Arabic Sciences and Philosophy, vol. 23 (2013) pp. 221–276
doi:10.1017/S0957423913000015 © 2013 Cambridge University Press

LE COMMENTAIRE D'IBN MUʿĀḌ SUR LE CONCEPT DE RAPPORT

BIJAN VAHABZADEH
Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Sphere, UMR 7219, CNRS, 5 rue Thomas Mann, Bâtiment Condorcet, Case 7093, F-75205 Paris Cedex 13, France
Email: biva@bluewin.ch

À la mémoire d'Hélène Bellosta.

Abstract. The Andalusian mathematician and astronomer Ibn Muʿāḍ al-Jayyānī (11th century) is the author of an important commentary on the concept of ratio, in which he attempts to justify the Euclidean definition of proportionality between magnitudes – the celebrated Definition V.5 – and that of greater ratio. In addition to an analysis of the commentary, we provide a French translation and a critical edition of the original Arabic text. We also attempted to settle some problems linked to the biography of Ibn Muʿāḍ.

Résumé. Le mathématicien et astronome andalou Ibn Muʿāḍ al-Jayyānī (XIe siècle) est l'auteur d'un important commentaire sur le concept de rapport, dans lequel il se propose de justifier la définition euclidienne de la proportionnalité entre grandeurs – la célèbre Définition V.5 – et celle du rapport plus grand. Nous donnons, en plus d'une analyse de ce commentaire, une traduction française et une édition critique du texte original arabe. Nous avons également tenté de faire le point sur certains détails liés à la biographie d'Ibn Muʿāḍ.

I. INTRODUCTION*

Nous ne savons que peu de choses sur la vie d'Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn Muʿāḍ, l'auteur du *Commentaire sur le rapport*; même son nom exact a longtemps été incertain. Il apparaît cependant qu'un retour aux sources manuscrites et bio-bibliographiques permette de débrouiller en partie le dossier. Le MS Ar. 1446, Bibliothèque nationale d'Algérie, qui contient la seule copie connue de ce traité, nous apprend qu'il était cadi et théologien, et qu'on le surnommait *al-Jayyānī*, c'est-à-dire *de Jaén*, ville et province d'Andalousie. Le MS Héb. 1036, Bibliothèque nationale de France,

* Nous voudrions remercier le Professeur Roshdi Rashed, ainsi que les lecteurs anonymes de cet article, pour leurs suggestions et corrections.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

contient la traduction hébraïque de deux traités d'astronomie de notre auteur, dont les originaux arabes ne sont pas connus: un traité sur une éclipse de soleil, et le *Traité sur l'aurore*; l'éclipse en question ayant eu lieu en juillet 1079, on en déduit que notre auteur était actif à cette époque.[1] Le MS Ar. 960, Bibliothèque de l'Escurial, contient un traité de trigonométrique sphérique également attribué à notre auteur, à ceci près qu'il y est surnommé *al-Šaʿbānī*.[2] Il est donc raisonnable de considérer avec L. Richter-Bernburg[3] que notre auteur doit être identifié à un certain Muḥammad Ibn Muʿāḏ al-Šaʿbānī de Jaén, auquel l'historien Ibn Baškuwāl (1101–1183) a consacré une brève notice:

Muḥammad Ibn Ibrāhīm Ibn Muḥammad Ibn Muʿāḏ al-Šaʿbānī, de Jaén, surnommé Abū ʿAbd Allāh. Il a appris la science du hadith d'Abū Bakr [1004–1078], chargé des donations pieuses, d'al-Dilāʾī [1003–1085], et d'autres; c'était quelqu'un de savant et vif d'esprit, d'une intelligence pénétrante, d'un haut rang; il fut nommé cadi à Jaén; il mourut à la fin de l'an quatre cent quatre-vingt-cinq [janvier 1093], libéré de ses fonctions de cadi.[4]

L'historien al-Ḍabbī († 1202–3) lui consacre également une notice, plus brève encore:

[1] D'après la notice du Catalogue des manuscrits hébreux de 1866, qui reprend ici sans changement la notice de S. Munk (MS Héb. 1299), l'auteur de ces traités est "le vézir et cadi Abou-ʿAbd-Allah Moḥammed-Ibn-Moʿâd, de Séville" (H. Zotenberg, S. Munk, Derenbourg et Ad. Franck, *Catalogues des manuscrits hébreux et samaritains de la Bibliothèque impériale* [Paris, 1866], p. 189, n° 1036, 1°). Or l'examen du manuscrit montre que la mention "de Séville" ne s'y trouve pas (voir les fols. 1^{r}, l.1 et 7^{r}, l.3); cette mention semble donc être une inférence de Munk, probablement due au fait qu'Ibn Muʿāḏ se réfère dans son traité sur l'éclipse de soleil à des observations astronomiques faites à Séville même. (Nous voudrions remercier Tony Lévy pour nous avoir fourni ces informations.)

[2] Plus précisément, en plus du titre proprement dit – "*Livre des inconnues des arcs de la sphère* par le cadi Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn Muʿāḏ" – figure la notice suivante, ajoutée semble-t-il de la même main: "Le cadi Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn Muʿāḏ al-Šaʿbānī (que Dieu le Très-Haut le bénisse et soit satisfait de lui) a composé ce livre sur la figure sécante" (voir M.V. Villuendas, *La trigonometría europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Muʿāḏ* El Kitāb maŷhūlāt [Barcelone, 1979], pp. XXXI–XXXII, p. 3 et le fol. 1b du facsimile). Dans son Catalogue des manuscrits de l'Escurial, M. Casiri avait mentionné comme auteur de ce traité "*Abdalla Mohamad Ben Moad Cordubensi*" (*Bibliotheca arabico-hispana escurialensis* [Madrid, 1760], t. I, p. 382). Mais l'examen du manuscrit montre que la mention de l'origine cordouane n'y figure pas; elle n'avait d'ailleurs pas été reprise par les auteurs du nouveau Catalogue (voir H. Derenbourg et H.-P.-J. Renaud, *Les manuscrits arabes de l'Escurial*, t. II, fasc. 3 [Paris, 1941], p. 94); cette mention doit donc être un ajout de Casiri.

[3] Voir son article "Ṣāʿid, the *Toledan Tables*, and Andalusī science," dans D.A. King & G. Saliba (éds.), *From Deferent to Equant: A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E.S. Kennedy* (New York, 1987) pp. 373–401, p. 381.

[4] Ibn Baškuwāl, *Kitāb al-Ṣila*, 2 vols. (Le Caire, 1966), vol. 2, p. 558, n° 1226.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Muḥammad Ibn Ibrāhīm Ibn Muḥammad Ibn Muʿāḍ al-Šaʿbānī. Cadi de Jaén, le Philosophe de son temps. Il mourut en l'an quatre cent quatre-vingt cinq.[5]

Averroès (1126–1198) semble également faire allusion à notre auteur dans un passage de son grand commentaire sur la *Métaphysique*[6] où, après avoir expliqué que certains considèrent l'angle comme un genre de la grandeur distinct de la ligne, de la surface et du solide, il ajoute:

Et j'estime que le mathématicien andalou Ibn Muʿāḍ est l'un de ceux qui affirment cela, malgré la prééminence de cet homme en mathématiques et la position importante qu'il y tient.[7]

Ce qui précède rassemble, semble-t-il, les informations bio-bibliographiques les plus fiables que nous ayons sur notre auteur.[8]

E.B. Plooij avait donné du *Commentaire sur le rapport* une traduction anglaise précise et très fidèle à l'original, avec facsimile du manuscrit en regard; de plus il en avait résumé le contenu et l'avait traduit en notations modernes.[9] Nous avions également présenté une traduction française du Commentaire, une transcription en notation moderne, ainsi qu'une édition critique du texte arabe.[10] Nous nous proposons ici, après une analyse de ce Commentaire, d'en présenter

[5] Al-Ḍabbī, *Buġyat al-multamis fī taʾrīḫ rijāl ahl al-Andalus* (Le Caire-Beyrouth, 1989), p. 81, nº 48.

[6] Il s'agit du commentaire à 1023b22: "l'angle est aussi une partie" (Aristote, *Métaphysique*, traduction et notes par J. Tricot, t. I [Paris, 2000], p. 214).

[7] Averroès, *Tafsir ma baʿd at-tabiʿat*, texte arabe inédit établi par Maurice Bouyges, S.J., vol. II, 2e éd. (Beyrouth, 1967), p. 665. C'est en effet ce qu'affirme notre auteur dans son *Commentaire sur le rapport*, fols. 74v–75r & 81v (voir *infra* la traduction et édition du texte).

[8] Pour plus de détails sur la vie et l'œuvre d'Ibn Muʿāḍ, voir H. Hermelink, "Tabulae Jahen," *Archive for History of Exact Sciences*, 2 (1964): 108–12; Y. Dold-Samplonius & H. Hermelink, "Al-Jayyānī," dans C.C. Gillispie (éd.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7 (New York, 1973), pp. 82–3; B.R. Goldstein, "Ibn Muʿādh's Treatise On Twilight and the Height of the Atmosphere," *Archive for History of Exact Sciences*, 17 (1977): 97–118; Villuendas, *La trigonometría europea en el siglo XI*, pp. XXII–XXXVI; A.M. Smith, "The Latin version of Ibn Muʿādh's treatise 'On Twilight and the Rising of Clouds'," *Arabic Sciences and Philosophy*, 2 (1992): 83–132; E.S. Kennedy, "Ibn Muʿādh on the astrological houses," *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 9 (1994): 153–60; J.P. Hogendijk, "Applied mathematics in eleventh century al-Andalus: Ibn Muʿādh al-Jayyānī and his computation of astrological houses and aspects," *Centaurus*, 47, 2 (2005): 87–114; E. Calvo & J. Casulleras, "Ibn Muʿāḍ al-Ŷayyānī, Muḥammad," dans J. Lirola Delgado (éd.), *Biblioteca de al-Andalus*, vol. 4 (Almería, 2006): 197–201; J. Samsó, *Las Ciencias de los Antiguos en al-Andalus*, 2e éd. avec *addenda* et *corrigenda* de J. Samsó et M. Forcada (Almería, 2011), pp. 137–44, 152–66, 241–4, 484–6, 495.

[9] Voir *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as criticized by Arabian Commentators* (Rotterdam, 1950), pp. 15–47, 62–5 & 68–9. – Rappelons ici que cet ouvrage pionnier, consacré aux commentaires arabes sur la théorie euclidienne des proportions, a été pendant près de cinquante ans la référence sur le sujet.

[10] Voir *Trois commentaires arabes sur les concepts de rapport & de proportionnalité*, thèse de doctorat écrite sous la direction du Professeur Roshdi Rashed, Université Paris 7-Denis Diderot, 1998, vol. 1, pp. 61–84 & 109–12, et vol. 2, pp. 65–89 (thèse inédite).

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

une nouvelle traduction française, suivie d'une édition critique du texte; bien que cette édition diffère peu de la précédente, la traduction française, elle, a été entièrement refondue. Mais nous allons tout d'abord faire quelques rappels indispensables à la compréhension du commentaire d'Ibn Muʿāḏ.

II. APERÇU SUR LE LIVRE V DES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE ET SUR LES PRÉDÉCESSEURS D'IBN MUʿĀḎ

Euclide d'Alexandrie (*c.* 300 av. J.-C.) avait exposé les fondements de la théorie des proportions entre grandeurs dans le Livre V de ses célèbres *Éléments*. La généralité des propositions de ce Livre, qui pouvaient s'appliquer indifféremment aux grandeurs commensurables et incommensurables, permettait de traiter en toute rigueur les questions liées à la mesure des grandeurs géométriques.[11] Cependant, toute la théorie s'appuyait de fait sur les définitions énoncées au début du Livre, dont nous retiendrons en particulier les trois suivantes:

3. Un rapport *est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre. 5. Des grandeurs sont dites* être dans le même rapport, *une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième, quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante. 6. Et que les grandeurs qui ont le même rapport soient dites* en proportion.[12]

On notera, à propos de la Définition V.3, qu'elle caractérisait le concept de rapport d'une manière générale, et que le sens de l'expression "la relation, telle ou telle, selon la taille" était de ce fait sujet à interprétation.

Quant à la Définition V.5, elle constituait la pierre angulaire de toute la théorie, du fait qu'elle s'appliquait à des grandeurs quelconques, commensurables ou incommensurables – contrairement à la

[11] Les différents genres de grandeurs traités dans les *Éléments* sont la ligne, la surface, le solide et l'angle rectiligne.

[12] Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, Traduits du texte de Heiberg, Introduction générale par Maurice Caveing, Traduction et commentaires par Bernard Vitrac, 4 vols. (Paris, 1990–2001), vol. II, pp. 36 & 41. Nous rappelons également la définition connexe du rapport plus grand: "*7. Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première [grandeur] est dite* avoir un plus grand rapport *relativement à la deuxième que celui de la troisième relativement à la quatrième*" (*ibid.*, p. 46).

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Définition VII.21[13] qui, dans le cadre des *Éléments*, ne s'appliquait qu'aux nombres (naturels), mais pouvait sans difficulté être étendue aux grandeurs commensurables. La Définition V.5 posait cependant certains problèmes assez délicats. Tout d'abord, le fait de comparer des multiples de grandeurs ne semblait pas avoir de lien évident avec le concept de proportion. De plus, bien qu'elle avait pour but de définir le fait d'avoir *même rapport*, l'exposé d'Euclide ne permettait pas d'établir un lien entre cette définition et la Définition V.3. Enfin Euclide, selon son habitude, ne donnait aucune indication sur la manière dont la Définition V.5 avait été conçue et établie, ce qui aurait peut-être permis d'en élucider le sens.

Nous ne connaissons aucun commentaire grec sur les Définitions V.5 & V.7;[14] par contre plusieurs commentaires arabes, dont des sections entières sont consacrées à ces Définitions, sont parvenus jusqu'à nous.

Al-ʿAbbās Ibn Saʿīd al-Jawharī (1re moitié du IXe siècle de notre ère) fut le premier, semble-t-il, qui chercha à les justifier. Dans ses *Additions au cinquième Livre de l'ouvrage d'Euclide*, un texte très bref (du moins tel qu'il nous est parvenu), al-Jawharī tentait de démontrer ces Définitions à l'aide de trois propositions: il s'y efforçait en présupposant que si quatre grandeurs sont proportionnelles, la troisième sera plus grande, égale ou plus petite que la quatrième, selon que la première est plus grande, égale ou plus petite que la deuxième; il étendait ensuite cette propriété aux équimultiples des grandeurs données. Ces trois propositions constituaient une tentative très élémentaire et plutôt gauche de démontrer les Définitions euclidiennnes; mais la démarche présentait déjà ce qui sera une caractéristique de toutes les tentatives ultérieures, à savoir, que ces Définitions doivent être considérées comme des propositions convertibles qu'il s'agit de justifier à l'aide d'une preuve.[15]

Après lui, Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn ʿĪsā al-Māhānī (2e moitié du IXe), dans son *Traité sur la difficulté relative à la question du rapport*, se proposa, suivant en cela une directive de Ṯābit Ibn Qurra (826–901), de caractériser l'identité de deux rapports à l'aide d'une procédure connue sous le nom d'"algorithme d'Euclide", et à laquelle

[13] À savoir: *"Des nombres sont en* proportion *quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties*" (*ibid.*, p. 262).

[14] *Ibid.*, pp. 539–43, et B. Vitrac, "La Définition V. 8 des *Eléments* d'Euclide," *Centaurus*, 38 (1996): 97–121, pp. 114–15.

[15] Plus précisément il s'agit, pour chaque Définition, de démontrer que le *definiendum* implique le *definiens*, et *vice versa*. – Pour plus de détails sur ce commentaire, voir G. De Young, "Al-Jawharī's Additions to Book V of Euclid's *Elements*," *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, 11 (1997): 153–78. Voir également A.I. Sabra, "Al-Jawharī," dans Gillispie (éd.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, pp. 79–80.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

certains historiens ont également donné le nom d'"anthyphérèse".[16] Quatre grandeurs auront donc même rapport, si la procédure se déroule de la même manière pour chaque paire de grandeurs: c'est la "définition anthyphérétique de l'identité des rapports". Al-Māhānī introduisit également une définition du rapport plus grand basée sur la même procédure. Il démontra ensuite l'équivalence des définitions anthyphérétiques et des définitions euclidiennes correspondantes.[17]

Après lui, Abū al-ʿAbbās al-Faḍl Ibn Ḥātim al-Nayrīzī (IX^{e}–X^{e}) a également eu recours aux définitions anthyphérétiques dans son commentaire sur les *Éléments* – bien que sa définition du rapport plus grand fût erronée. Contrairement à al-Māhānī, il ne jugea pas opportun de démontrer que ces définitions étaient équivalentes à celles d'Euclide.[18]

Aḥmad Ibn Yūsuf Ibn Ibrāhīm Ibn al-Dāya, qui vécu à la même époque, tenta dans son *Traité sur le rapport et la proportion* de démontrer les Définitions euclidiennes en partant de trois principes, qu'il considérait comme évidents en soi et par conséquent n'ayant pas besoin d'être démontrés: *si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront par inversion;*[19] *si quatre grandeurs sont proportionnelles, la troisième sera plus grande, égale ou plus petite que la quatrième, selon que la première est plus grande, égale ou plus petite que la deuxième; si la première grandeur est à la deuxième comme la troisième à la quatrième, la première sera à un multiple de la deuxième comme la troisième au même multiple de la quatrième.*[20]

[16] Il s'agit de la procédure qui permet de déterminer le PGCD de deux nombres et la plus grande commune mesure de deux grandeurs commensurables (voir les Propositions VII.1–2 et X.3 des *Éléments*).

[17] Voir Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, pp. 50–1 et 61; Dold-Samplonius, "Al-Māhānī," dans C.C. Gillispie (éd.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 9 (New York, 1974), pp. 21–2; B. Vitrac, "'Umar al-Khayyām et l'anthyphérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire *Sur certaines prémisses problématiques du livre d'Euclide*," *Farhang*, vol. 14 (2002): 137–92, III. 3–7 & IV. C.11, pp. 154–7 & p. 174; J.P. Hogendijk, "Anthyphairetic ratio theory in medieval Islamic mathematics," dans Y. Dold-Samplonius, J.W. Dauben, M. Folkerts, B. Van Dalen (éds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Boethius, Band 46 (Stuttgart, 2002), pp. 187–202; B. Vahabzadeh, "Al-Māhānī's Commentary on the concept of ratio," *Arabic Sciences and Philosophy*, 12 (2002): 9–52.

[18] Voir *Codex Leidensis 399, 1., Euclidis Elementa ex Interpretatione al-Hadschdschadschii cum Commentariis Al-Narizii*, éd., tr. latine et notices par G. Junge, J. Raeder et W. Thomson, Part. III Fasc. II (Hauniae, 1932), pp. 6–13 et 16–17; Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, pp. 51–3 et 61; Sabra, "Al-Nayrīzī," dans C.C. Gillispie (éd.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 10 (New York, 1974), pp. 5–7; Hogendijk, "Anthyphairetic ratio theory," pp. 195–7.

[19] Au sens de la Définition V.13 des *Éléments*.

[20] Voir J.E. Murdoch, "The medieval language of proportions: Elements of the interaction with Greek foundations and the development of new mathematical techniques," dans A.C. Crombie (éd.), *Scientific Change* (London, 1963), pp. 252–3; D.V. Schrader, "Aḥmad Ibn Yūsuf," dans C.C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 1 (New York,

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Après lui, Abū ʿAlī al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham († après septembre 1040), dans son *Commentaire des postulats d'Euclide*, un ouvrage consacré aux définitions, postulats et axiomes des *Éléments*, considéra également les Définitions V.5 et V.7 comme des propositions convertibles qu'il s'agissait de démontrer; il y parvint en admettant trois prémisses: *si quatre grandeurs sont proportionnelles, la première sera à une partie*[21] *de la deuxième comme la troisième à une partie de la quatrième; les grandeurs peuvent être divisées en deux indéfiniment; deux grandeurs inégales étant données, il existe un multiple de la plus petite qui surpasse la plus grande*. Sa preuve de la Définition V.5 était basée sur la distinction des cas commensurable et incommensurable; Ibn al-Haytham supposait en particulier que si des grandeurs commensurables sont proportionnelles, elles vérifient une propriété qui, en substance, se ramène à la Définition VII.21 des *Éléments*.[22]

Après eux, Abū al-Fatḥ ʿUmar Ibn Ibrāhīm al-Khayyām (1048–1131) reprit, dans son *Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*, l'approche anthyphérétique de ses prédécesseurs al-Māhānī et al-Nayrīzī. Comme le premier, il démontra que ses définitions étaient équivalentes à celles d'Euclide. De plus, il examina de haut les concepts de rapport et de proportionnalité, et en rechercha les principes d'une manière philosophique; c'est lui qui approfondit les difficultés liées à la notion de nombre irrationnel.[23]

Il est difficile de savoir auxquels de ces commentaires Ibn Muʿāḏ a eu accès. En effet lui-même ne cite aucun nom sauf celui d'un certain Sīndūs, dont nous ne savons rien par ailleurs,[24] et les critiques

1970), pp. 82–3; E. Grant (éd.), *A Source Book in Medieval Science* (Cambridge, Massachusetts, 1974), pp. 149–50.

[21] Il s'agit ici d'une partie au sens général, c'est-à-dire d'une partie aliquote ou aliquante.

[22] Voir Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, pp. 53–4 & 61–2; B. Hooper Sude, *Ibn al-Haitham's Commentary on the Premises of Euclid's* Elements *(Sharḥ muṣādarāt kitāb Uqlīdis fī al-uṣūl) Books I-VI*, thèse de doctorat, Université de Princeton, 1974, vol. 1, pp. 188–204, 209–16, et vol. 2 (texte arabe), pp. 107–20 (thèse inédite).

[23] Voir Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, pp. 54–6 & 62; A.P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)* (Paris, 1976), pp. 84–9 & 130; Vahabzadeh, "Al-Khayyām's conception of ratio and proportionality," *Arabic Sciences and Philosophy*, 7 (1997): 247–63; R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien* (Paris, 1999), pp. 340–83; Vitrac, "'Umar al-Khayyām et Eutocius: Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire *Sur certaines prémisses problématiques du livre d'Euclide*," *Farhang*, vol. 12 (2000): 51–105, et "'Umar al-Khayyām et l'anthyphérèse" (ces deux articles de fond sont disponibles en PDF sur le lien http://publicationslist.org/bernard.vitrac); B. Vahabzadeh, "'Umar al-Khayyām and the concept of irrational number," dans R. Morelon and A. Hasnawi (éds.), *De Zénon d'Elée à Poincaré: Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed* (Louvain-Paris, 2004), pp. 55–63.

[24] Plooij (*Euclid's Conception of Ratio*, p. 68) ne connaissait lui non plus aucun commentateur de ce nom; il ajoute cependant que ce nom évoque lointainement le grec σύνοδος (*synode*).

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

qu'il évoque au début de son traité – absence de lien apparent entre les équimultiples et la notion de proportion, utilisation de prémisses moins évidentes que la chose à démontrer – pourraient s'appliquer indifféremment à tous les commentaires que nous venons d'évoquer. Aussi une certaine prudence s'impose.

L'historien et astronome Ṣāʿid al-Andalusī (1029–1070) mentionne dans ses *Ṭabaqāt* les noms d'al-Jawharī, d'al-Nayrīzī, d'Aḥmad Ibn Yūsuf et d'Ibn al-Haytham; notamment le commentaire sur les *Éléments* d'al-Nayrīzī et le traité *Sur le rapport et la proportion* d'Aḥmad Ibn Yūsuf.[25] Quant au commentaire d'al-Khayyām, il a été achevé en 1077, soit seize ans avant le décès d'Ibn Muʿāḏ; il est donc difficile de dire si ce dernier y avait accès lorsqu'il rédigea son *Commentaire sur le rapport*, n'ayant aucune information sur la date de rédaction de ce traité. Il est donc raisonnable de supposer qu'Ibn Muʿāḏ a dû connaître les commentaires d'al-Jawharī, d'al-Nayrīzī, d'Aḥmad Ibn Yūsuf et d'Ibn al-Haytham; mais il serait plus difficile d'affirmer quelque chose dans le cas d'al-Māhānī et d'al-Khayyām.

Quant aux mathématiciens andalous, Richter-Bernburg avait déjà évoqué une possible allusion, au début du *Commentaire sur le rapport*, au mathématicien et astronome Abū al-Qāsim Aṣbaġ Ibn Muḥammad Ibn al-Samḥ (979–1035).[26] Ce dernier est en effet l'auteur d'un commentaire sur les *Éléments* et d'un ouvrage de géométrie où il traite d'une manière approfondie des lignes droites, circulaires et courbes;[27] or le premier ouvrage ne nous est pas parvenu, et il ne reste du second qu'un fragment d'une traduction hébraïque qui traite uniquement du cylindre et de ses sections planes.[28] On a également évoqué les noms de ʿAbd al-Raḥmān Ibn Sayyid et Yūsuf al-Muʾtaman Ibn Hūd (†1085).[29] Les œuvres du premier sont perdus: il ne nous reste qu'un opuscule du philosophe Ibn Bājja (†1138) consacré aux travaux d'Ibn Sayyid en théorie des coniques.[30] Quant au second, de longs extraits de son *Kitāb al-Istikmāl* ou *Livre du perfectionnement* sont parvenus jusqu'à nous.[31] La partie consacrée au Livre V des

[25] Ṣâʿid al-Andalusî, *Kitâb Ṭabaḳât Al-Umam (Livre des Catégories des Nations)*, Traduction avec Notes et Indices précédée d'une Introduction par Régis Blachère (Paris, 1935), pp. 73, 104, 112–14 et 116.

[26] Voir "Ṣâʿid," p. 382.

[27] Voir F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. V (Leiden, 1974), p. 356, et Ṣâʿid al-Andalusî, *Kitâb Ṭabaḳât Al-Umam*, pp. 130–1.

[28] Voir Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. I (Londres, 1996), pp. 885–6, 891–928 (commentaire mathématique) et 929–73 (traduction française du fragment hébreux par T. Lévy).

[29] Voir par exemple Samsó, *Las Ciencias*, p. 138.

[30] Voir Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, *Œuvres mathématiques, Algèbre et géométrie au XII^e^ siècle*, Texte établi et traduit par Roshdi Rashed, 2 tomes (Paris, 1986), t. I, p. 129; voir également Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. I, pp. 976–8.

[31] Voir J.P. Hogendijk, "Discovery of an 11th-century geometrical compilation: The *Istikmāl* of Yūsuf al-Muʾtaman ibn Hūd, King of Saragossa," *Historia Mathematica*, 13 (1986): 43–52;

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Éléments n'a, à notre connaissance, pas été éditée ou traduite, mais J. P. Hogendijk en a donné une table des matières détaillée: on voit que cette section ne comprend que dix définitions – dont les Définitions V.5 et V.7 – et dix propositions.[32] Ainsi il n'est pas possible, en l'état actuel, d'établir d'une manière positive un quelconque lien entre le Commentaire d'Ibn Muʿāḍ et les traités d'Ibn al-Samḥ, Ibn Sayyid et Ibn Hūd.

III. LE COMMENTAIRE D'IBN MUʿĀḌ

Ibn Muʿāḍ ne semble guère convaincu par la démarche de ses prédécesseurs, et réagit vivement aux critiques émises à l'encontre de l'Auteur des *Éléments*. Il mentionne en particulier la tentative de Sīndūs de démontrer le Postulat des parallèles,[33] la Notion commune I.9[34] et le fait que le diamètre divise le cercle en deux moitiés[35] – tentative qu'il estime tout à fait vaine, du fait que les démonstrations de Sīndūs sont faibles, et qu'elles présupposent plus de choses qu'Euclide avait présupposées. À propos de la Définition V.5, Ibn Muʿāḍ remarque que "beaucoup estiment qu'Euclide est entré dans l'explication du rapport par la mauvaise porte, et qu'il l'a introduit par le mauvais chemin en le définissant à l'aide de certains multiples [. . .]; et ils considèrent qu'il n'y a pas de lien apparent entre le rapport et certains multiples."[36] Il se propose donc, dans son Commentaire, de montrer que la manière dont Euclide aborde la notion de rapport est en réalité très claire.

Ibn Muʿāḍ commence par expliquer que les cinq genres de quantités utilisés en géométrie sont le nombre, la ligne, la surface, l'angle

Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I, pp. 975–1027 et vol. IV (Londres, 2002), pp. 843–99; M. Al-Houjairi, *L'Encyclopédie mathématique d'Ibn Hūd: les commentaires d'Ibn Hūd de Saragosse (XI^e siècle) des Sphériques de Théodose et de Ménélaüs*, thèse de doctorat écrite sous la direction de Roshdi Rashed, Université Paris 7, 2005.

[32] J.P. Hogendijk, "The geometrical parts of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th Century): An analytical table of contents," *Archives internationales d'histoire des sciences*, 41 (1991): 207–81, pp. 230–2.

[33] Demande I.5 (Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*, vol. I, p. 175): "*Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*"

[34] *Ibid.*, p. 179: "*Et deux droites ne contiennent pas une aire.*"

[35] Cf. la Définition I.17 (*ibid.*, p. 163): "*Et un* diamètre *du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.*"

[36] *Commentaire sur le rapport*, fol. 74v. – Les citations du commentaire d'Ibn Muʿāḍ sont tirées de la traduction française ci-dessous (Appendice I); le début d'un folio y est indiqué entre crochets droits [ ].

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

(rectiligne) et le solide, et leur donne le nom générique de *grandeur*.[37] Il rappelle ensuite certaines notions euclidiennes de base, comme la notion de partie, de multiple,[38] de grandeurs commensurables et incommensurables.[39] Il définit ensuite les notions de rapport et de proportion:

> Le *rapport* est la mesure d'une grandeur relativement à une autre grandeur homogène à elle; c'est-à-dire que l'on compare entre elles deux grandeurs afin de connaître la mesure de l'une d'elles relativement à l'autre. La *proportion* est l'égalité des rapports.[40]

Il explique que conformément à l'axiome *le tout est plus grand que la partie*,[41] on ne parle de *parties* d'une grandeur que si elles sont inférieures à la grandeur elle-même.[42] Mais Ibn Muʿāḏ explique qu'il ne tiendra pas compte de cette restriction, et que lorsqu'il prendra des parties d'une grandeur, elles pourront être inférieures, égales ou supérieures à la grandeur elle-même; cette approche lui permettra de comprendre les notions de *partie* et de *multiple* sous celle de *parties*, et donc d'abréger considérablement ses énoncés.

Il définit ensuite la proportion entre grandeurs commensurables:

[37] *Commentaire sur le rapport*, fols. 74^{v}–75^{r}. Cf. la remarque d'Averroès citée en introduction, ainsi que la note 11 ci-dessus.

[38] Cf. les Définitions V.1–2 des *Éléments* (vol. II, p. 35): "*1. Une grandeur est une* partie *d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande. 2. Et* multiple, *la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.*" Rappelons que dans ce contexte, il s'agit toujours d'une mesure exacte, sans reste. – Les énoncés d'Ibn Muʿāḏ ne sont pas des citations proprement dites des définitions du Livre V, mais plutôt des paraphrases; du moins elles ne correspondent à aucune des versions arabes des *Éléments* que nous avons consultées (voir J.W. Engroff, Jr., *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements: *Book V*, thèse de doctorat (inédite), Université de Harvard, 1980, pp. 60 et 165; *Codex Leidensis 399, 1.*, Part. III, Fasc. II, p. 2 *et passim*; et St-Pétersbourg, MS Or. C 2145, fol. 77^{v}).

[39] Cf. la Définition X.1 (vol. III, p. 25): "*Sont dites grandeurs* commensurables *celles qui sont mesurées par la même mesure, et* incommensurables, *celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.*"

[40] *Commentaire sur le rapport*, fol. 75^{r}. Cf. la Définition V.3 (*ibid.*, p. 36): "*Un* rapport *est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre.*" Sur la définition de la proportion – "*Une* proportion *est la similitude des rapports*" –, considérée de nos jours comme une interpolation, voir *ibid.*, p. 47, et B. Vitrac, "La Définition V.8 des *Eléments* d'Euclide," *Centaurus*, 38 (1996): 97–121.

[41] Notion commune I.8 dans le cadre des *Éléments*.

[42] Dans le cas particulier des nombres, qu'Ibn Muʿāḏ considère comme un genre de la grandeur, cela découle directement des Définitions VII.3–4 des *Éléments* (vol. II, p. 251): "*3. Un nombre est* une partie *d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand. 4. Et* des parties, *quand il ne le mesure pas.*" Ainsi l'on dira par exemple que 2 est une partie de 8, à savoir le quart; et que 4 est des parties de 6, à savoir les deux-tiers; mais l'on ne dira pas dans le contexte des *Éléments* que 8 est des parties de 2, ni que 6 est des parties de 4. (C'est d'ailleurs pour les mêmes raisons que l'on a pendant longtemps appelé "impropre" une fraction dont le numérateur était plus grand ou égal au dénominateur.)

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Quant aux grandeurs *proportionnelles*, ce sont celles qui sont telles, qu'il y a dans la première d'entre elles, des parties de la deuxième, comme ce qu'il y a dans la troisième, de ces [mêmes] parties de la quatrième.[43]

Ibn Muʿāḍ reprend ici la définition euclidienne de la proportion entre nombres, en englobant le cas *multiple* et le cas *partie* dans celui de *parties*, conformément à ce qu'il avait annoncé.[44]

Mais cette définition ne s'applique pas si les grandeurs sont incommensurables, la première et la troisième ne pouvant être respectivement égales à des parties de la deuxième et de la quatrième; il s'agit donc de la transformer en une prémisse qui puisse également s'appliquer dans le cas incommensurable: Ibn Muʿāḍ y parviendra en la transformant en un énoncé négatif.[45] Son idée de base sera d'établir un lien entre les Définitions V.3 et VII.21 des *Éléments;* plus précisément, il va interpréter la "relation selon la taille" de la Définition V.3 comme exprimant "combien de parties" du conséquent sont contenues dans l'antécédent. Dans le cas commensurable, on retombe sur la Définition VII.21. Dans le cas incommensurable, bien qu'il ne soit pas possible d'exprimer la taille – ou mesure – de chaque antécédent relativement à son conséquent, il est cependant évident "*qu'il n'est pas possible que le rapport de la première à la deuxième soit comme le rapport de la troisième à la quatrième, et qu'il y ait dans la première, des parties de la deuxième, plus que ce qu'il y a dans la troisième, de <ces> parties de la quatrième; ni moins*."[46] (Ainsi il n'est pas possible que quatre grandeurs *A*, *B*, *C*, *D* soient proportionnelles, et que *A* soit par exemple plus grande que trois quarts de *B*, tandis que *C* plus petite ou égale à trois quarts de *D*; ni que *A* soit plus petite que trois quart de *B*,

[43] *Commentaire sur le rapport*, fol. 75[r-v].

[44] Il est possible qu'Ibn Muʿāḍ ait cherché ici à reprendre dans le cas des grandeurs commensurables le texte même de la définition euclidienne de la proportion entre nombres; en effet sa définition correspond de très près à l'une des versions arabes de la Définition VII.21 (St-Pétersbourg, MS Or. C 2145, fol. 217[r]): "Et les nombres proportionnels sont ceux qui sont tels, qu'il y a dans le premier d'entre eux, du multiple du deuxième, comme ce qu'il y a dans le troisième, du [même] multiple du quatrième; ou qu'il y a dans le premier, des parties du deuxième, comme ce qu'il y a dans le troisième, des [mêmes] parties du quatrième." Cependant ce manuscrit ne correspond en cet endroit à aucun des dix autres utilisés par G. R. De Young dans son édition critique des Livres VII–IX des *Éléments* (voir *The Arithmetic Books of Euclid's* Elements *in the Arabic Tradition: An Edition, Translation, and Commentary*, thèse de doctorat (inédite), Université de Harvard, Cambridge, Massachusetts, 1981, vol. I, partie I, p. 5 et vol. I, partie II, p. 321). Il serait cependant prématuré d'affirmer quoique ce soit à ce propos en l'absence d'une édition critique des différentes versions arabes des *Éléments*, et sans une connaissance précise des versions disponibles en Andalousie à l'époque d'Ibn Muʿāḍ.

[45] Cf. Murdoch, "The medieval langage of proportions," p. 254, n. 4.

[46] *Commentaire sur le rapport*, fol. 75[v]. On remarquera la subtilité de l'énoncé d'Ibn Muʿāḍ, qui reproduit celui de la proportion entre grandeurs commensurables – peut-être même l'énoncé euclidien de la proportion entre nombres auquel il avait accès – en ne changeant *qu'un seul mot*, le mot "comme", en "plus que" ou "moins que".

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

tandis que *C* plus grande ou égale à trois quart de *D*.) C'est d'ailleurs ainsi que l'on procède, dit-il, lorsqu'on doit estimer des rapports entre grandeurs incommensurables: on dira par exemple que la circonférence d'un cercle est plus grande – ou plus petite – que certaines parties du diamètre, et de même dans le cas où l'on veut obtenir des valeurs approchées des racines de nombres non carrés.[47]

Il explique que cette prémisse doit être vraie quelles que soient les parties que l'on prenne des deuxième et troisième grandeurs, et l'énonce sous la forme d'une proposition qui exprime une condition nécessaire que doivent vérifier quatre grandeurs proportionnelles.[48] Ibn Muʿāḏ démontre ensuite que la condition est également suffisante. Il a donc établi une définition de la proportion en terme de *parties* qui s'applique aux grandeurs commensurables et incommensurables, ce en s'appuyant sur une prémisse qu'il considère comme parfaitement évidente.

Il doit donc indiquer maintenant "la raison qui a incité Euclide à définir le rapport à l'aide de certains multiples, [et] à se restreindre à cela."[49] Ibn Muʿāḏ explique que tout ce qui se présente dans le cas des parties se présentera également dans le cas des multiples, et inversement. C'est-à-dire que lorsqu'une grandeur est égale à certaines parties d'une autre grandeur, il existera un certain multiple de la première qui sera égal à un certain multiple de l'autre, et réciproquement; et de même lorsque la première est inférieure – ou supérieure – à certaines parties de l'autre. Cela lui permettra de démontrer que sa définition est en fait équivalente à celle d'Euclide. Et si ce dernier a choisi d'énoncer la définition de la proportion en terme de multiples, c'est parce que la manipulation des parties est beaucoup plus laborieuse que celle des multiples; notamment dans les démonstrations des propositions du Livre V.[50]

Ibn Muʿāḏ termine cette partie de son traité en énonçant la définition des grandeurs proportionnelles à l'aide des équimultiples, mais comme une condition nécessaire et suffisante, contrairement à l'Auteur des *Éléments*.[51]

[47] *Commentaire sur le rapport*, fols. 75^{v}–76^{r}. Ibn Muʿāḏ se réfère ici à une pratique courante qui remonte à l'Antiquité. Archimède, par exemple, démontre dans la troisième proposition de *La mesure du cercle*, que la circonférence du cercle est inférieure aux 3 1/7 et supérieure aux 3 10/71 du diamètre; de plus il remplace, dans le court de sa démonstration, le rapport irrationnel $\sqrt{3}$:1 par les rapports numériques 265:153 et 1351:780. (Voir les *Œuvres d'Archimède*, Tome Premier, *De la sphère et du cylindre*, *La Mesure du cercle*, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, texte établi et traduit par Charles Mugler [Paris, 1970], pp. 135–7 & 140–3.)

[48] *Commentaire sur le rapport*, fol. 76^{r-v}.

[49] *Ibid.*, fol. 77^{r}.

[50] *Ibid.*, fol. 79^{r}.

[51] Il est intéressant de noter à ce propos que sur les dix manuscrits des *Éléments* étudiés par Engroff, un seul, le MS Escurial 907, contient la converse de la Définition V.5 (Engroff, *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements, p. 283). Cette converse suit d'ailleurs la Définition

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Il lui reste à établir la définition du rapport plus grand. Sa démarche est tout à fait parallèle à celle suivie pour établir la définition de l'identité des rapports. Il admet tout d'abord comme une prémisse évidente que:

Lorsque l'on a quatre grandeurs, et qu'il y a dans la première, des parties de la deuxième, plus que ce qu'il y a dans la troisième, de ces parties de la quatrième, la mesure de la première relativement à la deuxième sera plus grande que la mesure de la troisième relativement à la quatrième.[52]

Il démontre ensuite la converse de cette prémisse, explique que les mêmes conditions ont lieu si l'on remplace les parties par les équimultiples, et énonce la définition du rapport plus grand à l'aide des équimultiples, de nouveau comme une condition nécessaire et suffisante.[53]

IV. CONCLUSION

Nous avons vu qu'Ibn Muʿāḍ avait cherché à établir les Définitions V.5 et V.7 des *Éléments* en interprétant la définition euclidienne du rapport à partir de celle des nombres proportionnels, expliquant ainsi les Définitions problématiques en restant autant que possible dans le cadre des *Éléments;* il a ainsi proposé une explication qui serrait d'aussi près que possible le texte des *Éléments* et qui, selon lui, aurait pu être celle qu'Euclide lui-même aurait proposée. En effet pour Ibn Muʿāḍ, la définition qui exprime réellement le concept de proportion est celle en terme de parties; et si Euclide a défini ce concept à l'aide d'équimultiples, ce n'est pas parce qu'il considérait que les

proprement dite (Escurial, MS Ar. 907, fol. 46^{r}; cf. Engroff, *ibid.*, pp. 165 et 169): "*L'on dit à propos des grandeurs qu'elles sont dans un même rapport, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième, quand les équimultiples de la première et de la deuxième, quelques multiples qu'ils soient, ou surpassent simultanément les équimultiples de la deuxième et de la quatrième, quelques multiples qu'ils soient, ou sont simultanément égaux à eux, ou sont simultanément inférieurs à eux, lorsqu'on les compare successivement les uns aux autres.* Et par conversion: *Si les grandeurs sont dans un seul [et] même rapport, [lorsqu'on les compare] successivement, les multiples de la première et de la troisième sont ou <simultanément> supérieurs aux multiples de la deuxième et de la quatrième, ou simultanément inférieurs à eux, ou simultanément égaux à eux.*"

[52] *Ibid.*, fol. 79^{v}.

[53] Dans le manuscrit de l'Escurial, la définition du rapport plus grand est elle aussi suivie de sa converse (Escurial, MS Ar. 907, fol. 46^{r}; cf. Engroff, *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements, pp. 165, 169 et 285): "*Et quand ces équimultiples sont tels, que d'une part le multiple de la première d'entre elles surpasse le multiple du deuxième, et que d'autre part le multiple de la troisième ne surpasse pas le multiple de la quatrième, le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième.* Et par conversion: *Lorsque le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième, ces équimultiples sont tels, que d'une part le multiple de la première d'entre elles surpasse le multiple de la deuxième, et d'autre part le multiple de la troisième ne surpasse pas le multiple de la quatrième.*"

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

équimultiples permettaient d'exprimer l'*essence* du concept de proportion, mais parce qu'ils en facilitaient l'*application*. Cependant Ibn Muʿāḏ considère, comme la plupart de ses prédécesseurs, les Définitions V.5 et V.7 comme des propositions convertibles qu'il s'agit de démontrer, en quoi il s'écarte de l'exposé euclidien.[54]

Nous avons déjà vu qu'il était difficile de savoir avec certitude à quels commentaires Ibn Muʿāḏ avait eu accès, ni *a fortiori* ceux qui auraient pu l'influencer dans sa démarche. Nous ne sommes guère mieux informés sur l'influence qu'Ibn Muʿāḏ aurait pu exercer sur ses successeurs, ne connaissant aucun traité où le *Commentaire sur le rapport* soit mentionné explicitement. Rappelons seulement que J.E. Murdoch avait déjà signalé la similitude entre ce Commentaire et les remarques qu'Isaac Barrow (1630–1677) avait consacré à la Définition V.5 dans ses *Lectiones mathematicæ*.[55] De fait Barrow explique que l'on pourrait définir la proportion des grandeurs commensurables comme Euclide l'avait fait pour les nombres; que dans le cas général on pourrait tout aussi bien substituer aux équimultiples des parties aliquotes semblables; et que l'on pourrait combiner les équimultiples et les parties semblables dans une même définition. Mais, ajoute Barrow, le calcul des entiers étant plus aisé et plus expéditif que celui des fractions, Euclide a délibérément choisi les équimultiples plutôt que les parties semblables.[56]

Nous avions également signalé les similitudes entre l'approche d'Ibn Muʿāḏ et celle du mathématicien Nicolas Saunderson (1682–1739).[57] Comme Ibn Muʿāḏ avant lui, Saunderson part d'une propriété que quatre grandeurs proportionnelles doivent nécessairement vérifier, et dans laquelle les antécédents sont comparés à des parties des conséquents; démontre que la converse de cette propriété est également vraie; que sa définition est équivalente à la Définition V.5 des *Éléments*; et procède de même dans le cas du rapport plus grand. Il affirme lui aussi qu'Euclide a substitué les équimultiples aux parties semblables du fait que l'usage des nombres entiers est plus naturel et plus élégant que celui des fractions.[58]

[54] Peut-être "involontairement", puisque nous venons de voir que l'une au moins des versions arabes des *Éléments* contenait la converse de ces Définitions.

[55] Murdoch, "The medieval language of proportions," pp. 254–5.

[56] I. Barrow, *The Usefulness of Mathematical Learning Explained and Demonstrated: Being Mathematical Lectures Read in the Publick Schools at the University of Cambridge* (Londres, 1734) (nouvelle impression 1970), Lecture XXI, pp. 389–90.

[57] Voir "Two commentaries on Euclid's definition of proportional magnitudes," *Arabic Sciences and Philosophy*, 4 (1994): 181–98, pp. 192–8.

[58] N. Saunderson, *Élémens d'Algèbre*, traduits de l'anglais et augmentés de quelques remarques par M. de Joncourt, 2 vols. (Amsterdam-Leipzig, 1756), vol. 2, art. 262–3, pp. 77–84.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Il se pourrait donc que Barrow et Saunderson – tous deux titulaires de la Chaire de mathématiques à l'Université de Cambridge – aient directement ou indirectement eu connaissance du contenu du commentaire d'Ibn Muʿāḍ, peut-être *via* une traduction latine;[59] mais il s'agit là d'une simple conjecture qui, pour être confirmée, demanderait une recherche qui dépasserait le cadre de cet article.

APPENDICE I: TRADUCTION[60]

[74^{r}]

COMMENTAIRE SUR LE RAPPORT D'APRÈS LE PROPOS DU CADI ABŪ ʿABD ALLĀH MUḤAMMAD IBN MUʿĀḌ AL-JAYYĀNĪ

(Que Dieu le Très-Haut lui fasse miséricorde)

[74^{v}]

Au nom de Dieu, le Clément, le Miséricordieux
Que Dieu bénisse notre seigneur Muḥammad

Le cadi Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn Muʿāḍ al-Jayyānī (que Dieu soit satisfait de lui) a dit: Nous voulons éclaircir ce qui, dans le cinquième Livre de l'ouvrage d'Euclide, pourrait poser un problème à celui qui ne s'y est pas exercé l'esprit; même si je crois fermement que le propos et les desseins et les objectifs d'Euclide sont plus clairs et plus évidents (pour celui qui les examine d'un œil véritable et se laisse conduire par la bride de la justice) que les nombreuses sections par lesquelles certains ont tenté de l'éclaircir et par lesquelles ils ont voulu l'élucider: à l'exception des choses qu'il a omises, car son propos et l'agencement de son ouvrage ont le pouvoir de les faire saisir et de les actualiser.

Quant à ce qu'il a traité et que certains ont estimé n'être pas achevé ou pas clair, ils l'ont achevé ou l'ont éclairci à leurs yeux;

[59] Rappelons que deux ouvrages d'Ibn Muʿāḍ, le *Traité sur l'aurore* et les *Tables de Jaén*, nous sont parvenus dans des traductions latines attribuées à Gérard de Crémone (voir M. Smith, "The Latin version of Ibn Muʿādh's Treatise," p. 84, et Hermelink, "Tabulae Jahen," p. 108).

[60] Cette traduction a été faite d'après l'édition du texte arabe incluse dans l'Appendice II ci-après; contrairement à la démarche adoptée dans notre thèse, nous avons cherché ici à traduire le texte d'une manière aussi littérale que possible. Les crochets <> comprennent des mots que nous avons ajoutés au texte du MS, et que nous considérons comme des omissions du copiste; les crochets droits [ ] comprennent soit l'indication du début d'un folio, soit une explication destinée à faciliter la compréhension du texte. Les figures, qui sont absentes du texte, ont été reconstituées en essayant de les représenter à l'échelle. – Dans l'ensemble, notre traduction diffère peu de celle de Plooij; par exemple, il traduit le mot arabe *muqaddima* par "préambule" ou "introduction" [*Euclid's Conception of Ratio*, pp. 20, 24 & 36], alors que nous le traduisons par "prémisse"; de même il traduit *qaḍiyya* par "théorème" et "phrase" [pp. 22 & 38], alors que nous avons préféré "proposition".

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

car leur propos sur cela est plus propre à être éclairci et a plus besoin d'être démontré que l'ouvrage d'Euclide. Comme ce que nous avons vu dans l'ouvrage attribué à Sīndūs; en effet quiconque regardera attentivement sa démonstration de ce qu'Euclide avait avancé sans démonstration – comme quand il dit: *lorsque l'on mène deux lignes droites selon des angles inférieurs à deux droits, elles se rencontreront nécessairement;* et *le diamètre divise le cercle en deux moitiés*; et *deux lignes droites ne comprennent pas une surface* – y verra clairement de la faiblesse et de la débilité, et le besoin d'admettre plus de choses qu'Euclide avait demandé d'admettre.

Mais peut-être que quelqu'un dira: Si le propos d'Euclide dans son ouvrage est tel que tu le mentionnes, et que personne ne l'a éclairci par quelque chose de plus évident que ce qu'il a avancé, comment veux-tu éclaircir son propos dans le cinquième Livre et révéler ce qui y est abstrus? Nous disons donc: Nous n'avons avancé cet ouvrage que pour montrer que le propos d'Euclide dans ce Livre est vrai, et que sa démarche est évidente; car beaucoup estiment qu'Euclide est entré dans l'explication du rapport par la mauvaise porte, et qu'il l'a introduit par le mauvais chemin en le définissant à l'aide de certains multiples, et en s'abstenant de le définir à l'aide de son essence, celle qui est comprise à partir de l'idée de rapport; et ils considèrent qu'il n'y a pas de lien apparent entre le rapport et certains multiples. Mais par ma vie! rien n'est lié d'une manière plus forte au rapport que certains multiples de la grandeur rapportée et de celle à laquelle elle est rapportée.

Dans l'ensemble je dis: Le cinquième Livre est abstrus et son étude difficile, mais la recherche doit être à la mesure de la sublimité de la chose recherchée: *Que celui qui épouse la Belle apporte sa dot!*[61] Car l'ouvrage à partir de là est comme les âmes, et ce qui précède comme les corps. Nous dirons sur ce sujet des choses en espérant que Dieu les rendra utiles à celui qui les lira, et qu'elles aideront à dénouer ce qu'il [*i.e.* le cinquième Livre] a d'inextricable. À Lui le Très-Haut, le seul à dispenser la grâce, je présente ma soumission pour réussir avec droiture et être préservé de l'erreur et de la suffisance. Il est le Tout-Puissant; il n'y a aucun dieu sauf Lui.

Je dis (mais le succès est avec Dieu): Les choses tombant sous la quantité utilisées dans l'art de la géométrie sont [au nombre de] cinq: le nombre [75^{r}] (la première et la plus simple d'entre elles), la ligne, la surface, l'angle et le solide. Posons que le nom d'ensemble de ces choses, qui sera pour elles comme le genre tombant sur elles,

[61] Selon la coutume musulmane, où c'est l'homme qui apporte la dot en se mariant.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

est la *grandeur*;[62] et lorsque les grandeurs sont d'un même genre d'entre ces cinq genres, qu'elles soient appelées *homogènes*. Et ce sont celles qui sont telles, qu'il est possible en multipliant continuellement la plus petite d'entre elles, qu'elle atteigne la plus grande ou qu'elle l'excède; et qu'il est aussi possible en divisant continuellement la plus grande, qu'elle soit égale à la plus petite ou inférieure à elle.

Lorsque l'on a deux grandeurs homogènes et que la petite mesure la grande, on dit que la petite est une *partie* de la grande; et l'on dit que la grande est un *multiple*, et l'on dit aussi qu'elle est *homonyme* de cette partie. Lorsque la plus petite de deux grandeurs homogènes mesure la plus grande d'entre elles, ou qu'il existe une troisième grandeur du même genre qui mesure chacune d'elles, on dit qu'elles sont *commensurables*; et lorsque la plus petite ne mesure pas la plus grande, et qu'il n'existe pas une troisième grandeur qui les mesure, on dit qu'elles sont *incommensurables*.

Le *rapport* est la mesure d'une grandeur relativement à une autre grandeur homogène à elle; c'est-à-dire que l'on compare entre elles deux grandeurs afin de connaître la mesure de l'une d'elles relativement à l'autre. La *proportion* est l'égalité [sic] des rapports. Quand on rapporte une grandeur à une autre grandeur, on appelle la grandeur à laquelle on rapporte *conséquent*, et la grandeur que l'on rapporte *antécédent*; et l'on appelle chacun de l'antécédent et du conséquent le *conjoint* de l'autre.

Le tout est plus grand que la partie. Et de même l'usage et l'habitude veulent que la partie soit plus petite que le tout, et que l'on ne prenne du tout que des parties qui n'atteignent pas le tout; donc lorsqu'elle excède le tout, elle est appelée *plus grande* que lui ou *son multiple*, et on lui retire le nom de la partition. Mais nous admettrons dans cet ouvrage à nous que lorsque nous prendrons des parties d'une certaine grandeur, nous ne nous soucierons pas du fait que ces parties atteignent cette grandeur de laquelle on les a prises, ou qu'elles sont inférieures à elle, ou qu'elles la dépassent. Car cela évitera le besoin de se répéter et de rallonger le discours dans ce que nous voulons éclaircir après (si Dieu le veut); et du fait que cela ne nuit en rien à la démonstration, et n'est pas contraire ni opposé à un principe établi. Nous faisons cela uniquement pour rendre le discours plus aisé et plus concis, en nous évitant de devoir connaître à chaque endroit quelle grandeur est la plus grande avant d'en prendre des parties.

Si les deux grandeurs sont commensurables, il y aura dans l'une d'elles des parties achevées de l'autre qui l'épuiseront. Car lorsque l'on extrait la troisième grandeur qui les mesure, la troisième sera une partie de chacune d'elles; donc lorsque tu divises l'une des deux

[62] En d'autres termes: *Donnons à l'ensemble de ces choses le nom générique de* grandeur.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

grandeurs par cette troisième grandeur, elle la mesurera et l'épuisera par la mesure; donc celle des deux qui a été mesurée sera des parties de l'autre. Et lorsque les deux grandeurs sont incommensurables, il n'y aura dans aucune d'elles des parties achevées de son conjoint.

Quant aux grandeurs *proportionnelles*, ce sont celles qui sont telles, qu'il y a dans la première d'entre elles, des parties de la deuxième, comme ce qu'il y a dans la troisième, de ces [mêmes] parties de la quatrième. Ceci est évident et manifeste et n'a pas besoin d'une démonstration; et c'est ainsi qu'Euclide utilise [75^{v}] ceci dans le septième Livre.[63] Sauf que ceci n'aboutit pas à moins que la première grandeur soit commensurable à la deuxième, et que la troisième soit commensurable à la quatrième, de sorte qu'il y ait dans chacune des parties achevées de son conjoint.

Mais lorsque les deux conjoints sont incommensurables, et qu'il n'est pas possible d'exprimer la mesure de chaque antécédent relativement à son conséquent et d'en extraire la partie et de l'énoncer par les parties, il est évident, même si cette manière reconnue, je veux dire le fait d'exprimer les parties, fait défaut et a été retirée, et que les parties des conséquents n'épuisent pas chacun des deux antécédents d'une manière parfaite et achevée sans qu'il en reste un excès; il est évident, dis-je, *qu'il n'est pas possible que le rapport de la première à la deuxième soit comme le rapport de la troisième à la quatrième, et qu'il y ait dans la première, des parties de la deuxième, plus que ce qu'il y a dans la troisième, de <ces> parties de la quatrième; ni moins*. Et ceci est une chose qui n'a pas besoin d'une démonstration pour que l'intelligence l'accepte immédiatement. Car lorsqu'il y a dans une grandeur, des parties d'une deuxième grandeur, plus que ce qu'il y a dans une troisième grandeur, de ces parties de la quatrième grandeur, la mesure de la première relativement à la deuxième ne sera pas comme la mesure de la troisième relativement à la quatrième. Ceci est une chose manifeste et qui ne deviendra pas plus claire en multipliant le propos à son sujet. Et de même les choses qui sont claires et évidentes à l'intelligence sans avoir besoin d'une démonstration, et qui ne deviendront pas plus claires en multipliant les éclaircissements à leur sujet; car il n'y a aucun moyen d'éclaircir ce qui y est évident.

Et l'on ne porte pas préjudice à cette prémisse du fait que l'on n'y énonce pas des parties qui coïncident avec chacun des deux antécédents, mais seulement le moins et le plus, quoique le moins d'une chose ne soit pas défini et de même le plus, et que seul ce qui est égal soit défini; car nous pourrions trouver beaucoup d'exemples de cela dans cet art. Notamment la circonférence du cercle: lorsque

[63] Littéralement: *dans le septième discours*.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

nous voulons connaître son montant et sa mesure relativement au diamètre, nous le connaissons par le moins et le plus, dès lors que la similitude et l'égalité y font défaut: en effet une égalité entre une ligne circulaire et une ligne droite n'a jamais lieu, car elles ne sont pas d'une même espèce. Et de même l'incommensurabilité et la commensurabilité dans les grandeurs, comme si elles n'étaient pas d'une même espèce.[64] Il est en effet impossible d'énoncer dans le cas des incommensurables des parties, ni dans le cas de la circonférence et du diamètre une certaine mesure propre qui ait un certain nom. L'on dit seulement dans le cas de la circonférence, *qu'elle est plus grande que les côtés de chaque figure inscrite dans le cercle, et plus petite que les côtés de chaque figure circonscrite au cercle*. De même nous disons: Lorsque nous rapportons une certaine grandeur à une grandeur incommensurable avec elle, et que nous devons pour une certaine raison l'exprimer[65] ou l'approcher d'un rapport exprimable, nous disons *qu'elle est plus grande que telles et telles de ses parties*,[66] *et plus petite que telles et telles de ses parties*. Et de même si nous devons évaluer des racines sourdes à l'aide de parties, nous disons *que la racine d'un nombre donné non carré est plus grande que la racine de chaque carré plus petit que le nombre donné, et plus petite que la racine de chaque carré plus grand que le nombre donné*. Et le fait qu'on ne l'énonce pas[67] et que c'est impossible, ne nuit pas à ce que l'on vise en faisant cela, et ne [76^{r}] viole ni ne change un principe vrai.

Dès lors que ce que nous avons mentionné sur cela est vrai, nous ne ferons que l'étendre et le fonder et l'affirmer abstraitement, afin que ce soit un fondement sur lequel on puisse se baser dans ce qui va suivre (si Dieu le veut), à savoir: *Lorsque le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la troisième à la quatrième, il n'est pas possible qu'il y ait dans la première, de n'importe quelles parties de la deuxième, quoique ce soit de plus que ce qu'il y a dans la troisième, de ces parties prises de la quatrième; ni moins*. Et l'on ne doit pas méconnaître notre énoncé *de n'importe quelles parties de la deuxième, quoique ce soit*. En effet lorsqu'une différence a lieu entre les noms des parties de la deuxième qu'il y a dans la première, et entre les noms des parties de la quatrième qu'il y a dans la troisième, l'altérité a lieu dans les deux rapports et leur égalité est retirée, sans considérer quelles sont les parties avec lesquelles cela a lieu. Nous voulons en cet endroit une explication, et nous allons

[64] Nous pensons qu'Ibn Muʿāḍ fait ici allusion à des lignes droites qui, en tant que telles, sont de même espèce même si elles sont incommensurables. Ce n'est pas l'avis de Plooij, qui propose de remplacer le mot *ka* ("comme") par le mot *li* ("car"), probablement par analogie avec la fin de la phrase précédente (*Euclid's Conception of Ratio*, pp. 20 & 67).

[65] *i.e.* le rapport des deux grandeurs.

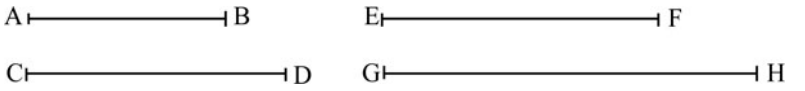
[66] *i.e.* des parties de l'autre grandeur.

[67] *i.e.* le rapport.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

l'exemplifier par des exemples d'entre les cas individuels; car il y a en cela une aide que personne ne rejettera, même si nous l'avions suffisamment établi par un propos général qui recouvrait tous les cas individuels; néanmoins nous voudrions rendre cela plus clair.

Nous disons donc: Lorsque quelqu'un pose que le rapport de la grandeur *AB* relativement à *CD* est comme le rapport de *EF* relativement à *GH*, ce que l'on en dira lorsque *AB* et *CD* sont commensurables est clair, à savoir, *qu'il y a dans* AB, *des parties de* CD, *comme ce qu'il y a dans* EF, *de ces parties de* GH. Mais si elles sont incommensurables, alors, même si le fait d'énoncer ce qu'il y a dans *AB*, des parties de *CD*, nous fait défaut, il n'est pas permis à celui qui pose que ces grandeurs sont proportionnelles, de dire par exemple *que* AB *est plus grande que deux tiers de* CD, *et que* EF *est plus petite que deux tiers de* GH, *ou [égale à] ses deux tiers; ni de dire que* AB *est deux tiers de* CD, *et* EF *plus grande que deux tiers de* GH, *ou plus petite; ni de dire que* AB *est plus petite que deux tiers de* CD, *et* EF *plus grande que deux tiers de* GH, *ou [égale à] ses deux tiers*. Ceci est l'absurdité même.



Et de même lorsque nous envisageons le reste des parties et que nous les examinons, ce qui était impossible dans le cas des parties que nous avons nommées sera de la même manière impossible dans le cas des autres, même si les parties sont extrêmement petites. En effet si quelqu'un prétend que ces grandeurs sont proportionnelles, et dit par exemple *que* AB *est plus grande que trois cent soixante-sept dix-millièmes de* CD, *et que* EF *est plus petite que ces parties définies de* GH, *ou comme elles*, il n'y aura pas de différence entre ceci et entre ce qui a précédé.

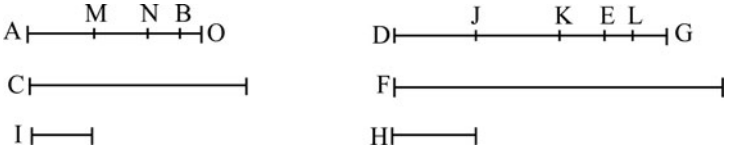
Nous avons présenté ceci, même si notre propos pouvait s'en passer, uniquement pour montrer que la proposition est universelle, de sorte que la condition a lieu dans toutes les parties, petites et grandes, sans individualiser certaines parties plutôt que d'autres; c'est-à-dire: *Lorsque les grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la deuxième comme le rapport de la troisième à la quatrième, il est impossible que l'on prenne de la deuxième et de la quatrième des parties égales en nombre et en dénomination, quelles que soient les parties, et que les parties de la deuxième soient supérieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient supérieures à la troisième grandeur [76^{v}]; ou que les parties de la deuxième soient égales à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient égales à la troisième grandeur; ou que les parties de la deuxième soient inférieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient inférieures à la troisième grandeur*. Car si les parties de la deuxième étaient supérieures à la

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

première tandis que les parties de la quatrième sont égales à la troisième ou plus petites, il y aurait dans la première, des parties de la deuxième, moins que ce qu'il y a dans la troisième, des parties de la quatrième; et nous avons déjà montré que ceci est impossible. De même si les parties de la deuxième étaient égales à la première grandeur tandis que les parties de la quatrième sont inférieures ou supérieures à la troisième grandeur, il y aurait dans la première, des parties de la deuxième, moins ou plus que ce qu'il y a dans la troisième, des parties de la quatrième. De même si les parties de la deuxième étaient inférieures à la première grandeur tandis que les parties de la quatrième sont égales à la troisième grandeur ou supérieures à elle, il y aurait dans la première, des parties de la deuxième, plus que ce qu'il y a dans la troisième, des parties de la quatrième. Et tout ceci est absurde.

Il nous reste à savoir si cette prémisse se convertit par conversion simple[68] ou non. Nous disons donc qu'elle se convertit; c'est-à-dire que nous disons: *Lorsque l'on a quatre grandeurs, et que toutes les parties égales en nombre et en noms que l'on prend de la deuxième et de la quatrième sont telles, que les parties de la deuxième ne sont pas supérieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient supérieures à la troisième grandeur, et que les parties de la deuxième ne sont pas égales à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient égales à la troisième grandeur, et que les parties de la deuxième ne sont pas inférieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient inférieures à la troisième grandeur; alors le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la troisième à la quatrième.*

Exemple. Nous posons quatre grandeurs *AB*, *C*, *DE* et *F*, et nous supposons que toutes les parties égales de *C* et de *F* sont telles, que les parties de *C* ne sont pas plus grandes que *AB* sans que les parties de *F* soient plus grandes que *DE*, et que les parties de *C* ne sont pas égales à *AB* sans que les parties de *F* soient égales à *DE*, et que les parties de *C* ne sont pas inférieures à *AB* sans que les parties de *F* soient inférieures à *DE*; je dis alors que le rapport de *AB* à *C* est comme le rapport de *DE* à *F*.



[68] Littéralement: *sur elle-même*. Nous avons suivi ici la traduction de A.-M. Goichon, *Lexique de la langue philosophique d'Ibn Sīnā (Avicenne)* (Paris, 1938), p. 236.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Ce n'est pas possible autrement. Car sinon, que le rapport de *AB* à *C* soit comme le rapport de *DG* à *F*; <et supposons que *DG* est plus grande que *DE*.> Si donc elle [*i.e.* *GE*] est plus petite que *F*, nous partageons *F* en prenant une partie puis une autre: nous commençons par la moitié, ensuite par le tiers, puis par ce qui suit dans la partition, jusqu'à ce que l'on arrive à la première partie de *F* qui soit plus petite que *GE*; et nous posons que cette partie est *H*: elle est donc plus petite que *GE*. Et nous prenons cette même partie de *C*, soit *I*. Ensuite nous séparons de *DE* des [grandeurs] égales à *H*, en commençant la séparation du côté de *D*, jusqu'à ce que l'on arrive à la première séparation qui dépasse *E* mais qui n'arrive pas à *G*, car *GE* est plus grande que *H*; et que ces séparations soient *DJ*, *JK*, <*KL*>. Ensuite nous séparons de *AB* des [grandeurs] égales à *I*. Il y aura donc dans elle [*i.e.* dans *AB*], des [grandeurs] égales à *I*, comme ce qu'il y a dans *DE*, des [grandeurs] égales à *H*; et dans cet exemple on ira au-delà de *B* en excédant *AB*, comme *DL* excédait *DE*; car nous avions supposé que les grandeurs [77^{r}] *AB*, *C*, *DE* et *F* étaient ainsi; et que ces divisions soient *AM*, *MN*, *NO*. Donc *AO* est des parties de *C*, et *DL* ces mêmes parties de *F* et selon leur multitude. Mais *AO* est plus grande que *AB*, et *DL* est plus petite que *DG*; donc ce qu'il y a dans *AB*, des parties de *C*, est moindre que ce qu'il y a dans *DG*, des parties de *F*. Mais le rapport de *AB* à *C* est comme le rapport de *DG* à *F*. Ceci est absurde et impossible. Donc le rapport de *AB* à *C* n'est pas comme le rapport d'une [grandeur] plus grande que *DE* à *F*. On démontrerait de la même manière qu'il n'est pas non plus comme le rapport d'une [grandeur] plus petite que *DE* à *F*. Donc le rapport de *AB* à *C* ne peut être que comme le rapport de *DE* à *F*. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

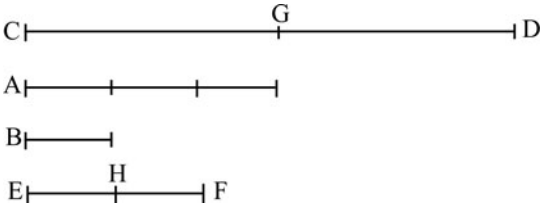
Et dès lors que ce que nous avons présenté et examiné de près est clair, le sens de la proportion est devenu évident pour nous et dans le cas des grandeurs commensurables dont il est possible d'exprimer les parties selon la vérité de leur montant, et dans le cas des grandeurs incommensurables même si l'on ne parvient pas à exprimer la vérité de leurs parties; donc ce que nous avons mentionné suffira (si Dieu le Très-Haut le veut). Disons donc quel est notre but dans cet ouvrage: c'est la raison qui a incité Euclide à définir le rapport à l'aide de certains multiples, à se restreindre à cela sans compléter les accidents du rapport et ses caractères adjoints, comment on l'augmente et on le diminue, à se détourner de tout cela, et à se contenter de certains multiples.

Je dis donc (mais c'est Dieu qui fait réussir avec justesse): La proportion étant conforme à ce que nous avons mentionné quant à la considération des parties et leurs comparaisons, chaque chose qui survient en fait d'excès, de défaut ou d'égalité dans les parties que l'on prend, surviendra de même dans les multiples; et tout ce qui est

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

impossible dans les parties sera impossible dans les multiples. Car la multiplication et la partition appartiennent à un même chapitre; car les deux partent d'une unité, sauf que la multiplication part d'elle en allant vers la multiplicité et l'augmentation, tandis que la partition part d'elle en revenant à la réduction et la diminution; et toutes les deux sont soumises à une même loi. Ne vois-tu pas que lorsque l'on a deux grandeurs, et qu'il est possible de trouver des parties de l'une qui sont égales à certaines parties de l'autre, il sera possible de prendre un certain multiple de l'une qui est égal à un certain multiple de l'autre, ce dans le cas où les deux grandeurs sont commensurables; et lorsqu'il est absolument impossible de trouver des parties de l'une qui soient égales à des parties de l'autre, il sera impossible qu'un certain multiple de l'une soit égal à un certain multiple de l'autre, ce dans le cas où les deux grandeurs sont incommensurables. De même lorsqu'on trouve une troisième grandeur plus petite que les deux grandeurs différentes qui mesure chacune des deux et en est une partie, on trouvera de même un multiple des deux qui l'est de chacune des deux.

Et nous allons rendre plus claire la similitude entre les états des multiples et les états des parties; mais je présente avant <une chose dont> on aura besoin. *Exemple*. *A* est un certain multiple de *B*, et l'on a pris de *A* et de *B* des équimultiples, soit *CD* et *EF*; je dis alors [77ᵛ] que le multiple que *CD* est de *EF*, le même multiple *A* l'est de *B*[69].



Démonstration. Nous divisons *CD* par le nombre du multiple de *A*, soit *CG* et *GD*; et nous divisons *EF* par le nombre du multiple de *B*, soit *EH*, *HF*. Donc *CG* est égale à *A*, et *EH* est égale à *B*; et de même *GD* est égale à *A*, et *HF* est égale à *B*. Donc le multiple que *A* est de *B*, le même multiple *CG* l'est de *EH*, et le même multiple *GD* l'est de *HF*. Donc le multiple que le tout *CD* est de *EF*, le même multiple *A* l'est de *B*. La démonstration est achevée.

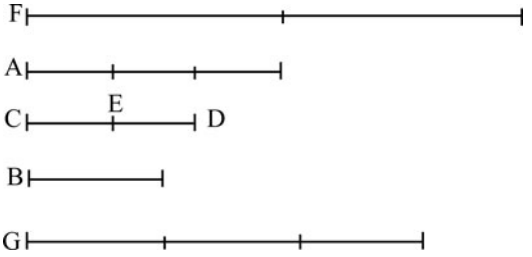
Nous disons donc: *Lorsqu'on a deux grandeurs différentes, et qu'on prend de l'une d'elles des parties et qu'on compare ces parties à l'autre grandeur, leur état quant à l'excès, au défaut et à l'égalité est comme l'état du multiple pris de la grandeur partagée avec le multiple pris*

[69] Littéralement: *je dis alors qu'il y a dans* CD, *du multiple de* EF, *comme ce qu'il y a dans* A, *du multiple de* B. Nous n'avons cependant pas maintenu une traduction littérale qui aurait été dans la suite problématique et difficile à saisir.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

de l'autre grandeur: si le multiple de la grandeur partagée est comme le nombre des parties, et de même le multiple de l'autre grandeur comme le nombre qui dénomme les parties.

Exemple. Les deux grandeurs *A*, *B* sont différentes. On a pris de *A* un [certain] nombre de parties, soit *CD*, l'une de ces parties étant *CE*; et l'on a pris de la grandeur *A* un multiple qui est comme le nombre de [grandeurs] *CE* contenu[es] dans *CD*, soit *F*; et l'on a pris de *B* un multiple qui est comme le multiple que *A* est de la partie *CE*, soit *G*. Je dis alors que l'état de *CD* avec *B* quant à l'égalité, à l'excès ou au défaut est l'état de *F* avec *G* (donc *F* qui est le multiple de *A* est similaire quant à l'état à *CD* qui est les parties de *A*, et *G* est similaire quant à l'état à *B* dont il est le multiple): si *CD* est égale à *B*, *F* sera égale à *G*; si *CD* est plus grande que *B*, *F* sera plus grande que *G*; et si *CD* est plus petite que *B*, *F* sera plus petite que G.



Démonstration. Le multiple que *G* est de *B*, le même multiple *A* l'est de *CE*; et aussi le multiple que *F* est de *A*, le même multiple *CD* l'est de *CE*. Donc *A* est un multiple de *CE*, et l'on a pris de *A* et *CE* des équimultiples, à savoir *F* et *CD*; donc le multiple que *F* est de *CD*, le même multiple *A* l'est de *CE*. Mais le multiple que *A* est de *CE*, le même multiple *G* l'est de *B*. Donc le multiple que *F* est de *CD*, le même multiple *G* l'est de *B*. Donc si *CD* est égale à *B*, son multiple, qui est *F*, sera égal à *G*, qui est le multiple de *B*; et si *CD* est plus petite que *B*, *F* sera plus petit que *G*; et si *CD* est plus grande que *B*, *F* sera plus grand que *G*. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Et dès lors que ceci est devenu évident, nous disons: Lorsque nous voulons comparer une certaine grandeur à une autre grandeur à l'aide de ses parties, et que nous substituons des multiples de chacune d'elles aux parties conformément à ce que nous avons expliqué dans cette figure, tout ce qui apparaît avec les parties quant à l'égalité, à l'excès et au défaut nous apparaîtra dans le cas des multiples. Et de même lorsque nous convertissons cette proposition [78^{r}] nous disons: *Lorsque deux grandeurs sont différentes, et que l'on prend de chacune d'elles un multiple différent de l'autre, l'état du multiple d'une seule grandeur avec le multiple de l'autre grandeur <quant à> l'égalité, à l'excès ou au défaut est comme l'état des parties de l'une des deux*

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

grandeurs avec l'autre grandeur elle-même: lorsque les parties sont homonymes du nombre du multiple pris de la grandeur qui n'est pas partagée, et que le nombre des parties est comme le nombre du multiple pris de la grandeur partagée. Donc ce que nous avons dit et que nous avons mentionné est bien vrai, à savoir qu'en substituant des multiples aux parties, on n'abandonne ni ne contredit quoique ce soit.

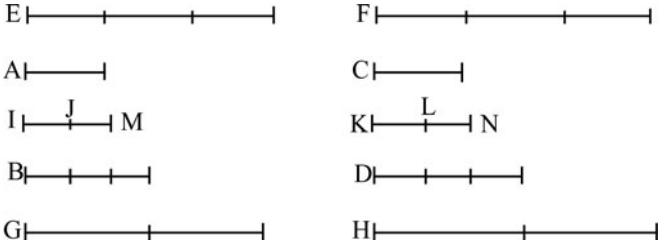
Euclide donc à la place de prendre des parties de la deuxième et de la quatrième et de comparer chacune de ces parties à son conjoint – je veux dire comparer les parties de la deuxième <grandeur> à la première grandeur et comparer les parties de la quatrième grandeur à la troisième grandeur – n'a fait au lieu de cela que prendre de la deuxième et de la quatrième des équimultiples, de sorte que le multiple de chacune d'elles a été substitué à ses parties, et prendre de la première et de la troisième des équimultiples, de sorte que le multiple de chacune d'elles a été substitué à [la grandeur] elle-même; et tout ce qui apparaît dans le cas des multiples et leur advient avec les autres multiples apparaîtra dans le cas des parties et leur adviendra avec les deux autres grandeurs.

Nous allons rendre cela plus clair dans une proposition qui [l']exemplifie; nous disons donc: *Lorsque l'on a quatre grandeurs, et que toutes les parties semblables en nombre et en noms que l'on prend de la deuxième et de la quatrième sont telles, que les parties de la deuxième ne sont pas supérieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient supérieures à la troisième grandeur, et que les parties de la deuxième ne sont pas inférieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient inférieures à la troisième grandeur, et que les parties de la deuxième ne sont pas égales à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient égales à la troisième grandeur; alors, tous les équimultiples que l'on prend de la première et de la troisième et tous les équimultiples que l'on prend de la deuxième et de la quatrième ne peuvent qu'être tels, que si le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est supérieur au multiple de la quatrième; et que si le multiple de la première est égal au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est égal au multiple de la quatrième; et que si le multiple de la première est inférieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est inférieur au multiple de la quatrième.* Et je dis aussi, *que lorsque les multiples sont selon cette condition, les parties seront selon la condition précédente; et qu'aussi longtemps que l'une de ces deux conditions se trouve être vraie, l'autre se trouve être vraie, et par suite la proportion dans les grandeurs est vraie, et le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la troisième à la quatrième.*

Exemple. Soient les grandeurs A, B, C, D, et que la condition que nous avons mentionnée concernant les parties y existe: je veux dire que toutes les parties semblables prises de B et D sont telles, que

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

[78v] les parties de *B* ne seront pas supérieures à *A* sans que les parties de *D* soient supérieures à *C*, et que les parties de *B* ne seront pas égales à *A* sans que les parties de *D* soient égales à *C*, et que les parties de *B* ne seront pas inférieures à *A* sans que les parties de *D* soient inférieures à *C*. Je dis alors que tous les équimultiples pris de la première et troisième et tous les équimultiples pris de la deuxième et quatrième sont tels, que le multiple de la première ne sera pas supérieur au multiple de la deuxième sans que le multiple de la troisième soit supérieur au multiple de la quatrième, et que le multiple de la première ne sera pas égal au multiple de la deuxième sans que le multiple de la troisième soit égal au multiple de la quatrième, et que le multiple de la première ne sera pas inférieur au multiple de la deuxième sans que le multiple de la troisième soit inférieur au multiple de la quatrième.



Démonstration. Il ne peut pas en être autrement. Car sinon, que soient pris de *A* et *C* des équimultiples, soit *E*, *F*; et de *B* et *D* des équimultiples, soit *G*, *H*; et que l'état de *E* avec *G* soit autre que l'état de *F* avec *H* quant à l'égalité, à l'excès ou au défaut: que *E* soit plus grand que *G* et que *F* ne soit pas plus grand que *H*, si cela est possible. Nous prenons de *B* la partie homonyme du multiple que *E* est de *A* et du multiple que *F* est de *C*, puisque les deux sont égaux, soit *IJ*; et de <*D*> cette même partie, soit *KL*. Et nous posons que le multiple que *IM* est de *IJ* est le même multiple que *G* l'est de *B* et le même multiple que *H* l'est de *D*, puisque les deux sont égaux; et de même nous posons que le multiple que *KN* est de *KL* est ce même multiple. Donc *IM* est des parties de *B*, et *KN* est ces mêmes parties de *D*. Donc *A*, *B* sont deux grandeurs différentes, et l'on a pris de l'une d'elles, à savoir *B*, des parties, à savoir *IM*; et l'on a pris de *B* un multiple, à savoir *G*, égal au nombre de parties qu'il y a dans *IM*; et l'on a pris de *A* un multiple, à savoir *E*, égal au nombre homonyme des parties; sur quoi il a été démontré dans la proposition qui précède ceci, que l'état de *E* avec *G* est comme l'état de *A* avec *IM* quant à l'égalité, à l'excès ou au défaut. Mais nous avons supposé *E* être plus grand que *G*; donc *A* est plus grande que *IM*. Et l'on procède de même avec les grandeurs *C*, *D*, leur multiple et leurs parties; donc l'état de *F* avec *H* est comme l'état de *C* avec *KN* quant à

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

l'égalité, à l'excès ou au défaut. Mais *F* n'était pas plus grand que *H*; donc *C* n'est pas plus grande que *KN*. Mais *A* est plus grande que *IM*, et *IM* et *KN* sont des parties semblables en nombre et en noms de *B* et *D*; et les parties de *B*, qui sont *IM*, sont plus petites que *A*, tandis que les parties de *D*, qui sont *KN*, ne sont pas plus petites que *C*. Ceci est absurde et impossible; car nous avions supposé les grandeurs telles, que leurs parties peuvent seulement être selon la condition que nous avons mentionnée quant à l'égalité, à l'excès ou au défaut. On a donc démontré que quand la condition des parties mentionnée existe, la condition des multiples existe et la proportion existe. Et c'est ce que nous voulions démontrer. [79r] Et l'on démontrerait par la même procédure que lorsque nous supposons que la condition des multiples existe dans ces grandeurs, la condition des parties existe et la proportion existe.

Et dès lors qu'on a montré clairement que la définition du rapport à l'aide des multiples est vraie, que tout ce qui existe dans le cas des parties existe de même dans le cas des multiples, que les deux sont identiques pour atteindre la vérité et connaître le vrai, l'un ne contredisant pas l'autre, et l'un n'affirmant pas ce que l'autre avait dit être absurde et ne disant pas être absurde ce qu'il avait affirmé, nous disons: Chercher les démonstrations relatives au rapport et à ce qui y advient en fait de caractères adjoints et d'accidents à l'aide des multiples est plus élégant qu'à l'aide des parties et plus aisé pour plusieurs raisons. Notamment, le fait de prendre les multiples de chacune des grandeurs n'est pas difficile, qu'ils soient petits ou grands. Mais quant à prendre les parties d'une certaine grandeur de sorte que les parties dépassent cette grandeur, et nommer ce qui est plus grand que la chose des *parties* d'elle, voilà qui est difficile puisque cela ne suit pas l'usage: on nomme *parties* d'une chose que ce qui est plus petit qu'elle. (Nous avions déjà avancé cela au début de cet ouvrage.) Donc si nous évitons cette manière de faire et que nous projetions de ne prendre les parties que du plus grand des conjoints (l'antécédent ou le conséquent), il ne nous sera pas permis de le faire jusqu'au moment où nous savons lequel, de l'antécédent et du conséquent, est le plus grand dans chacune des circonstances du rapport; mais avec les multiples nous n'avons aucun besoin de cela. (Seul celui qui aura cherché à expliquer la définition du rapport à l'aide des parties et l'aura cherché à l'aide des multiples reconnaîtra à quel point l'un est aisé et l'autre difficile; car il y a entre les deux une très grande différence quant à la difficulté de la recherche et l'inélégance de l'explication.) De plus si nous mettions les définitions du rapport en pratique à l'aide des parties, nous renverserions les propositions nécessaires présentées dans le cinquième Livre et les ramènerions des multiples aux parties. Mais prendre les parties est plus long à pratiquer et plus difficile à chercher; car le multiple ne fait que de

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

multiplier la grandeur par un certain nombre, tandis qu'avec les parties on a besoin du nombre des parties et des noms de ces parties, et en plus de la [grandeur] entière. En effet la connaissance du grand dans le calcul est plus facile et plus aisée que la connaissance du petit.

Et c'est ainsi que nous avons vu faire les savants anciens dans chacun des domaines de la science. En effet les calculateurs, dans le chapitre dénommé *fractions*, évitaient de chercher à opérer à l'aide des parties lorsqu'ils les additionnaient et les soustrayaient, et se tournaient vers les nombres entiers. L'artifice qu'ils utilisaient pour parvenir à cela était de remplacer les parties par des nombres qu'ils dérivaient des noms des parties, et ils multipliaient les parties par ces nombres homonymes d'elles afin qu'elles fussent comme entières pour le débutant. Et c'est également ainsi que nous voyons faire les maîtres d'entre les habiles savants. [79^{v}] En effet ceux qui étudient le calcul des astres – notamment Ptolémée et les autres – n'ont pas confirmé les parties et se sont détournés d'elles et de leur genre vers des noms qu'ils inventaient. Ils divisaient donc l'unité en soixante divisions pour qu'ils n'aient pas à s'attacher au demi, au tiers, à ce qui est encore plus ardu que cela, et à trouver leur produit, leur somme, etc., mais à des nombres entiers. Et de même lorsqu'ils avaient besoin de ces parties, ils les divisaient aussi par des nombres entiers, chacune par soixante, et ils créaient pour elles les noms de *minutes*, *secondes*, *tierces*, etc.

Et dès lors que nous avons mentionné ceci, mentionnons la prémisse conditionnelle contenant les multiples qu'Euclide a appliquée. Nous l'exprimerons dans un ordre qui peut-être sera différent de celui d'Euclide, parce que nous pensons que cela convient au but que l'on se propose; nous disons donc: *Lorsque le rapport de la première à la deuxième est comme le rapport de la troisième à la quatrième, chaque équimultiple de la première et de la troisième et chaque équimultiple de la deuxième et de la quatrième seront tels, que si le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est supérieur au multiple de la quatrième; que si le multiple de la première est égal au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est égal au multiple de la quatrième; et que si le multiple de la première est inférieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est inférieur au multiple de la quatrième.* De plus nous la convertissons; nous disons donc: *Lorsqu'on a quatre grandeurs, et que chaque équimultiple de la première et de la troisième et chaque équimultiple de la deuxième et de la quatrième sont tels, que si le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est supérieur au multiple de la quatrième; que si le multiple de la première est égal au multiple de la deuxième, le multiple de la troisième est égal au multiple de la quatrième; et que si le multiple de la première est inférieur au multiple de la deuxième, le multiple*

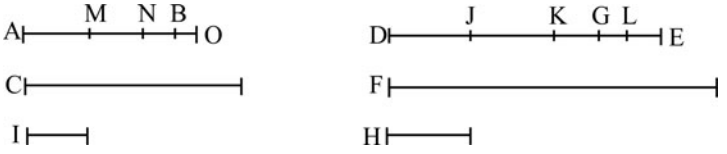
https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

de la troisième est inférieur au multiple de la quatrième; alors le rapport de la première à la deuxième sera comme le rapport de la troisième à la quatrième.

Il nous reste dans cet ouvrage à mentionner le rapport qui est plus grand qu'un autre rapport. Je dis donc: *Lorsque l'on a quatre grandeurs, et qu'il y a dans la première, des parties de la deuxième, plus que ce qu'il y a dans la troisième, de ces parties de la quatrième, la mesure de la première relativement à la deuxième sera plus grande que la mesure de la troisième relativement à la quatrième.* Et ceci est une chose qui n'a pas besoin d'une démonstration; car ce qui contient plus de parties est plus grand de rapport que ce qui contient moins de parties. Et je dis aussi que cette proposition est elle aussi convertible; c'est-à-dire que *lorsque la mesure de la première relativement à la deuxième est plus grande que la mesure de la troisième relativement à la quatrième, il existera de la deuxième et de la quatrième certaines parties telles, qu'il y a dans la première, [80v] des parties de la deuxième, plus que ce qu'il y a dans la troisième, des parties de la quatrième.*

Mais nous allons faire précéder cela de choses d'une grande utilité dans ce dont on aura besoin à cause de cela. Je dis donc: *Lorsqu'on a quatre grandeurs, et que toutes les parties de la deuxième et de la quatrième sont telles, que si les parties de la deuxième sont supérieures à la première grandeur, les parties de la quatrième sont supérieures à la troisième grandeur; et que si les parties de la deuxième sont inférieures à la première grandeur, les parties de la quatrième sont inférieures à la troisième grandeur; alors les grandeurs sont proportionnelles, même si nous n'avons pas mentionné la condition de l'égalité.* (En effet mentionner l'égalité ou l'omettre est égal; car lorsqu'elles sont limitées par excès et par défaut simultanément, la condition de l'égalité existe nécessairement, et la proportion des grandeurs existe.)

Exemple. Nous fixons quatre grandeurs *AB*, *C*, *DE* et *F*; et nous supposons que toutes les parties semblables en nombre et en noms prises de *C* et *F* sont telles, que si les parties de *C* sont supérieures à *AB*, les parties de *F* sont supérieures à *DE*; et que si les parties de *C* sont inférieures à *AB*, les parties de *F* sont inférieures à *DE*; et qu'il n'y a pas de mention de l'égalité. Je dis alors que les parties de *C* ne seront pas égales à *AB* sans que les parties de *F* soient égales à *DE*.



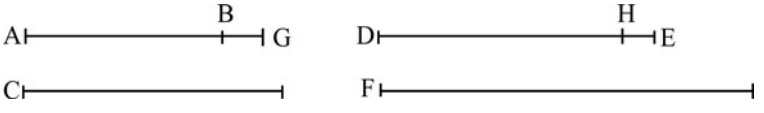
Démonstration. Ce n'est pas possible autrement. Car sinon, que *AB* soit des parties achevées de *C*; et qu'il y ait dans *DE* moins, ou plus, de

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

ces parties <de *F*>. Que *DE* soit donc plus grande; et qu'il y ait dans *DG*, des parties de *F*, autant que ce qu'il y a dans *AB*, des parties de *C*. Tu ne cesses de diviser *F* jusqu'à ce que tu arrives à la première partie d'elle qui soit plus petite que *EG*; et que cette partie soit *H*: elle est donc plus petite que *EG*. Et nous prenons la même partie de *C*, soit *I*. Nous séparons ensuite de *DE* les [grandeurs] égales à *H* qui y sont contenues; il n'y a aucun doute que l'une des séparations tombera entre *G* et *E*, car *GE* est plus grande que *H*; et que ces séparations soient *DJ*, *JK*, *KL*. Nous séparons ensuite *AB* en les [grandeurs] égales à *I* qui y sont contenues; on la séparera donc [un nombre de fois] égal au nombre de [grandeurs] égales à *H* que l'on avait séparées de *DG*, car nous avions posé que le rapport de *AB* relativement à *C* était comme le rapport de *DG* relativement à *F*, puisqu'il y a dans chacune des deux un nombre égal de parties de son conjoint; les divisions seront donc *AM*, *MN* et *NO*. Donc *AO* sera plus grande que *AB* comme *DL* était plus grande que *DG*. Donc *AO* est des parties de *C*, et *DL* ces mêmes parties de *F* et selon leur nombre. Mais *AO* est plus grande que *AB*, et *DL* est plus petite que *DE*. Il existe donc de *C* et *F* des parties égales telles, que les parties de *C* sont supérieures à *AB* tandis que les parties de *F* sont inférieures à *DE*. Mais l'on avait posé qu'il n'existait pas, de *C* et de *F*, des parties égales telles que les parties de *C* sont supérieures à *AB* sans que les parties de *F* soient supérieures à *DE*. Ceci est absurde et impossible. Par conséquent il n'existe pas des parties de *C* qui égalent *AB* sans que ces mêmes parties de *F* égalent *DE*. Donc l'existence des trois conditions quant à l'égalité, à l'excès et au défaut est vraie; et avec leur existence, la proportion est vraie. [80^{v}] Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Je dis aussi: *Lorsque le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième, les parties égales de la deuxième et de la quatrième sont telles que les parties de la deuxième ne seront pas supérieures à la première grandeur sans que les parties de la quatrième soient supérieures à la troisième grandeur*.

Exemple. Le rapport de *AB* à *C* est plus grand que le rapport de *DE* à *F*. Je dis alors que chaque fois que l'on a des parties égales de *C* et de *F* et que les parties de *C* sont supérieures à *AB*, alors les parties de *F* seront supérieures à *DE*.



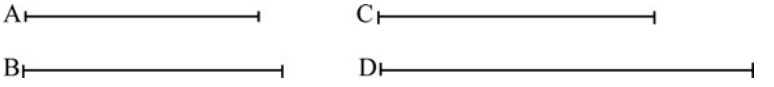
Démonstration. Ce n'est pas possible autrement que ce que nous avons mentionné. Si donc il était possible qu'il existât de *C* et de *F* des parties égales telles, que les parties de *C* sont supérieures à *AB* tandis que les parties de *F* ne sont pas supérieures à *DE*, que les parties de *C*

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

supérieures à *AB* soient *AG*, et ces parties de *F* qui ne sont pas supérieures à *DE DH*. Donc *DH* et *AG* sont des parties égales de *F* et *C*. Donc ce qu'il y a dans *DE*, des parties de *F*, est plus grand que ce qu'il y a dans *AB*, des parties de *C*. Donc le rapport de *DE* à *F* est par conséquent plus grand que le rapport de *AB* à *C*. Mais c'est le rapport de *AB* à *C* qui était le plus grand. Ceci est absurde et impossible. Donc les parties de *C* ne seront pas supérieures à *AB* sans que ces parties de *F* soient supérieures à *DE*. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Et dès lors que nous avons mis tout ceci en avant, je dis: *Lorsque l'on a quatre grandeurs, le rapport de la première à la deuxième étant plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième, il existera de la deuxième et de la quatrième certaines parties telles, que les parties de la deuxième sont inférieures à la première grandeur, tandis que les parties de la quatrième ne sont pas inférieures à la troisième grandeur.*

Exemple. Le rapport de *A* à *B* est plus grand que le rapport de *C* à *D*. Je dis alors qu'il existera de *B* et de *D* certaines parties égales telles, que les parties de *B* sont inférieures à *A* tandis que les parties de *D* ne sont pas inférieures à *C*.



Démonstration. Cela aura lieu dans le cas de certaines de leurs parties que l'on prend de *B* et de *D*. <Sinon> les parties de *B* ne seront pas inférieures à *A* sans que les parties de *D* soient inférieures à *C*. De plus du fait que nous avions posé que le rapport de *A* à *B* était plus grand que le rapport de *C* à *D*, toutes les parties égales de *B* et de *D* sont telles, que les parties de *B* ne sont pas supérieures à *A* sans que les parties de *D* soient supérieures à *C*, selon ce que nous avons démontré dans la proposition qui précède ceci. Donc *A*, *B*, *C* et *D* sont quatre grandeurs, et toutes les parties prises de *B* et de *D* sont telles, que si les parties de *B* sont supérieures à *A*, les parties de *D* sont supérieures à *C*; et que si les parties de *B* sont inférieures à *A*, les parties de *D* sont inférieures à *C*; donc le rapport de *A* à *B* est comme le rapport de *C* à *D*. Mais nous avions posé le rapport de *A* à *B* plus grand que le rapport de *C* à *D*. Ceci est absurde et impossible. Donc il n'est pas vrai que chaque fois que les parties prises de *B* sont inférieures [81^{r}] à *A*, les parties prises de *D* sont nécessairement inférieures à *C*; au contraire il existe des parties de *B* qui sont inférieures à *A* tandis que les parties de *D* ne sont pas inférieures à *C*. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Là, il est avéré concernant les multiples que lorsque le rapport de la première à la deuxième est autre[70] que le rapport de la troisième à la

[70] Sous-entendu: *plus grand*.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

quatrième, il existe des équimultiples de la première et de la troisième et des équimultiples de la deuxième et de la quatrième tels, que le multiple de la deuxième est inférieur au multiple de la première tandis que le multiple de la quatrième n'est pas inférieur au multiple de la troisième: comme les parties de la deuxième étaient inférieures à la première tandis que les parties de la quatrième n'étaient pas inférieures à la troisième. Et c'est la même chose de dire que *le multiple de la deuxième est inférieur au multiple de la première tandis que le multiple de la quatrième n'est pas inférieur au multiple de la troisième*, et de dire que *le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième tandis que le multiple de la troisième n'est pas supérieur au multiple de la quatrième*. Mentionnons-la[71] donc abstraitement comme Euclide l'avait mentionnée; nous disons donc: *<Lorsque> l'on a quatre grandeurs, et qu'il existe des équimultiples de la première et de la troisième et des équimultiples de la deuxième et de la quatrième tels, que le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième tandis que le multiple de la troisième n'est pas supérieur au multiple de la quatrième, alors le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième.* Quant à sa conversion dont nous avons démontré l'existence, la voici: *Lorsque le rapport de la première à la deuxième est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième, il existe des équimultiples de la première et de la troisième et des équimultiples de la deuxième et de la quatrième tels, que le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième tandis que le multiple de la troisième n'est pas supérieur au multiple de la quatrième.*

Nous avons donc montré dans ces pages que ce qu'Euclide a mentionné au sujet des multiples est vrai, et qu'il n'a pas préféré expliquer le rapport par les multiples sans une cause qui les lie vraiment au rapport; au contraire il n'y a aucun moyen de trouver une chose qui ait un lien plus vrai avec le rapport, et qui délimite et saisisse mieux ses différences et ses propriétés, que les multiples. En effet personne ne doutera que le rapport soit uniquement la comparaison d'une grandeur avec une autre grandeur afin de connaître la mesure de l'une des deux relativement à l'autre. Et l'on ne connaît la comparaison de la petite à la grande qu'à l'aide des parties de la grande. Mais le multiple est uniquement l'agrandissement des parties; et le multiple est commun à la comparaison de la petite à la grande et à la comparaison de la grande à la petite, alors que les parties ne sont habituellement employées que dans le cas où l'on compare la petite à la grande. (Même si dans cet ouvrage nous n'avons pas tenu

[71] Il s'agit ici d'une *prémisse*, comme pour la définition des grandeurs proportionnelles.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

compte de la mention des parties en quelque situation que ce soit; puisque nous en sommes arrivés [81^{v}] là afin de rendre le propos aisé et de l'alléger du fait que nous avions souvent besoin de la répéter et de l'utiliser;[72] et chaque fois qu'on l'utilisait souvent dans le propos, il était apte à être allégé et abrégé.)

Quant à [connaître] comment l'on trouve, dans le cas du rapport plus grand, et l'équimultiple pris de la première et de la troisième, et l'équimultiple pris de la deuxième et de la quatrième qui sont tels, que le multiple de la première est supérieur au multiple de la deuxième tandis que le multiple de la troisième n'est pas supérieur au multiple de la quatrième; quelle est la méthode pour déterminer ces multiples, puisque cette condition n'existe pas nécessairement dans le cas de tous les multiples, mais qu'elle ne peut exister que dans le cas de certains multiples selon ce que nous avons mentionné; nous connaissons une manière pour les déterminer une fois que nous connaissons comment l'on détermine une quatrième grandeur qui ait un rapport à trois grandeurs proportionnelles données [et] connues: nous voulons trouver une quatrième [et] autre grandeur qui soit une quatrième pour elles et comprise avec elles, de sorte que le rapport de la première donnée à la deuxième donnée soit comme le rapport de la troisième donnée à la quatrième cherchée. Et lorsque nous ne connaissons pas comment l'on détermine cette grandeur quatrième pour les trois données, nous ne connaissons pas une manière par laquelle nous arrivons à trouver les multiples selon la condition mentionnée.

On voit dans le sixième Livre comment il [*i.e.* Euclide] détermine pour deux grandeurs une troisième grandeur proportionnelle à elles, et le Livre permet de voir comment il détermine une quatrième [proportionnelle] à trois; mais cela uniquement lorsque les grandeurs sont toutes des lignes [droites]. Quant aux angles [rectilignes] ou aux surfaces ou aux solides, nous n'avons pas vu cela. Et nous avons vu des personnes qui ont déterminé ces multiples mentionnés, concédant à eux-mêmes l'existence de cette quatrième grandeur sans une méthode constructive qui leur permette de la trouver. Mais pour moi il n'y a aucune différence entre quelqu'un qui concède l'existence de cette quatrième grandeur ou qui concède l'existence des multiples selon la condition mentionnée; et c'est pour cette raison que nous voyons (mais Dieu est plus savant) Euclide utiliser ces multiples dans la douzième proposition du cinquième Livre[73]

[72] Le pronom personnel féminin représente *la mention des parties*.

[73] C'est la numérotation des différentes versions arabes des *Éléments* (voir Engroff, *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements, pp. 108 et 218; *Codex Leidensis 399, 1*., Part. III Fasc. II, p. 56; et St-Pétersbourg, MS Or. C 2145, f. 84^{r}-84^{v}). Dans l'édition de Heiberg, il s'agit de la Proposition V. 13.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

sans avoir présenté avant cela quelle est la manière de les déterminer. Et une telle chose ne porte pas atteinte ni préjudice à la démonstration; car dès lors qu'il est vrai que la chose existe nécessairement, il n'y aura aucun mal à alléguer son existence et à démontrer par elle une autre chose. En effet si cela n'était pas admis dans la démonstration, il ne nous serait pas permis par exemple de croire fermement que le côté de l'heptagone inscrit dans le cercle est plus petit que le côté de l'hexagone et plus grand que le côté de l'octogone inscrits dans un même cercle; ni que le côté de l'hendécagone est plus petit que le côté du décagone et plus grand que le côté du dodécagone qui sont dans un même cercle; puisque déterminer la corde de l'heptagone n'est pas possible selon la méthode géométrique.[74] Mais lorsque nous voulons démontrer qu'elle est plus grande que [82r] le côté de l'octogone, nous exemplifions une corde et nous posons qu'elle sous-tend le septième du cercle comme exemple, non comme détermination exacte; ensuite nous disposons la démonstration comme il se doit; et l'inexistence de la constructibilité ne porte pas atteinte pas à la scientificité. On aurait uniquement porté atteinte à la constructibilité elle-même si par exemple nous voulions déterminer le côté du polygone équilatéral à quatorze côtés inscrit dans le cercle; il ne nous aurait pas été permis d'exemplifier une corde et de poser qu'elle sous-tend le septième du cercle sans une détermination exacte, ensuite de diviser l'arc en deux moitiés et d'achever la figure: une telle chose n'est pas permise. Et la distinction est claire: car qu'une telle chose soit permise pour mettre sur pied la démonstration et interdite pour déterminer en acte une construction est clair et évident (si Dieu le Très-Haut le veut).

Et dès lors que le discours nous a amenés à cet endroit, et que nous avons mentionné ce que nous avions espéré mentionner, le moment est venu pour nous d'interrompre le propos et de le conclure en glorifiant Dieu: qu'Il soit grandement loué et que Ses Noms soient sanctifiés. Nous Lui demandons la rémission et le pardon du péché et de l'erreur, et Son assistance pour réussir ce qui Le satisfait quant à la vérité en parole et en acte.

Le *Commentaire sur le rapport* d'après le propos du théologien
Abū ʿAbd Allāh Muḥammad Ibn Muʿāḏ al-Jayyānī
(que Dieu lui fasse miséricorde)
est achevé.

[74] Ibn Muʿāḏ s'en tient aux constructions à la règle et au compas, bien que la construction de l'heptagone régulier à l'aide des sections coniques ait été connue depuis près d'un siècle (voir Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III [Londres, 2000], pp. 323–503 & 647–898).

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

APPENDICE II: ÉDITION

Nous ne connaissons qu'une seule copie du *Commentaire sur le rapport*, le MS Alger 1446, 3°, fols. 74^{r}–82^{r}.[75] Cette copie a été reproduite en facsimile dans l'ouvrage de E.B. Plooij déjà mentionné;[76] à notre connaissance, la seule édition de ce texte est celle que nous avions présentée dans notre thèse de doctorat.[77]

Le manuscrit comporte 25 lignes par page, en tenant compte pour certaines pages de l'espace prévu pour les figures, qui n'ont cependant pas été reproduites; le texte, rédigé en caractères *nasḫī*, est très aisé à lire; la plupart des points diacritiques sont indiqués; mais le texte n'est pas du tout vocalisé: il ne comporte donc ni *hamza*, ni *šadda*, ni voyelles brèves.

Nous avons reconstitué les figures selon l'usage consacré dans ce genre de traité, où les grandeurs sont représentées par des segments de droites; nous avons cependant essayé de les reproduire à l'échelle, comme Plooij avant nous, bien que les grandeurs soient habituellement représentées par des segments de même longueur. Nous avons également ajouté tous les *hamzas*, quelques voyelles brèves et *šaddas*, ainsi que les signes de ponctuation; nous avons de plus subdivisé le texte en paragraphes. Les chiffres entre crochets [ ] indiquent le début d'un folio; les crochets <> comprennent ce que nous considérons être des omissions du copiste; enfin les quelques changements que nous avons faits dans le texte sont indiqués dans les notes de bas de page.

Plooij avait indiqué un certain nombre d'amendements au texte du manuscrit;[78] nous avons adopté la plupart d'entre eux.

[75] Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. V, p. 109. Voir également Suter, "Die Mathematiker und Astronomen der Araber," p. 96, et "Nachträge und Berichtigungen," p. 170; et C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Litteratur*, Supplementband I (Leiden, 1937), p. 860.
[76] Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, pp. 15–47.
[77] Voir *Trois commentaires arabes*, vol. 2, pp. 67–89.
[78] Plooij, *Euclid's Conception of Ratio*, p. 67.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

[٧٤–و]

مقالة في شرح النسبة من كلام القاضي أبي عبد الله محمد بن معاذ الجياني

رحمه الله تعالى

[٧٤–ظ]

بسم الله الرحمن الرحيم
وصلى الله على سيدنا محمد

قال القاضي أبو عبد اللّه محمد بن معاذ الجيّاني، رضي اللّه عنه: نريد أن نبيّن ما عسى أن يُشْكِل في المقالة الخامسة من كتاب أوقليدس على من لم يرتَضْ فيه؛ وإن كنتُ معتقداً في كلام أقليدس وأغراضه ومقاصده، أنها أبينُ وأوضحُ مقاطع – عند من نظر فيه بعينِ الحقيقة وانقاد لزمامِ النَّصَفة – مِن كثيرٍ مَن حُوول به تبيّنه و ريم به إيضاحه؛ إلا أشياء تركها، لما في كلامه وسردِ كتابه من القوة على إدراكها وإخراجها إلى حدّ الفعل.

وأما ما تعرّض إليه مما ظنّ قومٌ أنه غير تامّ أو غير بيِّن فتمّموه أو بيّنوه بزعمهم، فإن كلامهم في ذلك أَوْلى بالتبيين وأفقرُ إلى البرهان من كتاب أقليدس؛ كالذي رأينا في الكتاب المنسوب إلى سيندوس، فإنه مَن تأمّل برهانه على ما أتى به أقليدس غير مبرهن – مثل قوله إذا أخرج خطان مستقيمان على أقلّ من زاويتين قائمتين فلا بدّ وأن يلتقيا، والقطر يقسم الدائرة بنصفين، وخطان مستقيمان لا يحيطان بسطح – رأى فيه من الوَهن والضَّعف والاحتياج إلى الإقرار بأعظم مما ادّعى أقليدس إلى الإقرار به، مما لا خفاء به.

ولعلّ قائلًا يقول: إذا كان كلامُ أقليدس في كتابه على ما ذكرتَ ولم يبيّنه أحدٌ بأوضح مما أتى هو به، فكيف تروم تبيينَ كلامه في المقالة الخامسة وكشفَ ما غمض منها؟ فنقول: لم نأتِ بهذا الكتاب إلا لنبيّن أن كلام أقليدس في هذه المقالة

15 أخرج: خرج

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

هو الصحيح ومنهاجَه هو الواضح، فإن كثيراً يظنّون أن أقليدس ولج إلى تبيين النسبة من غير بابها وأتى بها من غير سبيلها في حده لها بأحد الأضعاف وتنكيبِه عن حدِّها بذاتها المفهوم من معنى النسبة، ويحسبون أن ليس بين النسبة وأحد الأضعاف ارتباطٌ ظاهرٌ؛ ولعمري، ما ترتبط النسبة بشيء أشدّ ارتباطاً منها بأحد الأضعاف للقدر المنسوب والمنسوب إليه.

وبالجملة أقول: إن في المقالة الخامسة غموضاً وفي النظر فيها أتعاباً، لكن على قدرِ جلالةِ قدر المطلوب يكون الطلب، ومَن ينكحِ الحسناء يعطِ مهرها؛ فإن الكتاب من هنالك كالأرواح وما قبله كالأشباح؛ ونحن نقول في ذلك ما أرجو أن ينفع اللّه به مطالعه ويُعين على فك ما استغلق منها؛ وإليه تعالى المنفرد بالفضل أقدّم الضراعة في التوفيق إلى الصواب والعصمة من الخطأ والإعجاب؛ وهو القدير، لا ربَّ غيره.

أقول، وباللّه التوفيق: إن الأشياء الواقعة تحت الكمّيّة المستعملةَ في صناعة الهندسة خمسةٌ: العدد [٧٥-و] — أوّلها وأبسطها — والخط والسطح والزاوية والمجسَّم؛ ولنجعل الاسم الجامع لهذه الأشياء الذي هو لها كالجنس الواقع عليها المقدار؛ وإذا كانت المقادير من جنسٍ واحدٍ من هذه الأجناس الخمسة، فلتُسم المتجانسة؛ وهي التي يمكن بكثرةِ تضاعيفِ الأصغر منها أن يبلغ إلى الأكبر أو يزيد عليه، ويمكن أيضاً بكثرة تجزئةِ الأكبر أن يكون مثلَ الأصغر أو ينقص عنه.

وإذا كان مقداران متجانسان وكان الصغير يعدّ الكبير، فإن الصغير يقال له جزءٌ من الكبير، ويقال للكبير ذو الأضعاف ويقال له أيضاً سميٌّ لذلك الجزء؛ وإذا كان أصغرُ المقدارين المتجانسين يعدّ أكبرَهما أو كان لهما مقدارٌ ثالثٌ من جنسهما يعدّ كلٌّ واحد منهما، فإنه يقال لهما مشتركان؛ وإذا لم يعدّ الأصغر الأكبرَ ولا وُجد لهما مقدار ثالث يعدّهما يقال المتباينان.

6 غموضاً: غموض / أتعاباً: اتعاب

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

والنسبة هي قدرُ مقدار من مقدارٍ آخر مجانس له، وذلك أن يُقاس بين مقدارين ليُعلم قدرُ أحدهما من الآخر؛ والمناسبة تَساوي النسب؛ ومتى نُسب مقدار إلى مقدار آخر سمّي المقدار المنسوب إليه تالياً والمقدارُ المنسوب مقدماً، ويسمّى كلٌّ واحد من المقدم والتالي قرينَ صاحبه.

والكلّ أكبر من الجزء؛ وكذلك جرى التعارف والعادة أن يكون الجزء أصغر من الكل ولا يؤخذَ من الكل إلا أجزاء لا تنتهي إلى الكل، فإذا زاد على الكل يسمّى أكبر منه أو أضعافه وارتفع عنه اسمُ التجزئة؛ لكنّا نُنزل في كتابنا هذا أنّا متى أخذنا أجزاءً من مقدارٍ ما، لم نُبالِ بتلك الأجزاء انتهتْ إلى ذلك المقدار المأخوذة منه أو قصرتْ عنه أو جاوزَتْه؛ لما في ذلك من اطّراحِ المؤنة في تكرار القول وإطالتِه فيما نريد تبيينه بعدُ إن شاء الله، ولأن ذلك غيرُ قادح في شيء من البرهان ولا مخالف لأصلٍ موضوعٍ ولا مناقض له؛ وإنما ذلك لتسهيل الكلام وإيجازِه ونسقط عن أنفسنا أن نتعرّف في كل موضع أيّ مقدار هو الأكبر فنأخذ منه الأجزاء.

وإن كان المقداران مشتركين فإن في أحدهما من الآخر أجزاءً تامّةً مستوفيةً له؛ لأنه إذا أخرج المقدار الثالث الذي يعدّهما كان الثالث جزءاً من كل واحد منهما، فإذا قسمتَ أحد المقدارين بذلك المقدار الثالث، عدّه واستوفاه عدّاً، فقد صار المَقيس منهما أجزاءً للآخر؛ وإذا كان المقداران متباينين لم يكن في كل واحد منهما أجزاءٌ تامّةٌ لصاحبه.

وأما الأقدار المتناسبة فهي التي يكون في الأول منها من أجزاء الثاني مثلُ ما يكون في الثالث من تلك الأجزاء للرابع؛ فهذا ظاهر لا خفاء به ولا يحتاج إلى برهان، وكذلك استعمل [٧٥–ظ] أقليدس هذا في القول السابع؛ إلا أن هذا لا ينتهي إلا إذا كان المقدار الأول مشاركاً للثاني ويكون الثالث مشاركاً للرابع، فتكون في كل واحد من قرينه أجزاءٌ تامّةٌ.

15 المقدارين: المقداين / عدّه: عدة — 16 المقداران: المقداراين

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

وأما إذا كان القرينان متباينين، ولم يمكن المَنْطِق بقدرِ كلٍّ مقدم عند تاليه وإخراجُه إلى الجزء والملفوظُ به من الأجزاء، فإن من البين — وإن عدم ذلك الوجه المعروف أعني النُطْق بالأجزاء وارتفع، ولم يستوف أجزاء التوالي كلَّ واحد من المقدّمَيْن استيفاءً كاملاً تامّاً من غير أن تفضل منه فضلةٌ — فإنه لا محالة لا يمكن أن تكون نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع ويكون في الأول من أجزاء الثاني أكثرُ مما في الثالث من <تلك> الأجزاء للرابع، ولا أقلُّ منه؛ وهذا مما لا يحتاج فيه إلى برهان لقبول العقل إيّاه دون واسطة؛ لأنه إذا كان في مقدار من أجزاء مقدارٍ ثان أكثرُ مما في مقدارٍ ثالث من تلك الأجزاء للمقدار الرابع، فليس قدر الأول عند الثاني كقدر الثالث عند الرابع؛ وهذا مما لا خفاء به ولا يزداد بكثرة الكلام فيه تبييناً؛ وكذلك الأشياء البيّنة الظاهرة للعقل من غير احتياج إلى برهان، ولا تزداد بكثرة التبيين لها إيضاحاً، لأنه لا سبيل إلى تبيين ما تبيّن منها.

ولا يُخِلّ بهذه المقدّمة أنها غير ملفوظ فيها بأجزاء واقعة على كل واحد من المقدمين وإنما هي بالأقلّ والأكثر، والأقلّ من الشيء غير محدود وكذلك الأكثر وإنما المحدود المساوي، فإنّا قد نجد مثل ذلك كثيراً في هذه الصناعة؛ من ذلك محيطُ الدائرة؛ إذا أردنا أن نعلم مبلغه وقدرَه من القطر، فإنا نعلمه بالأقلّ والأكثرِ إذا عدم التماثُل فيه والتساوي، لأنه لا يقع أبداً تساوٍ بين خطٍّ مستدير وخطٍّ مستقيم لأنهما من غير نوع واحد؛ وكذلك المتباينُ والمشترك في المقادير كأنهما من غير نوع واحد؛ إذ لا سبيل إلى أن يُلفظ في المتباينات بأجزاء، ولا في المحيط والقطرِ بقدرٍ مخصوص بعينه مسمّىً بنفسه؛ وإنما يقال في المحيط إنه أكبر من أضلاعِ كل شكل واقع في الدائرة، وأصغرُ من أضلاع كل شكل واقع على الدائرة؛ وكذلك نقول: إذا نسبنا مقداراً ما إلى مقدارٍ مباين له واضطررنا إلى النطق بها أو تقريبِها من نسبةٍ منطوق بها لغرضٍ ما، فإنا نقول إنه أكبر من كذا وكذا من أجزائه وأصغرُ من كذا وكذا من

13 المقدمين: المقدمتين

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

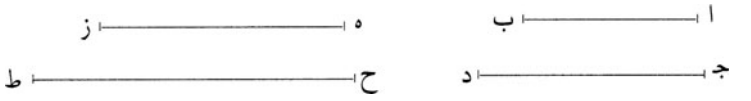
أجزائه؛ وكذلك الأجذارُ الصُمّ؛ إن اضطررنا إلى إيجادها أجزاءً، فإنا نقول إنّ جذر العدد المفروض غير المربّع هو أكبر من جذرِ كل مربعٍ أصغر من العدد المفروض، وأصغرُ من جذر كل مربع أكبر من العدد المفروض؛ وتركُ النطق بها وامتناعُه لا يدخل داخله فيما يُقصد إليه من ذلك، ولا [٧٦-و] ينقض أصلًا صحيحاً ولا يُحيله.

فإذا صحّ ما ذكرنا من ذلك، فإنما نمدّه ونؤصّله ونثبت ذكره مجرَّداً ليكون أصلًا يُعتمد عليه فيما يأتي بعدُ، إن شاء اللّه؛ وذلك إذا كانت نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع، فإنه لا يجوز أن يكون في الأول من أيّةِ أجزاءِ الثاني شيءٌ أكثرُ مما في الثالث من تلك الأجزاء المأخوذة من الرابع، ولا أقلّ؛ ولا ينكرنّ منكرٌ قولَنا "من أية أجزاء الثاني شيء"، لأنه إذا وقع الخلاف بين أسماءِ الأجزاء التي في الأول من الثاني وبين أسماء الأجزاء التي في الثالث من الرابع، فقد وقع التغاير في النسبتين وارتفع تساويهما، لا نبالي بأيّ الأجزاء وقع ذلك؛ ونريد في هذا الموضع بياناً ونمثّل له أمثلةً من أشخاص المسائل، لأن في ذلك من المعونة ما لا يدفعه أحدٌ وإن كنّا قد أثبتنا من الكلام العامّ الواقع على جميع أشخاص المسائل بما فيه كفاية، ولكنا نريد أن نزيد ذلك إيضاحاً.

فنقول: إنه إذا وضع واضعٌ أن نسبة مقدار $\overline{\text{ا ب}}$ عند $\overline{\text{ج د}}$ كنسبة $\overline{\text{ه ز}}$ عند $\overline{\text{ح ط}}$، فإنه إذا كان $\overline{\text{ا ب}}$ و$\overline{\text{ج د}}$ مشتركين فقد وضح الكلام في ذلك، أعني أنه يكون في $\overline{\text{ا ب}}$ من أجزاء $\overline{\text{ج د}}$ مثلُ ما يكون في $\overline{\text{ه ز}}$ من أجزاء $\overline{\text{ح ط}}$ تلك؛ وإن كانا متباينين، فإنه وإن عدمنا اللفظُ بما في $\overline{\text{ا ب}}$ من أجزاء $\overline{\text{ج د}}$، فإنه ليس يسوغ لواضعِ هذه الأقدار متناسبة أن يقول مثلًا إن $\overline{\text{ا ب}}$ أكبر من ثُلُثَي $\overline{\text{ج د}}$ وإن $\overline{\text{ه ز}}$ أقلّ من ثلثي $\overline{\text{ح ط}}$ أو ثلثاه، ولا يقولَ إن $\overline{\text{ا ب}}$ ثلثا $\overline{\text{ج د}}$ و$\overline{\text{ه ز}}$ أكثر من ثلثي $\overline{\text{ح ط}}$ أو أقلّ، ولا إن $\overline{\text{ا ب}}$ أقلّ من ثلثي $\overline{\text{ج د}}$ و$\overline{\text{ه ز}}$ أكثر من ثلثي $\overline{\text{ح ط}}$ أو ثلثاه؛ هذا هو عينُ المحال.

10 شيء: شيا — 11 الأجزاء التي: الاحزالتي — 21 أو (الثانية): ولا / ولا إن: ولان

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press



وكذلك إذا تتبّعنا سائر الأجزاء واستقرأناها، فإنه من الوجه الذي يستحيل فيما سمّيناه من الأجزاء يستحيل في غيرها، وإن دقّت الأجزاء؛ فإنه مَن زعم أن هذه الأقدار متناسبة وقال إن $\overline{ا\ ب}$ مثلاً أكثر من ثلاثمائة وسبعة وستّين جزءًا من عشرة آلاف جزءٍ من $\overline{جـ\ د}$ وإن $\overline{ه\ ز}$ أقلّ من تلك الأجزاء المحدودة من $\overline{ح\ ط}$ أو مثلُها، فلا فرق بينه وبين ما تقدّم.

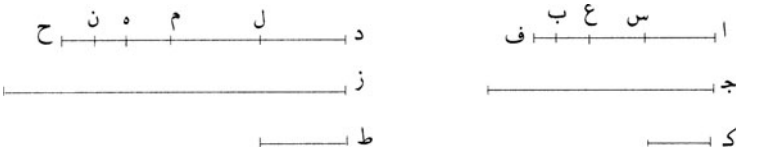
وإنما أتينا بهذه، وإن كان كلامنا مستغنًى عن أكثره، ليتبيّن أن القضية كلّية حتى يكون الشرط واقعاً على جميع الأجزاء، دقيقها وجليلها، لا يُخصّ به أجزاءٌ دون أجزاء؛ وذلك أنه إذا كانت الأقدار متناسبةً، نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع، فلا يجوز أن يؤخذ للثاني والرابع أجزاءٌ متساويةُ العدد والتسمية، أيّ الأجزاء كانت، فتوجد أجزاء الثاني زائدةً على المقدار الأول إلا إذا كانت أجزاء الرابع زائدةً على المقدار [٧٦–ظ] الثالث، أو توجد أجزاء الثاني مساويةً للمقدار الأول إلا وكانت أجزاء الرابع مساويةً للمقدار الثالث، أو توجد أجزاء الثاني ناقصةً عن المقدار الأول إلا إذا كانت أجزاء الرابع ناقصةً عن المقدار الثالث؛ لأنها لو وُجدت أجزاء الثاني تزيد على الأول وأجزاءُ الرابع مساوية للثالث أو ناقصة، لَكان في الأول من أجزاء الثاني أقلّ مما في الثالث من أجزاء الرابع؛ وقد بيّنا استحالة هذا؛ وكذلك لو وجدت أجزاء الثاني مساويةً للمقدار الأول وأجزاءُ الرابع ناقصة أو زائدة عن المقدار الثالث، لكان في الأول من أجزاء الثاني أقلّ أو أكثرُ <مما في الثالث> من أجزاء الرابع؛ وكذلك لو وجدت أجزاء الثاني ناقصةً عن المقدار الأول وأجزاءُ الرابع مساوية للمقدار الثالث أو زائدة عليه، لكان في الأول من أجزاء الثاني أكثرُ مما في الثالث من أجزاء الرابع؛ وهذا كلُّه محال.

6 مستغنًى: مستغن — 11–12 مساويةً للمقدار الأول: متساوية المقدار الاول

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

والذي بقي علينا من هذه المقدّمة أن نعلم إن كانت منعكسةً على نفسها أم لا؛ فنقول إنها منعكسة، وذلك أن نقول: إذا كانت أربعة مقادير، وكانت كل الأجزاء المتساوية العدّة والأسماء المأخوذة للثاني والرابع، لا توجد أجزاء الثاني تزيد على المقدار الأول إلا <إذا> كانت أجزاء الرابع تزيد على المقدار الثالث، ولا توجد أجزاء الثاني تساوي المقدار الأول إلا إذا كانت أجزاء الرابع تساوي المقدار الثالث، ولا توجد أجزاء الثاني تنقص عن المقدار الأول إلا وأجزاء الرابع تنقص عن المقدار الثالث، فإن نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع.

مثاله أنّا نضع أربعة مقادير ا ب وجـ ود ه وزـ، ونفرضها على أن كل الأجزاء المتساوية التي توجد للجيم والزاي لا توجد أجزاء جـ أكثر من ا ب إلا وأجزاء زـ أكثر من د ه، ولا توجد أجزاء جـ مساويةً لـ ا ب إلا وأجزاء الزاي مساوية لـ د ه، ولا توجد أجزاء جـ ناقصةً عن ا ب إلا وأجزاء زـ ناقصة عن د ه؛ فأقول إن نسبة ا ب إلى جـ كنسبة د ه إلى زـ.



برهانه أنه لا يجوز غير ذلك؛ فإن جاز، فليكن نسبة ا ب إلى جـ كنسبة د ح إلى زـ، <ولنفرض أن د ح أكبر من د ه؛> فإن كان أصغر من زـ قلنا: نجزئ الزاي جزءًا فجزءًا، نبدأ بالنصف ثم بما يليه في التجزئة من الثُلث فما دونه، حتى يُنتهى إلى أوّلِ جزء الزاي يكون أصغر من ح ه، ونجعل ذلك الجزء طـ؛ فهو أقلّ من ح ه؛ ونأخذ من الجيم مثل ذلك الجزء، وهو كـ؛ ثم نفصّل د ه بأمثال طـ، ونبدأ بالتفصيل من جهة دـ، حتى يُنتهى إلى أول فصل يجاوز الهاءَ وليس ينتهي إلى الحاء، لأن ح ه أكبر من طـ؛ ولتكن تلك الفصول د ل ل م <م ن> ؛ ثم نفصّل ا ب بأمثال كـ؛

6 الثالث: الرابع — 9 للجيم: الجيم — 11 زـ: زه — 12 جـ: د

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

فسيكون فيه من أمثال كَ مثلُ ما كان في د ه من أمثال طـ؛ ويكون المثال لذلك خارجاً عن الباء زائداً على ا ب كما كان د ن زائداً على د ه، لأنا كذلك فرضنا مقادير [٧٧–و] ا ب جـ ود ه وزـ؛ ولتكن تلك الأقسام ا س س ع ع ف؛ فـ ا ف أجزاء من جـ ود ن مثل تلك الأجزاء من زـ وعلى عدّتها، لكن ا ف أكبر من ا ب ود ن أصغر من د ح؛ فما في ا ب من أجزاء جـ أقلّ مما في د ح من أجزاء زـ؛ وقد كانت نسبة ا ب إلى جـ كنسبة د ح إلى زـ؛ هذا خلف لا يمكن؛ فليس تكون نسبة ا ب إلى جـ كنسبةِ أكثر من د ه إلى زـ، وبمثل ذلك تبيّن أنه ولا كنسبة أصغر من د ه إلى زـ؛ فليس تكون نسبة ا ب إلى جـ إلا كنسبة د ه إلى زـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وإذ قد تبيّن ما قدّمنا وأمعنّا القول فيه، وضح لنا معنى المناسبة في المقادير المشتركة الممكن فيها النطق بالأجزاء على حقيقةِ مبلغها، وفي المقادير المتباينة وإن لم يوصل إلى النطق بحقيقة أجزائها؛ ففيما ذكرناه كفايةٌ إن شاء اللّه تعالى؛ فلنقل الذي كان غرضنا في هذا الكتاب، وهو الوجه الذي حدا أوقليدس على حدّ النسبة بأحد الأضعاف، واقتصارِه على ذلك دون تتميم أعراضِ النسبة ولواحقِها وكيفيّةِ زيادتها ونقصانها، وإضرابِه عن ذلك جملةً، واكتفائه بأحد الأضعاف.

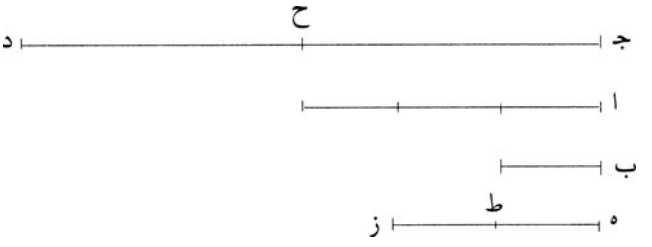
فأقول، واللّه الموفّق للصواب: إن المناسبة لما كانت على ما ذكرنا من الاعتبار بالأجزاء ومقاييساتِها، وكان كل شيء يعرض في الأجزاء المأخوذة فمثل ذلك يعرض في الأضعاف من زيادة أو نقصان أو تساوٍ، وكل ما امتنع في الأجزاء فممتنعٌ في الأضعاف، لأن التضعيف والتجزئة من باب واحد؛ لأن ابتداءهما من واحد، غير أن التضعيف يبدأ منه ذاهباً إلى التكثُّر والتزايُد، والتجزئة يبدأ منه راجعاً إلى التقليل والنقص، وكلاهما حكمُه واحد؛ ألا ترى أن المقدارين، إذا أمكن فيهما أن يوجد لأحدهما أجزاءٌ فتساوي أجزاءً ما للآخر، أمكن أن يؤخذ لأحدهما أضعافٌ ما تساوي أضعافاً ما للآخر، وذلك يكون في المقدارين المشتركين؛ فإذا امتنع أن يوجد

6 جـ: جد — 18 واحد (الأولى): مكررةً — 20 أن (الأولى): الي

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

لأحدهما البتّةَ أجزاءٌ تساوي أجزاءً للآخر، امتنع أن يكون لأحدهما أضعافٌ ما تساوي أضعافاً ما للآخر، وذلك يكون في المقدارين المتباينين؛ وكذلك إذا وُجد للمقدارين المختلفين قدرٌ ثالثٌ أصغر منهما يعدّ كلَّ واحد منهما ويكون له جزءًا، كذلك يوجد لهما ولكل واحد منهما ذو أضعاف.

ونزيد تشابُه أحوال الأضعاف بأحوال الأجزاء بياناً، وأقدّم <ما> يُحتاج إليه؛ مثاله أن آ أضعاف ما لـ ب، وقد أُخذ لـ آ ولـ ب أضعافٌ متساويةُ المرّات وهي ج د وه ز؛ فأقول [٧٧–ظ] إن ما في ج د من أضعاف ه ز مثلُ ما في آ من أضعاف ب.



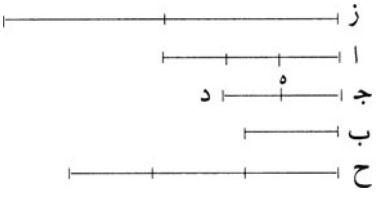
برهانه أن نقسم ج د بعددِ أضعاف آ، وهي ج ح وح د؛ ونقسم ه ز بعدد أضعاف ب، وهي ه ط ط ز؛ فـ ج ح مثل آ وه ط مثل ب، وكذلك ح د مثل آ وط ز مثل ب؛ فما في آ من أضعاف ب كذلك في ج ح من أضعاف ه ط، وكذلك في ح د من أضعاف ط ز؛ فما في كل ج د من أضعاف ه ز مثلُ ما في آ من أضعاف ب؛ وتمّ بيانُه.

فنقول إنه إذا كان مقداران مختلفان وأُخذ لأحدهما أجزاءٌ وقيست تلك الأجزاء إلى المقدار الآخر، فإن حالهما من الزيادة والنقصان والتساوي كحال الأضعاف المأخوذة للمقدار المجزّأ مع الأضعاف المأخوذة للمقدار الآخر، إذا كانت أضعاف المقدار المجزأ مثلَ عدة الأجزاء وكذلك أضعاف المقدار الآخر مثلَ العدد المسمي للأجزاء.

1 أضعافٌ: اضعافا — 4 ذو: ذا — 5 ونزيد: وتزيد — 6 أضعاف (الأولى): اضعافا

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

مثال ذلك أن مقداري آ ب مختلفان؛ وقد أُخذ لـ آ عدّةُ أجزاء وهي جـ د، وأحد تلك الأجزاء جـ ه؛ وقد أُخذ لمقدار آ من الأضعاف مثلُ ما في جـ د من عدّة جـ ه، وهو ز؛ وقد أُخذ لـ ب من الأضعاف مثلُ ما في آ من أضعافِ جزء جـ ه، وهو ح؛ فأقول إن حال جـ د مع ب من مساواة أو زيادة أو نقصان هي حال ز مع ح —
5 فـ ز الذي هو أضعاف آ مشابه الحال لـ جـ د الذي هو أجزاء آ، وح مشابه الحال لـ ب الذي هو أضعافه — إن كان جـ د مساوياً لـ ب فـ ز مساوٍ لـ ح، وإن كان جـ د أكبر من ب فـ ز أكبر من ح، وإن كان جـ د أصغر من ب فـ ز أصغر من ح.



برهانه أن في ح من أضعاف ب مثلَ ما في آ من أضعاف جـ ه، وأيضاً في ز من أضعاف آ مثلَ ما في جـ د من أضعاف جـ ه؛ فـ آ فيه أضعاف جـ ه، وقد أُخذ لـ آ
10 وجـ ه أضعافٌ متساويةٌ وهي ز وجـ د؛ فما في ز من أضعاف جـ د مثلُ ما في آ من أضعاف جـ ه؛ وقد كان في آ من أضعاف جـ ه مثلُ ما في ح من أضعاف ب؛ فما في ز من أضعاف جـ د مثل ما في ح من أضعاف ب؛ فإن كان جـ د مثل ب فأضعافه التي هي ز مثل ح التي هي أضعاف ب، وإن كان جـ د أصغر من ب فـ ز أصغر من ح، وإن كان جـ د أكبر من ب فـ ز أكبر من ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

15 وإذ قد تبيّن هذا فإنا نقول: إذا أردنا أن نقيس مقداراً ما إلى مقدار آخر بأجزائه، وأقَمْنا أضعافَ كل واحد منهما مقامَ الأجزاء على مثل ما بيّنّا في هذه الصورة، ظهر لنا في الأضعاف كلّ ما يظهر بالأجزاء من التساوي والزيادة والنقصان؛ وكذلك إذا عكسنا هذا الشكل [٧٨–و] قلنا: إذا كان مقداران مختلفين

6 مساوٍ: مساويا

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

وأُخذ لكل واحد منهما أضعافٌ مختلفةٌ للأخرى، فإن حالَ أضعاف المقدار الواحد مع أضعافِ المقدار الآخر <من> التساوي أو الزيادة أو النقصان كحال أجزاء أحد المقدارين مع المقدار الآخر نفسه، إذا كانت الأجزاء سميّةً لعدّة الأضعاف المأخوذة للمقدار الذي لم يُجزّأ، وكانت عدّةُ الأجزاء مثل عدة الأضعاف المأخوذة للمقدار المجزأ؛ فقد صحّ ما قلنا وقدّمنا ذكره أنّ الأضعاف تقوم مقامَ الأجزاء لا تغادر منها شيئًا ولا تخالفه.

فأقليدس إنما جعل بدلًا عن أخذ الأجزاء للثاني والرابع وقياسِ كل واحد من تلك الأجزاء إلى قرينه، أعني قياسَ أجزاء <المقدار> الثاني إلى المقدار الأول وقياسَ أجزاء المقدار الرابع إلى المقدار الثالث، وجعل عوضَ ذلك أن أخذ للثاني والرابع أضعافاً متساويةً فقامت أضعافُ كل واحد منهما مقامَ أجزائه، وأخذ للأول والثالث أضعافاً متساويةً فقامت أضعاف كل واحد منهما مقامَ نفسه؛ وكلّما يظهر في الأضعاف ويعرض فيها مع الأضعاف الأخر يظهر في الأجزاء ويعرض فيها مع المقدارين الآخرين.

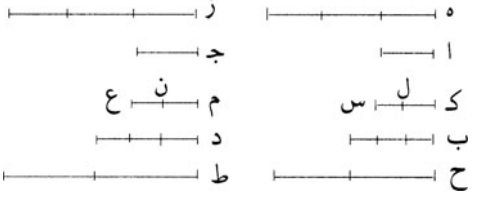
ونزيد ذلك بياناً في شكل ممثل، فنقول: إذا كانت أربعة مقادير، وكانت كلُّ الأجزاء المتشابهة العدة والأسماء المأخوذة للثاني والرابع لا توجد أجزاءُ الثاني تزيد على المقدار الأول إلا وُجدت أجزاء الرابع تزيد على المقدار الثالث، ولا توجد أجزاء الثاني ناقصةً عن المقدار الأول إلا وجدت أجزاء الرابع ناقصةً عن المقدار الثالث، ولا توجد أجزاء الثاني مساويةً للمقدار الأول إلا وجدت أجزاء الرابع مساويةً للمقدار الثالث، فإن كل الأضعاف المتساوية المأخوذة للأول والثالث وكلّ الأضعاف المتساوية المأخوذة للثاني والرابع لا توجد إلا إن كانت أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني فأضعاف الثالث زائدة على أضعاف الرابع، وإن كانت أضعاف الأول مساويةً لأضعاف الثاني فأضعاف الثالث مساوية لأضعاف الرابع،

1 أضعافٌ: اضعافا / للأخرى: للاخرين — 4 لم يُجزّأ: لم يجز — 11 مقام: اضعاف — 12 الأخر: للاخر / يظهر في الأجزاء: يظهر فى الاخر يظهر فى الاجزا — 20 للثاني: للثالث — 21 فأضعاف: واضعاف

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

وإن كانت أضعاف الأول ناقصةً عن أضعاف الثاني كانت أضعاف الثالث ناقصةً عن أضعاف الرابع؛ وأقول أيضاً إنه إذا كانت الأضعاف على هذه الشريطة فإن الأجزاء تكون على الشريطة المتقدمة، وأنّ هاتين الشريطتين ما وجد لإحداهما وصحّ وجد للأخرى وصحّ، وصحّت المناسبةُ في المقادير على الولاء، وتكون نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع.

مثاله أن مقادير ا ب ج د والشريطة التي ذكرنا في الأجزاء موجودةٌ فيها، أعني أن كل الأجزاء المتشابهة المأخوذة من ب ود لا توجد [٧٨–ظ] أجزاء ب زائدةً على ا إلا وأجزاء د زائدة على ج، ولا توجد أجزاء ب مساويةً لـ ا إلا وأجزاء د مساوية لـ ج، ولا توجد أجزاء ب ناقصةً عن ا إلا وأجزاء د ناقصة عن ج؛ فأقول إنه كلُّ الأضعاف المتساوية المأخوذة للأول والثالث، وكلّ الأضعاف المتساوية المأخوذة للثاني والرابع، لا توجد أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني إلا وُجدت أضعاف الثالث زائدةً على أضعاف الرابع، ولا توجد أضعاف الأول مساويةً لأضعاف الثاني إلا وأضعاف الثالث مساوية لأضعاف الرابع، ولا توجد أضعاف الأول ناقصةً عن أضعاف الثاني إلا وأضعاف الثالث ناقصة عن أضعاف الرابع.



برهانه أنه لا يمكن غير ذلك؛ فإن أمكن، فليؤخذ لـ ا وج أضعافٌ متساويةٌ وهي ه ز، ولـ ب ود أضعافٌ متساويةٌ وهي ح ط، ويكون حال ه مع ح غير حال ز مع ط من التساوي أو الزيادة أوالنقصان، تكون ه أعظم من ح وز ليس بأعظم

3 لإحداهما: لاحدهما — 11 أضعاف (الأولى): اجزا — 15 أضعافٌ: اضعافا — 16 د: حـ

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

من ط، إن كان يمكن ذلك؛ ونأخذ من ب الجزءَ السميَّ لما في ه من أضعاف ا ولِما في ز من أضعاف ج، إذْ هما سواءٌ، وهو ك ل، ومن <د> ذلك الجزءَ بعينه، وهو م ن؛ ونجعل في ك س من أضعاف ك ل مثلَ ما في ح من أضعاف ب ومثلَ ما في ط من أضعاف د، إذ هما سواء؛ وكذلك نجعل في م ع من أضعاف م ن مثلَ تلك الأضعاف؛ ف ك س أجزاء ب وم ع مثل تلك الأجزاء من د؛ ف ا ب مقداران مختلفان، وقد أُخذ لأحدهما وهو ب أجزاءٌ وهي ك س، وقد أُخذ ل ب من الأضعاف وهي ح مثلُ ما في ك س من عدّة الأجزاء؛ وأُخذ ل ا من الأضعاف وهي ه مثلُ العدد السميّ للأجزاء؛ فيما تبيّن في الشكل الذي قبل هذا أنّ حال ه مع ح كحال ا مع ك س من التساوي أو الزيادة أو النقصان؛ وه فرضناها أعظم من ح، ف ا أعظم من ك س؛ وكذلك التدبير في قدري ج د وأضعافِهما وأجزائهما؛ فحال ز مع ط كحال ج مع م ع من التساوي أو الزيادة أو النقصان؛ وقد كان ز ليس بأعظم من ط، ف ج ليس بأعظم من م ع؛ وا أعظم من ك س، و ك س وم ع أجزاءٌ متشابهةُ العدة والأسماءِ ل ب ود، وقد وُجدت أجزاء ب التي هي ك س أصغرَ من ا، ووجدت أجزاء د التي هي م ع ليست بأصغر من ج؛ هذا خلفٌ لا يمكن، لأنا قد كنّا فرضنا المقادير لا توجد لها أجزاءٌ إلا على الشريطة التي ذكرنا من التساوي أو الزيادة أو النقصان؛ فقد تبيّن أنه متى كانت شريطةُ الأجزاء المذكورةُ موجودةً، فإن شريطة الأضعاف موجودة والمناسبةَ موجودة؛ وذلك ما أردنا بيانه؛ [٧٩–و] وبمثل هذا التدبير تبيّن لنا إذا فرضنا في هذه المقادير شريطة الأضعاف موجودة، فإن شريطة الأجزاء موجودة والمناسبة موجودة.

فإذ قد تبيّن بياناً شافياً أنّ حدّ النسبة بالأضعاف صحيح، وأنّ كلّما يوجد في الأجزاء فمثلُه يوجد في الأضعاف، وأنهما في بلوغ الحقيقة والوقوفِ على الصحّة سواءٌ لا يناقض أحدُهما صاحبه ولا يوجب أحدهما ما أحاله الآخرُ ولا يُحيل ما أوجبه، فإنا نقول: إن محاولة البراهين للنسبة وما يعرض فيها من اللواحق والأعراضِ

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

ورَوْمَ ذلك بالأضعاف أحسنُ منه بالأجزاء وأسهلُ لوجوه كثيرة؛ منها أنّ أخذ الأضعاف لكل واحد من المقادير لا يتعذّر، قلّت أو كثرت؛ وأما أخذُ الأجزاء لمقدارٍ ما حتى تتجاوز الأجزاء ذلك المقدار وتسميةُ ما هو أكبر من الشيء أجزاء له، فإن ذلك مما يتعذر إذ لم يجرِ بذلك تعارفٌ، وإنما يُسمّى بالأجزاء من الشيء ما كان **أقلَّ** منه؛ وقد قدّمنا ذلك في صدر هذا الكتاب؛ فإن اجتنبنا هذا الوجه وتوخَّينا أن لا نأخذ الأجزاء إلا من أكبر القرينين — **المقدَّم** أو التالي — لم يَسَعْنا ذلك ولا استطعناه حتى نعلم الأكبر من المقدم والتالي في كل موضع من أوضاع النسبة؛ وفي الأضعاف لا نحتاج إلى شيء من ذلك؛ وإنما يعلم سهولةَ ذلك من صعوبته مَن رام العبارة عن حد النسبة بالأجزاء ورامها بالأضعاف، فإنّ بينهما بوناً عظيماً في عسرِ المرام وقبحِ العبارة؛ وأيضاً لو أجرينا حدود النسبة على العمل بالأجزاء، لقلبنا الأشكال المحتاج إليها المقدمة في الخامسة من المقالات، ولَرددناها من الأضعاف إلى الأجزاء؛ وأخذُ الأجزاء أطول عملاً وأشقّ مراماً، لأن الأضعاف إنما هي أن تضعّف المقدار بعدّةٍ ما؛ وفي الأجزاء يُحتاج إلى عدّة الأجزاء ومن أسماء الأجزاء هي ومع هذا كلّه؛ فإن معرفة الجليل من الحساب أيسر وأسهل من معرفة الدقيق.

وكذلك وجدنا العلماء المتقدّمين في كل فنٍّ من فنون العلم فعلوا؛ فإن أهل الحساب في الباب المسمّى بالكسور عندهم فرّوا من محاولة العمل بالأجزاء في جمعها وطرحها، وصرفوها إلى الأعداد الصِحاح؛ وتحيَّلوا لذلك بأن أقاموا للأجزاء أعداداً اشتقّوها من أسماء الأجزاء، وضاعفوا الأجزاء تلك الأعداد السميّة لها، حتى صحّت تقريباً على المبتدئ؛ وكذلك نجد الأستاذين من المَهَرة العالمين فعلوا أيضاً؛ [٧٩–ظ] فإن الناظرين في حساب الكواكب — منهم بطلميوس وغيره — لم يثبتوا الأجزاء وفرّوا منها ومن جنسها إلى أسماءٍ استنبطوها؛ فقسموا الواحد بستّين قسماً ليعوّضوا من التعلّق بالنصف والثلثِ وما هو أعسر من ذلك ومحاولةِ ضربه وجمعِه وغير ذلك

17 وصرفوها: وصرفها — 18 وضاعفوا الأجزاء: وضاعفوالاجزا

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

بأعداد صحاح؛ وكذلك حين احتاجوا إلى تلك الأجزاء قسموها أيضاً بأعداد صحاح، كل واحد بستّين، وأحدثوا لها أسماءً من الدقائق والثواني والثوالث وغيرها.

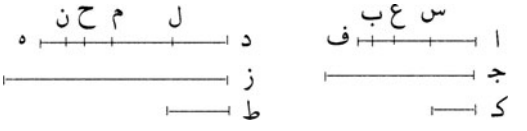
وإذ قد ذكرنا هذا، فلنذكر المقدّمة الشرطيّة ذاتَ الأضعاف التي استعملها أوقليدس؛ ونلخّصها وربما خالفنا نسق أقليدس لها لما نظنّ في ذلك من موافقة الغرض المقصود، فنقول: إذا كانت نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع، فإن كل أضعاف متساويةٍ توجد للأول والثالث وكلّ أضعاف متساوية توجد للثاني والرابع، فإنها لا توجد إلا إن كانت أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني فإن أضعاف الثالث زائدة على أضعاف الرابع، وإن كانت أضعاف الأول مساويةً لأضعاف الثاني فإن أضعاف الثالث مساوية لأضعاف الرابع، وإن كانت أضعاف الأول ناقصةً عن أضعاف الثاني فإن أضعاف الثالث ناقصة عن أضعاف الرابع؛ وأيضاً فإنا نعكسها فنقول: إذا كانت أربعة مقادير، وكانت كل أضعاف متساوية توجد للأول والثالث وكلّ أضعاف متساوية توجد للثاني والرابع، فإنها لا توجد إلا إن كانت أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني فإن أضعاف الثالث تزيد على أضعاف الرابع، وإن كانت أضعاف الأول مساويةً لأضعاف الثاني فإن أضعاف الثالث مساوية لأضعاف الرابع، وإن كانت أضعاف الأول ناقصةً عن أضعاف الثاني فإن أضعاف الثالث ناقصة عن أضعاف الرابع، فإن نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع.

والذي بقي علينا في هذا الكتاب ذكرُ النسبة التي هي أعظم من نسبة أخرى؛ فأقول: إذا كانت أربعة مقادير، وكان في الأول من أجزاء الثاني أكثرُ مما في الثالث من أجزاء الرابع تلك، فإنّ قدر الأول عند الثاني أعظم من قدر الثالث عند الرابع؛ وهذا مما لا يحتاج فيه إلى برهان، لأن ما فيه أجزاء أكثر هو أعظم نسبةً من الذي فيه أجزاء أقلّ؛ وأقول أيضاً إن هذه القضية أيضاً منعكسة، وذلك أنه إذا كان قدر الأول من الثاني أعظمَ من قدر الثالث من الرابع، فإنه قد يوجد للثاني والرابع أجزاءٌ ما ويكون في الأول [٨٠–و] من أجزاء الثاني أكثرُ مما يكون في الثالث من أجزاء الرابع.

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

ونقدّم لذلك أشياء كثيرة الغناء فيما يحتاج إليه من ذلك؛ فأقول إنه: إذا كانت أربعة مقادير، وكانت كل الأجزاء الذي توجد للثاني والرابع لا توجد إلا إن كانت أجزاء الثاني تزيد على المقدار الأول فإن أجزاء الرابع تزيد على المقدار الثالث، وإن كانت أجزاء الثاني تنقص عن المقدار الأول فإن أجزاء الرابع تنقص عن المقدار الثالث، فإن المقادير متناسبة وإن لم نذكر شريطة التساوي، فإنّ ذكر التساوي وتركَه سواءٌ؛ فإنها إذا حُصرت بالزيادة والنقصان معاً، كانت شريطة التساوي واجبةَ الوجود ضرورةً، وكانت المناسبة في المقادير موجودةً.

مثاله أنّا نفرض أربعة مقادير ا ب وجـ ود ه وزـ؛ ونجعل أن كل الأجزاء المتشابهة العدّة والأسماء المأخوذة من جـ وزـ لا توجد إلا إن كانت أجزاء جـ زائدةً على ا ب فإن أجزاء زـ زائدة على د ه، وإن كانت أجزاء جـ ناقصةً عن ا ب فأجزاء زـ ناقصة عن د ه، وليس للتساوي ذكرٌ؛ فأقول إنه لا توجد أجزاء جـ مساويةً لـ ا ب إلا وأجزاء زـ مساوية لـ د ه.



برهان ذلك أنه لا يجوز غيره؛ فإن جاز، فليكن ا ب أجزاءً تامّةً من جـ، وليكن في د ه من تلك الأجزاء <من زـ> أقلّ أو أكثرُ، فليكن د ه أكثر؛ وليكن في د ح من أجزاء زـ مثلُ ما في ا ب من أجزاء جـ؛ ولا تزال تجزئ زـ حتى تبلغ إلى أول جزء له يكون أصغرَ من ه ح، وليكن ذلك الجزء طـ؛ فهو أصغر من ه ح؛ ونأخذ مثل ذلك الجزء من جـ، وهو كـ؛ ثم نفصل من د ه ما فيه من أمثال طـ؛ ولا بدّ أن يقع فصلٌ منها بين ح وه، لأن ح ه أكبر من طـ؛ ولتكن تلك الفصول د ل ل م م ن؛ ثم

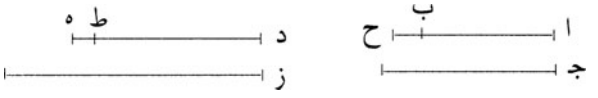
1 ونقدّم لذلك: وتقدم كذلك — 12 زـ: جـ — 16 ه ح: دح — 18 منها: منهما

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

نفصل ا ب بما فيه من أمثال كَ؛ فينفصل منه مثلُ عدّة ما انفصل من د ح من أمثال طَ، لأنا قد كنّا وضعنا أن نسبة ا ب من جَ كنسبة د ح من زَ، إذْ في كل واحد منهما من أجزاءِ قرينه عدّةٌ سواءٌ؛ فتكون الأقسام ا س وس ع وع ف؛ فيكون ا ف أكبر من ا ب كما أن د ن أكبر من د ح؛ فـ ا ف أجزاء من جَ ود ن مثل تلك الأجزاء من زَ وعلى عدّتها؛ لكن ا ف أكبر من ا ب ود ن أصغر من د ه؛ فقد وُجد لـ جَ وزَ أجزاءٌ متساويةٌ، ووُجدت أجزاء جَ زائدةً على ا ب وأجزاء <زَ> ناقصة عن د ه؛ وقد كانت وضعت على أن لا توجد لـ جَ وزَ أجزاءٌ متساويةٌ فتوجد أجزاء جَ زائدةً على ا ب إلا وجدت أجزاء زَ زائدةً على د ه؛ هذا خلفٌ لا يمكن، فإذاً لا توجد لـ جَ أجزاءٌ تساوي ا ب إلا وُجدت مثل تلك الأجزاء لـ زَ تساوي د ه؛ فقد صحّ وجودُ الشروط الثلاثة من التساوي والزيادة والنقصان، وبوجودها تصحّ [٨٠-ظ] المناسبة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأقول أيضاً إنه: إذا كانت نسبة الأول إلى الثاني أعظمَ من نسبة الثالث إلى الرابع، فإنه لا يوجد للثاني والرابع أجزاءٌ متساويةٌ فتوجد أجزاء الثاني زائدةً على المقدار الأول إلا وُجدت أجزاء الرابع زائدةً على المقدار الثالث.

مثاله أن نسبة ا ب إلى جَ أعظم من نسبة د ه إلى زَ؛ فأقول إن كل واحد من الأجزاء المتساوية التي توجد لـ جَ وزَ فتوجد أجزاء جَ زائدةً على ا ب، فإن أجزاء زَ زائدة على د ه.



برهانه أنه لا يجوز غير ما ذكرنا؛ فإن جاز أن تكون لـ جَ وزَ أجزاءٌ متساويةٌ، فتوجد أجزاء جَ زائدةً على ا ب وأجزاء زَ ليست بزائدة على د ه، فلتكن أجزاء جَ

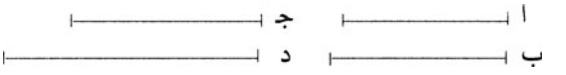
3–4 ا ف أكبر من ا ب: اب اكبر من ا ف — 4 د ح: حح — 5 ا ف أكبر من ا ب: اب اكبر من اف

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

الزائدة على ا ب ا ح، وتلك الأجزاء من ز التي ليست بزائدة على د ه د ط؛ ف د ط وا ح أجزاء متساوية من ز وجـ؛ فما في د ه من أجزاء ز أكبُر مما في ا ب من أجزاء جـ، فنسبة د ه إلى ز إذاً أعظم من نسبة ا ب إلى جـ؛ وقد كانت نسبة ا ب إلى جـ هي العظمى؛ هذا خلفٌ لا يمكن؛ فليس يوجد لـ جـ أجزاءٌ زائدةً على ا ب إلا وتلك الأجزاء من ز زائدة على د ه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وإذ قدّمنا ذكر هذا كلّه، فأقول إنه: إذا كانت أربعة مقادير، نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع، فإنه قد يوجد للثاني والرابع أجزاءٌ ما توجد أجزاء الثاني ناقصةً عن المقدار الأول وأجزاء الرابع غير ناقصة عن المقدار الثالث.

مثال ذلك أن نسبة آ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى دـ؛ فأقول إنه قد يمكن أن يوجد لـ ب ودـ أجزاءٌ ما متساويةٌ وتكون أجزاء ب ناقصةً عن آ وأجزاء دـ ليست بناقصة عن جـ.



برهانه أن ذلك قد يوجد في بعض الأجزاء لهما المأخوذة من ب ودـ؛ <وإلا> لا توجد أجزاء ب ناقصةً عن آ إلا وُجدت أجزاء دـ ناقصةً عن جـ؛ وأيضاً من أجلِ أنّا كنّا وضعنا أن نسبة الألف إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى دـ، فإنه كل الأجزاء المتساوية التي توجد لـ ب ودـ لا توجد أجزاء ب زائدةً على آ إلا وُجدت أجزاء دـ زائدةً على جـ، على ما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا؛ ف آ وب وجـ ودـ أربعة مقادير، وكل الأجزاء المأخوذة لـ ب ودـ لا توجد إلا إن كانت أجزاء ب زائدةً على آ فأجزاء دـ زائدة على جـ، وإن كانت أجزاء ب ناقصةً عن آ فأجزاء دـ ناقصة عن جـ؛ فنسبة آ إلى ب كنسبة جـ إلى دـ؛ وقد كنّا فرضنا نسبة آ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى دـ؛ هذا خلف لا يمكن؛ فليست كل الأجزاء المأخوذة من ب الموجودة أصغر [٨١–و] من آ

2 مما: ممن

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

وتكون الأجزاء المأخوذة من دَ أصغرَ من جَ ضرورةً؛ بل قد يوجد للباء أجزاءٌ تنقص عن اَ ولا تنقص أجزاء دَ عن جَ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وهنالك يصحّ من جهة الأضعاف أنه إذا كانت نسبة الأول إلى الثاني في غير نسبة الثالث إلى الرابع، فإنه يمكن أن يوجد للأول والثالث أضعافٌ متساويةٌ وللثاني والرابع أضعافٌ متساويةٌ، فتوجد أضعاف الثاني ناقصةً عن أضعاف الأول وأضعافُ الرابع ليست بناقصة عن أضعاف الثالث، كما وجدنا أجزاء الثاني ناقصة عن الأول وأجزاءُ الرابع ليست بناقصة عن الثالث؛ وسواءٌ قلنا إن أضعاف الثاني ناقصة عن أضعاف الأول وأضعاف الرابع ليست بناقصة عن أضعاف الثالث، وقلنا إن أضعاف الأول زائدة على أضعاف الثاني وأضعاف الثالث ليست بزائدة على أضعاف الرابع؛ فلنذكرها مجرَّدةً على ما ذكرها أقليدس، فنقول إنه: <إذا> كانت أربعة مقادير، وأمكن أن يوجد للأول والثالث أضعافٌ متساويةٌ وللثاني والرابع أضعافٌ متساويةٌ، فتوجد أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني وأضعاف الثالث غير زائدة على أضعاف الرابع، فإن نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع؛ وأما عكسها الذي بيّنا وجوده فهو: إذا كانت نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع، فإنه قد يوجد للأول والثالث أضعافٌ متساويةٌ وللثاني والرابع أضعافٌ متساويةٌ، فتوجد أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني وأضعاف الثالث غير زائدة على أضعاف الرابع.

فقد بيّنّا في هذه الكتب صحّةَ ما ذكره أقليدس من الأضعاف، وأنه لم يؤْثِر تفسيرَ النسبة بالأضعاف عن غير علّةٍ رابطة لها بالنسبة ربطاً صحيحاً؛ بل لا سبيل إلى أن يوجد شيءٌ أصحّ ارتباطاً بالنسبة ولا أشدّ حصراً وضبطاً لفصولها وخواصِّها من الأضعاف؛ لأنه لا يمتري أحدٌ أن النسبة إنما هي مقايسةُ مقدار بمقدار آخر ليُعلم قدرُ أحدهما من الآخر؛ ولا يُعلم قياسُ الصغير إلى الكبير إلا بأجزاء الكبير؛ وإنما

1 دَ: ه — 8 الثالث: الاول

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

الأضعاف تكبير الأجزاء، والأضعاف تعمّ قياسَ الصغير إلى الكبير وقياسَ الكبير إلى الصغير، والأجزاء إنما جرت العادة بطريقها في قياس الصغير إلى الكبير؛ وإن كنّا في هذا الكتاب لم نبالِ بذكرنا الأجزاءَ أيّ موقع أوقعناها، لما ذهبنا [٨١–ظ] إليه من تسهيل الكلام وتخفيفِه من أجل حاجتِنا إلى كثرة تكراره واستعمالِه، وكلّما كان استعماله في الكلام كثيراً كان جديراً بالتخفيف والحذف.

وأما كيف توجد في النسبة العظمى والأضعافُ المتساوية المأخوذة للأول والثالث والأضعافُ المتساوية المأخوذة للثاني والرابع، وتكون أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني وأضعاف الثالث غير زائدة على أضعاف الرابع، كيف الطريق إلى استخراجِ تلك الأضعاف إذْ هذه الشريطة لا توجد في كل الأضعاف ضرورةً، إنما هي قد توجد في بعض الأضعاف على ما ذكرنا، فإنا نعلم لها وجهاً يُستخرج به إلا بعد أن نعلم كيف يُستخرج مقدار رابع تكون له نسبة إلى ثلاثة مقادير متناسبة مفروضة معلومة، ونريد أن نجد مقداراً رابعاً آخر يكون رابعاً لها ومتضمّناً معها، حتى تكون نسبة الأول المفروض إلى الثاني المفروض كنسبة الثالث المفروض إلى الرابع المطلوب؛ فإنا إذا لم نعلم كيف يُستخرج هذا المقدار الرابع للثلاثة المفروضة، فإنا لا نعلم وجهاً نصل به إلى وجود الأضعاف على الشريطة المذكورة.

وفي المقالة السادسة كيف يستخرج لمقدارين مقداراً ثالثاً مناسباً لهما، وفي قوة المقالة كيف يستخرج رابعاً لثلاثة، لكن إنما ذلك إذا كانت المقادير خطوطاً كلّها؛ فأما في الزوايا أو السطوح أو الأجسام فلم نَرَ ذلك؛ وقد رأينا أقواماً استخرجوا هذه الأضعاف المذكورة وسامحوا أنفسهم بوجود هذا المقدار الرابع دون طريقة في العمل توجِدُهم إياه؛ ولا فرق عندي بين من سامح في وجود هذا المقدار الرابع أو سامح في وجود الأضعاف على الشريطة المذكورة؛ ولهذه العلّة نرى – واللّه أعلم – أن أقليدس استعمل هذه الأضعاف في الشكل الثاني عشر من المقالة االخامسة دون أن

4 تخفيفه: تحقيقه — 7 للثاني: للثالث

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press

تقدّم قبل ذلك كيف السبيل إلى استخراجها؛ ولا يقدح مثلُ هذا في البرهان ولا يخلّ به، لأنه إذا صحّ أن الشيء موجود واجب فلا بأس أن يُحتجّ بوجوده ويُبرهن به على شيء آخر؛ لأنه لو لم يسُغْ هذا في البرهان لَما جاز لنا مثلاً أن نعتقد أنّ ضلع المسبَّع الواقع في الدائرة أصغرُ من ضلع المسدَّس وأكبرُ من ضلع المثمَّن الواقعين في دائرة واحدة، ولا أنّ ضلع ذي الإحدى عشرة قاعدةً أصغرُ من ضلع المعشَّر وأكبرُ من ضلع ذي الاثنتي عشرة قاعدةً الذين في دائرة واحدة؛ إذْ إخراجُ وترِ المسبّع لا يمكن على طريق الهندسة؛ لكنا إذا أردنا أن نبين أنه أكبر من [٨٢–و] ضلع المثمّن، مثّلنا وتراً وجعلناه أنه يوتّر سُبع الدائرة على التمثيل لا على التحقيق، ثم نسقنا البرهان على ما يجب؛ فليست تقدح عدم العملية في العلمية؛ وإنما يقدح في العملية مثلها مثلُ لو أردنا أن نستخرج ضلع ذي الأربع عشرة قاعدةً المتساوي الأضلاع الواقع في الدائرة؛ لم يُجزْ لنا أن نمثّل وتراً ونجعله يوتّر سُبع الدائرة على غير تحقيق، ثم نقسم القوس بنصفين ونتمّم الشكل؛ فمثل هذا لا يجوز؛ والفرقان بيّن، فإن جوازَ مثل هذا في إقامة البرهان وامتناعَه في إخراجِ عمل إلى حدّ الفعل ظاهرٌ بيّنٌ، إن شاء الله تعالى.

وإذ قد انتهى بنا القولُ إلى هذا المكان وذكرنا ما كنّا أملنا ذكره، فقد آن لنا أن نقطع الكلام ونختمه بحمد الله، جلّ ثناؤه وتقدّست أسماؤه؛ ونسأله مغفرةً وصفحاً عن الخطأ والزلل والتوفيق لما يرضاه من الحقّ في القول والعمل.

كملت المقالة في شرح النسبة من كلام الفقيه

أبي عبد الله محمد بن معاذ الجياني

رحمه الله

5 عشرة: عشر — 6 الاثنتي عشرة: الاثنى عشر — 10 الأربع عشرة: الاربعة عشر

https://doi.org/10.1017/S0957423913000015 Published online by Cambridge University Press