac{(1-t)}{(1-\delta)^p}\frac{{k_2}^p}{e^{k_2}-1}.$$

On en déduit que

- h_t est C^1 si et seulement si

$$\frac{t}{\delta}\frac{k_1 e^{k_1}}{e^{k_1}-1} = \frac{(1-t)}{(1-\delta)}\frac{k_2}{e^{k_2}-1}(C_1),$$

- h_t est C^p, $p \geq 2$ si et seulement si

$$(C_1) \text{ et } \left[(C) : \left(\frac{k_1}{\delta}\right) = \left(\frac{k_2}{(1-\delta)}\right)\right].$$

On voit bien que la conjugaison C^2 équivaut à la conjugaison C^∞.

L'échange d'intervalles F étant fixé, δ, k_1 et k_2 sont fixés.

Ainsi F est toujours C^1-conjugué à un linéaire et le paramètre t de la conjugaison est déterminé par

$$\frac{t}{1-t} = \frac{\delta}{(1-\delta)}\frac{k_2(e^{k_1}-1)}{k_1 e^{k_1}(e^{k_2}-1)}.$$

On choisit ces paramètres : $k_1 = \log 2$, $k_2 = \log 2$ et $\delta = \frac{1}{3}$, on trouve alors $t = \frac{1}{5}$ et il est facile de voir que (C) est fausse. On en déduit que l'échange d'intervalles affine correspondant à ces paramètres est C^1 mais pas C^2 conjugué aux linéaires.

6. *Echanges d'intervalles affines exotiques*

Reprenons la famille d'homéomorphismes du cercle affines par morceaux, considérée par Herman dans le paragraphe 7 du chapitre VI de [**He**] et représentés sur la Figure 5(a).

Soit $\lambda > 1$ et $\beta > 0$ deux paramètres réels fixés. On pose, pour $x \in [0, 1]$,

$$f_{\beta,\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \lambda^{-\beta}(x-1) & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec $\lambda a = \lambda^{-\beta}(a-1) + 1$.

Considérons la famille d'homéomorphismes affines par morceaux de S^1 : $R_b \circ f_{\beta,\lambda}$, $b \in S^1$. Par propriété du nombre de rotation, pour tout $\alpha \in S^1$, il existe un b (unique si $\alpha \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$) tel que le nombre de rotation de $R_b \circ f_{\beta,\lambda}$ soit α. Si $\alpha \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, alors d'après le théorème de Denjoy pour les homéomorphismes de classe P (cf. [**He**, ch. VI, paragraphe 5], $R_b \circ f_{\beta,\lambda}$ est conjugué à R_α, donc préserve une mesure de probabilité sans atome et de support total, notée μ_f.

PROPOSITION. (Herman [**He**, (VI-7), 7.7.1]) *Soit $\rho(R_b \circ f_{\beta,\lambda}) = \alpha \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *$R_b \circ f_{\beta,\lambda}$ est conjugué à R_α par un homéomorphisme lipschitzien (en fait C^∞ par morceaux) ;*

(2) *$R_b \circ f_{\beta,\lambda}$ est conjugué à R_α par un homéomorphisme bi-absolument continu (ce qui revient à dire que μ_f est équivalente à la mesure de Haar sur S^1) ;*

(3) $\beta/1 + \beta \in \mathbb{Z}\alpha [\text{mod } 1]$.

Ainsi, si nous choisissons $\alpha \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et β tel que $\beta/1 + \beta \notin \mathbb{Z}\alpha [\text{mod } 1]$ (par exemple $\beta \in \mathbb{Z}$), μ_f n'est pas équivalente à la mesure de Haar.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

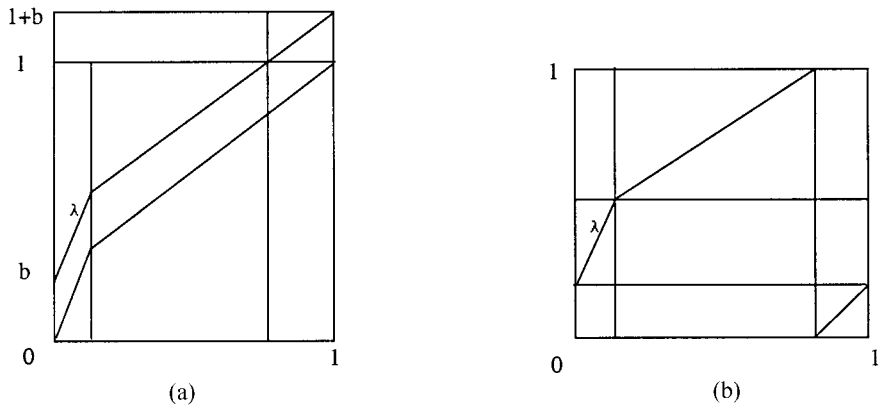


FIGURE 5.

(a) Construction 1. En coupant sur le point '0 = 1' du cercle (cf. Figure 5b), nous associons à un homéomorphisme

$$R_b \circ f_{\beta,\lambda} \quad \text{avec} \quad \alpha = \rho(f) \in S^1 \backslash (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{1+\beta} \notin \mathbb{Z}\alpha [\text{mod } 1],$$

un échange de deux intervalles affine par morceaux, que nous notons encore f.

Nous construisons une nouvelle application de $[0, 1[$ dans $[0, 1[$, en remplaçant la restriction de f sur $[0, a[$ par $f \circ f_{[0,a[}$ ($f_{[0,a[}$ est l'application de premier retour induite par f sur $[0, a[$) qui est un échange de trois intervalles de $[0, a[$ dans $f([0, a[)$, f est inchangée sur $[a, 1[$. Il est important de faire cette opération sur $[0, a[$ de manière à obtenir un véritable échange d'intervalles affine.

Nous obtenons un échange d'intervalles affine, qui est minimal et qui préserve μ_f (l'application de retour sur $[0, a[$ est sur chacun de ses intervalles de continuité une puissance de f d'où la minimalité et la mesure invariante), mais nous ne pouvons malheureusement pas garantir qu'il soit uniquement ergodique, pour obtenir des exemples uniquement ergodiques, nous allons indiquer une autre manière de voir cette construction.

Considérons le flot de suspension de f sur $\mathbb{T}^2$, S^1 s'identifie à une transversale complète $\mathcal{C}$ sur laquelle l'application de premier retour est f, notons O et A les images de 0 et a. En effectuant un revêtement à deux feuillets ramifié au dessus de O et A, on obtient une surface de genre 2 munie d'un flot possédant en O et A deux singularités de type selle de Morse.

Puisque la préimage de $\mathcal{C}$ est une courbe qui n'est pas simple, nous considérons une petite déformation $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}'$ reste transverse), dont la préimage est constituée de deux courbes fermées simples.

Il n'est pas difficile de voir que l'application de premier retour induite par le flot ramifié (sur la surface de genre 2) sur une des deux préimages de $\mathcal{C}'$ est l'échange d'intervalles construit au début de ce paragraphe (en effet, dès que le flot dans le premier feuillet rencontre l'arc OA, il part dans le second feuillet et y reste jusqu'à ce qu'il rencontre l'autre copie de $0A$, auquel cas il retourne dans le premier feuillet).

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

Construction d'exemples uniquement ergodiques. Un Anosov du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, possédant deux points fixes O et C, se relève à un revêtement à deux feuillets ramifié au dessus de O et C, en un difféomorphisme pseudo-Anosov sur une surface de genre 2 dont les feuilletages associés, relevés des feuilletages linéaires associés à l'Anosov sont uniquement ergodiques (voir par exemple l'exposé de Fried dans [**FLP**]), et par conséquent dont les applications de premier retour sont des échanges d'intervalles linéaires uniquement ergodiques.

Considérons l'un des deux feuilletages linéaires associés à cet Anosov. L'application de premier retour sur une petite déformation d'une transversale contenant O et C est une rotation irrationnelle d'angle α algébrique, notons 0 et c les points correspondant à O et C.

Fixons $\lambda > 0$ (α est fixé par ce qui précède) et considérons la famille $f_\beta := R_b \circ f_{\beta,\lambda}$ où b est tel que le nombre de rotation f_β soit α, et notons h_β l'homéomorphisme qui conjugue f_β à la rotation d'angle α et tel que $h_\beta(0) = 0$. Pour que le feuilletage obtenu par revêtement ramifié décrit ci-dessus soit conjugué au feuilletage du pseudo-Anosov ci-dessus nous devons nous assurer que $h_\beta(a) = c$, de manière à ramifier au dessus des préimages des points fixes de l'Anosov.

Comme $h_\beta(a) = \beta/(1+\beta)$ (voir la preuve 1) implique (3) du Théorème 7.7.1 [**He**, (III-7)], il existe β_0 tel que $h_{\beta_0}(a) = c$.

Puisque c est rationnel (C est un point rationnel car point fixe d'un Anosov), on a $\beta/(1+\beta) = h_{\beta_0}(a) = c \neq n\alpha$, ainsi par le Théorème 7.7.1 de [**He**, (III-7)] ci-dessus cité, la mesure invariante de f_β n'est pas équivalente à la mesure de Lebesgue.

Par conséquent, le feuilletage sur la surface de genre 2, obtenu par ramification au dessus de la suspension de f_β est conjugué à un feuilletage associé à un difféomorphisme pseudo-Anosov, donc uniquement ergodique, ainsi l'échange d'intervalles similaire obtenu comme application de retour est uniquement ergodique, et finalement exotique.

Construction d'une déformation exotique d'un linéaire. Soit $\mathcal{G}$ feuilletage pseudo-Anosov (respectivement g un échange d'intervalles linéaire) obtenu par ramification au dessus d'un feuilletage linéaire associé à un Anosov du tore, notons α l'angle de l'application de premier retour, et notons f_λ l'homéomorphisme affine par morceaux de S^1 de la forme $R_b \circ f_{\beta_\lambda,\lambda}$ conjugué à R_α par un homéomorphisme qui envoie les deux points de cassure de pente sur les deux points fixes de l'Anosov.

L'application qui à λ associe β est continue et lorsque λ tend vers 1, les f_λ tendent vers une rotation qui est R_α, par continuité du nombre de rotation.

Par conséquent la famille $(f_\lambda), \lambda \in [0,1[$ est une déformation continue de R_α, les échanges d'intervalles -applications de premier retour des flots obtenus par ramifications comme ci-dessus- sont affines uniquement ergodiques et exotiques.

Généralisant ceci, on montre que pour tout $n > 4$, il existe un échange d'intervalle linéaire g uniquement ergodique et une déformation continue de cet échange d'intervalles par des échanges d'intervalles affines exotiques et conjugués à g.

En effet, considérons un Anosov du tore avec $O, C_1, \ldots, C_{n-1}$ comme points fixes et l'homéomorphisme affine par morceaux h_{β_0} de nombre de rotation α, tel que $h_{\beta_0}(a) = c_1$, cette conjugaison h_{β_0} induit une conjugaison $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ entre les flots de suspension

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

de R_α et f_{β_0} et effectuons maintenant un revêtement à k feuillets ramifiés au dessus des n points $h^{-1}(\{O, C_1, \ldots, C_{n-1}\})$ avec indices respectifs $(k_1, \ldots, k_n)$, où $k_i \geq 2$.

Nous obtenons un feuilletage singulier avec n singularités d'indices respectifs $(1 - k_i)$ (de type selles à $2k_i$-branches) conjugué au feuilletage du pseudo-Anosov relevant l'Anosov de $\mathbb{T}^2$ choisi initialement. L'échange d'intervalles affine obtenu comme application de premier retour de ce feuilletage est exotique (puisque la mesure invariante est 'la même' que celle de f_{β_0} donc non équivalente à la mesure de Lebesgue) et possède $\sum k_i + 2$ discontinuités ($\sum k_i$ correpondant aux premiers points d'intersections de séparatrices stables issues des n selles avec la courbe $\mathcal{C}'$ et les deux autres sont les 2 extrémités de l'intervalle obtenu en coupant sur un point la courbe $\mathcal{C}'$), c'est donc un échange de $\sum k_i + 1$ intervalles (il est maintenant facile, pour tout $n \geq 5$, de trouver $k_i \geq 2$ tels que $\sum k_i = n - 1$).

(b) Construction 2. Considérons l'échange de trois intervalles linéaire T dont les discontinuités sont $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < 1$ et $T([0, a_1[) = [b_2, 1[$, $T([a_1, a_2[) = [b_1, b_2[$ et $T([a_2, 1[) = [0, b_1[$ où $b_1 = \alpha_1$ et $b_2 = \alpha_2$ (cf. Figure 5(b)).

Un calcul facile montre que $f \circ T$ est l'échange de trois intervalles, défini par

$$f\circ T([0, a_1[) = [0, b[, \quad f\circ T([a_1, a_2[) = [\lambda\alpha_1+b, 1[\quad \text{et} \quad f\circ T([a_2, 1[) = [b, \lambda\alpha_1+b[\,.$$

Maintenant, si nous prennons $\lambda \geq 1$ assez proche de 1 et α assez petit, on peut supposer que $0 < b < \alpha_1 < \lambda\alpha_1 + b < \alpha_2 < 1$ (en effet, f sera proche d'une rotation qui ne peut-être que R_α par continuité du nombre de rotation et donc $b = f(0)$ sera proche de α donc petit, α_1 sera proche de $\frac{1}{2}$ et α_2 sera proche de 1).

En recomposant avec T^{-1}, on obtient que $F := T^{-1} \circ f \circ T$ est un échange affine de 5 intervalles dont les discontinuités sont les images réciproques par $f \circ T$ des points $0 < b < \alpha_1 < \lambda\alpha_1 + b < \alpha_2 < 1$. Un calcul plus poussé montre que la permutation associée à F est $\binom{12345}{43152}$ et que la pente de F est $1/\lambda$ sur les trois premiers intervalles de continuité de F et λ sur les deux derniers.

De plus, l'échange d'intervalle $T^{-1}\circ f\circ T$ est uniquement ergodique (puisque f l'est) et préserve la mesure image par T^{-1} de μ_f qui n'est pas équivalente à la mesure de Lebesgue.

On peut aussi augmenter le nombre de discontinuités de F en augmentant le nombre de discontinuités de T.

Mais cette méthode ne donne pas facilement de déformation exotique d'un linéaire, en effet lorsque λ tend vers 1, les f_λ tendent bien vers une rotation qui est R_α, par continuité du nombre de rotation. Et la famille (f_λ), $\lambda \in [0, 1[$ est une déformation continue de R_α, mais les échanges d'intervalles affines $F_\lambda := T^{-1} \circ f_\lambda \circ T$ ne constituent à priori pas une déformation d'un même échange d'intervalles linéaire (F_λ est conjugué à l'échange d'intervalles linéaire $G_\lambda = T_\lambda^{-1} \circ R_\alpha \circ T_\lambda$ où $T_\lambda = h_\lambda \circ T \circ H_\lambda$, avec h_λ homéomorphisme qui conjugue f_λ à R_α et H_λ homéomorphisme qui conjugue F_λ à G_λ, T_λ est un échange du même nombre d'intervalles que T, il est linéaire car : préserve la mesure de Lebesgue (puisque R_α et G_λ la préservent et sont uniquement ergodiques), mais il est difficile de déterminer quand les G_λ sont les mêmes, pour des valeurs différentes de λ.

Les cas $n = 3$, $n = 4$. Commençons par remarquer qu'un échange d'intervalles affine f est complètement caractérisé par la donnée du vecteur $\Lambda = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ des longueurs

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

des n intervalles de continuité de f, et du vecteur $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des pentes de f sur ces intervalles, et qu'un couple $(\Lambda, A) \in (\mathbb{R}^{+*})^{2n}$ est associé à un échange d'intervalles si et seulement si $\sum l_i = \sum \alpha_i l_i = 1$.

Considérons la famille d'échanges d'intervalles affines $F_{(\lambda,\beta)}$ définie par

$$l_1 = \frac{1-b}{\lambda}, \quad l_2 = q_\beta - \frac{1-b}{\lambda} \quad \text{et} \quad l_3 = 1 - q_\beta \quad \text{où} \quad q_\beta = \frac{\lambda^{\beta+1}-1}{\lambda^{\beta+2}-1},$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \lambda^{-(\beta+1)}.$$

L'échange d'intervalles affine ainsi défini a pour discontinuités :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = l_1 = \frac{1-b}{\lambda}, \quad a_2 = q_\beta \quad \text{et} \quad a_3 = 1.$$

Ses restrictions aux intervalles de continuités sont :

$$f_1(x) = \lambda x + b,$$
$$f_2(x) = \lambda x + (b - \lambda q_\beta),$$
$$f_3(x) = \lambda^{-(\beta+1)}(x - q_\beta).$$

Lorsque b décrit $[0, 1]$, le nombre de rotation α associé à la première induite de Rauzy de $F_{(\lambda,\beta)}$ décrit S^1.

Fixons λ et prennons $\beta = 1$, la condition pour que la première induction de Rauzy se fasse sur les deux premiers intervalles est que $(*) b \leq q_\beta = \lambda/(\lambda^2+\lambda+1)$ (pour λ proche de 1, q_β est proche de $\frac{2}{3}$), par conséquent nous choisissons α de sorte que le b correspondant vérifie $(*)$. Maintenant la première induite de Rauzy est un homéomorphisme affine par morceaux du cercle avec deux morceaux sur lesquels les pentes sont les inverses l'une de l'autre, d'après l'étude d'Herman, la mesure invariante par cet homéomorphisme n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

On en déduit donc l'existence d'échanges de trois d'intervalles affines exotiques. Pour $n = 4$, nous ne savons pas faire d'autres constructions que celle qui consiste à prendre un échange de trois intervalles exotique et à déplacer l'origine en point de discontinuité de f (comme indiqué dans le paragraphe 5).

La référence principale utilisée par les auteurs pour les deux sections suivantes est [**Led**], les principales notions peuvent aussi être trouvées dans [**Ma**].

7. *Régularité pour des familles particulières (Théorème (C))*

Soit f un échange affine de n intervalles similaire (ses pentes sont des puissances entières d'un même scalaire s).

Notons d'abord que si f est abélien, alors f est conjugué à un échange d'intervalles linéaire g dont le vecteur de translation de g est $(\log s)(k_1, \ldots, k_n)$, où $k_i \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $g^n(x) = x + N_n(x) \log s$, où $N_n(x) \in \mathbb{Z}$ mais comme $g^n(x) \in [0, 1[$, il n'y a qu'un nombre fini de $N_n(x)$ possibles, par conséquent la g-orbite de x est finie donc périodique ; g et par suite f sont totalement périodiques.

Soit f un échange de n intervalles similaire, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, f^p est aussi similaire et on peut écrire $Df^p = \sum_{i=1}^{N} s^{k_i} \mathcal{X}_{I_i}$, où $k_i \in \mathbb{Z}$, I_i sont les intervalles de continuité de f^p

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

et $\mathcal{X}_I$ désigne la fonction indicatrice de I. On suppose que f est conjugué à un échange linéaire g et on note h un homéomorphisme qui conjugue f à g : $h \circ g = f \circ h$.

Supposons que h soit dérivable, sa dérivée h' vérifie :

$$h'(g^p(x)) = Df^p(h(x)) \cdot h'(x), \text{ pour tout } x \in [0, 1[\backslash \mathcal{D}_g^p, \tag{2}$$

en passant au logarithme et en divisant par $\log s$, on obtient :

$$\frac{\log h' \circ g^p}{\log s}(x) = \frac{\log Df^p \circ h}{\log s}(x) + \frac{\log h'}{\log s}(x),$$

et puisque

$$\log Df^p = \log s \left(\sum_{i=1}^{N} k_i \mathcal{X}_{I_i} \right),$$

on a

$$\frac{\log h' \circ g^p}{\log s}(x) = \sum_{i=1}^{N} k_i \mathcal{X}_{I_i} \circ h(x) + \frac{\log h'}{\log s}(x), \quad k_i \in \mathbb{Z}. \tag{$*$}$$

Finalement en posant :

$$W = \exp(2i\pi) \frac{\log h'}{\log s},$$

la condition $(*)$ se traduit par le fait que la fonction W est constante sur l'orbite de tout $x \in [0, 1[\backslash \mathcal{D}_g^\infty$, continue donc si g est sans orbite périodique, elle est constante.

Ainsi l'application $\log h' / \log s$ est à valeurs discrètes, donc si de plus on suppose que h' est continue cette application est de plus continue donc constante, ce qui contredit le fait que h est un homéomorphisme de $[0, 1]$ dans lui-même autre que l'identité.

On en déduit qu'un échange similaire ne peut-être C^1 conjugué à un linéaire sans orbites périodiques.

Dans le cas où h n'est que C^1 par morceaux ($\mathcal{D}_h$ représente les points de discontinuités de h'), le calcul précédent indique que $\log h' / \log s = K + N(x)$ pour tout $x \notin \mathcal{D}_h$, où K est une constante et N est une fonction constante par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi, $h' = C \cdot s^{N(x)}$ et l'égalité (3) s'écrit $s^{N(g^p(x))} = Df^p(h(x)) \cdot s^{N(x)}$, pour tout $x \in [0, 1[\backslash(\mathcal{D}_g^p \cup \mathcal{D}_h)$.

Par des arguments identiques à ceux développés dans la preuve du Théorème A′, nous obtenons que si f n'a pas de liaison autre que la triviale alors h' est continue et nous sommes ramenés au cas précédent.

Part (ii). Maintenant si f quasi-similaire possède une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors par Radon–Nikodym, ceci est équivalent à ce qu'il existe une fonction intégrable (pour la mesure de Lebesgue) ϕ telle que $(1')(\phi \circ f)Df = \phi$, en passant au logarithme, en divisant par $\log s$ et en remplaçant Df par son expression, on en déduit que la fonction

$$W = \exp(2i\pi) \frac{\log \phi}{\log s} \in L^\infty(S^1, \lambda)$$

est une fonction propre associée à la valeur propre $e^{-2\pi i \log r / \log s}$ de l'opérateur unitaire défini sur l'Hilbert $L^2(S^1, \lambda)$ par $V \mapsto V \circ f$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

Maintenant si on suppose que f est faiblement mélangeant et si sa mesure invariante μ est équivalente à le mesure de Lebesgue ($L^2(S^1, \lambda) = L^2(S^1, \mu)$), alors la seule valeur propre 1, et donc r est une puissance entière de s. □

8. *Preuve du Théorème 2*

Soit f un échange d'intervalles affine.

Pour obtenir (1), nous allons montrer que si l'orbite pour f de x_0 est régulière, propre et non périodique alors $S(x)$ converge en x_0 et est constante au voisinage de x_0 (l'ensemble ω-limite de l'orbite de x_0 est de l'un des types suivants une orbite périodique ou un cycle limite hyperbolique ou un Cantor f-invariant).

L'orbite pour f de x_0 étant régulière, propre et non périodique, x_0 est contenu dans un intervalle errant I_0, donc ses itérés $f^p(I_0)$, $p \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux disjoints et ainsi :

Pour tout $x \in I_0$,

$$S(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda(f^p(I_0)) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} Df^p(x_0) \cdot \lambda(I_0) = \lambda(I_0) \sum_{p\in\mathbb{Z}} Df^p(x_0) \leq 1$$

et donc $S(x_0)$ et $S(x)$, pour tout $x \in I_0$ converge.

Par conséquent, il existe un voisinage I_0 de x_0 dans lequel $S(x)$ converge et est constant.

On peut remarquer que si l'orbite de x_0 est périodique alors $S(x_0)$ diverge.

Maintenant, il ne reste plus qu'à conclure : si l'ensemble des points x tels que $S(x)$ diverge est dense alors f ne possède pas d'orbite régulière propre non périodique, donc f n'a pas de point errant et nous sommes dans le (i) du premier théorème d'Arnoux.

Pour obtenir la condition suffisante de (2), on suppose donc que les $Df^p(x)$ sont uniformément bornées en x et $p \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in [0, 1[$, on a $Df^p(x) \leq C$. Remarquons d'abord que puisque $Df^{-p}(f^p(x)) = 1/Df^p(x)$, on a aussi $Df^p(x) \geq 1/C$.

Posons $\varphi(x) := \sup\{Df^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$, φ est positive, bornée ainsi que son inverse (en effet $1/\varphi(x) = \inf\{Df^n(x)\} \geq 1/C$) ; elle vérifie aussi $\varphi(f(x)) \cdot Df(x) = \varphi(x)\ \lambda pp$, et donc définit une mesure μ par $d\mu := \varphi\, d\lambda$ invariante par f, équivalente à la mesure de Lebesgue à densité bornée et d'inverse bornée.

Réciproquement, si la mesure f-invariante est équivalent à la mesure de Lebesgue et à densité φ bornée et d'inverse bornée (i.e. il existe une constante C telle que $1/C \leq \varphi(x) \leq C$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(f^n(x)) \cdot Df^n(x) = \varphi(x)\ \lambda pp$; donc λpp, on a $(1/C)^2 \leq Df^n(x) = \varphi(x)/\varphi(f^n(x)) \leq C^2$, mais puique Df^n est constante par morceaux cette inégalité est vraie pour tout x.

9. *Questions*

- A-t-on un résultat du type conjecture d'Arnold entre échanges affines et échanges linéaires : pour presque tout échange d'intervalles linéaire g, un échange d'intervalles affine proche de g et conjugué à g serait-il C^ω conjugué à g ? (donc abélien et il y aurait exactement une famille à un paramètre d'échanges affines conjugués à g).
- Caractériser les échanges d'intervalles linéaires qui ont des affines exotiques conjugués (pour $n = 3$, tout échange minimal possède des exotiques conjugués).

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press

- Trouver des échanges d'intervalles affines qui sont C^1 et pas C^2-conjugués à des linéaires minimaux.
- Trouver des conditions sur les pentes qui interdisent à un échange d'intervalle affine d'être conjugué à un linéaire minimal (dans nos exemples les logarithmes des pentes ne sont jamais rationnellement indépendants).
- La fonction S est-elle divergente sur presque toute orbite récurrente? (Auquel cas la condition suffisante du théorème 2 serait aussi nécessaire.)

Remerciements. Nous tenons la question de l'existence d'échanges d'intervalles affines minimaux et non abéliens de Gilbert Levitt, nous l'en remercions. Nous remercions aussi Gilbert Hector pour d'utiles discussions et pour avoir permis cette collaboration. Nous remercions aussi le referee pour ses nombreuses suggestions.

REFERENCES

[Ar] P. Arnoux. Echanges d'intervalles et flots sur les surfaces. *Monographie de l'enseignement Mathématique* **29** (1991), 5–38.

[Ba] R. Barreto, *en préparation*.

[CaGu] R. Camelier et C. Gutierrez. Affine interval exchange transformations with wandering intervals. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17**(6) (1997), 1315–1338.

[CLdR] Z. Coelho, A. Lopez et L. F. da Rocha. Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval interval exchange maps. *Proc. Amer. Math. Soc.* **123**(11) (1995), 3533–3542.

[CLR] D. Cooper, D. D. Long et A. W. Reid. Finite foliations and similarity interval exchange maps. *Topology* **36** (1997), 209–227.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poenaru. Travaux de Thurston sur les surfaces. *Séminaire Orsay, Astérisque* **66–67** (1979).

[He] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **49** (1979), 5–234.

[Ke] M. Keane. Interval exchange transformations. *Math Z.* **141** (1975), 25–31.

[Le] G. Levitt. La décomposition dynamique et la différentiabilté des feuilletages de surfaces. *Ann. Inst. Fourier* **37-3** (1987), 85–116.

[Led] F. Ledrapppier. *Systèmes dynamiques (Cours, majeure de mathématiques)*. Ecole Polytechnique, Paris, 1994.

[Ma] R. Mañe. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer, Berlin, 1987.

[Oe] U. Oertel. Affine laminations and their stretch factors. *Pacific J. Math.* **182-2** (1998), 303–328.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000263 Published online by Cambridge University Press