Arabic Sciences and Philosophy, vol. 22 (2012) pp. 119–136
doi:10.1017/S0957423911000129 © 2012 Cambridge University Press

DE L'USAGE DES CONIQUES CHEZ IBRĀHĪM IBN SINĀN

HÉLÈNE BELLOSTA
Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, SPHERE, UMR 7219, CNRS, F-75205 Paris, France

Abstract. Once Apollonius' *Conics* had been translated from Greek into Arabic, they became a main reference and the principal tool in studying solid problems, algebraic equations of 3rd and 4th degrees, infinitesimal mathematics, etc. Mathematicians of the 9th–10th centuries also studied the conic sections' constructions, as well as their continuous drawing and their drawing by points. Ibrāhīm ibn Sinān (909–946), as his grandfather Thābit ibn Qurra (826–901), was one of the most active and inventive mathematicians in these fields. Late Hélène Bellosta examined in this article Ibn Sinān's contribution.

Résumé. Une fois les *Coniques* d'Apollonius traduits en arabe, ces livres sont devenus la référence indispensable et le principal instrument dans l'étude des problèmes solides, des équations algébriques des 3e et 4e degrés, des problèmes des mathématiques infinitésimales, etc. Les mathématiciens des IXe-Xe siècles ont également étudié les constructions des sections coniques ainsi que leur tracé par points et leur tracé continu. Ibrāhīm ibn Sinān (909–946), comme son grand-père Thābit ibn Qurra (826–901), était l'un des mathématiciens les plus actifs et les plus inventifs en ce domaine. Dans cet article, la regrettée Hélène Bellosta a examiné la contribution d'Ibn Sinān.

La théorie des coniques prend, à partir du IXe siècle, dans le monde arabe, une importance jamais vue auparavant, elle unifie des domaines jusque-là distincts et occupe une place centrale dans les travaux des géomètres. La traduction arabe des *Coniques* d'Apollonius, faite au IXe siècle à l'instigation des Banū Mūsā et suscitée par les recherches en cours – essentiellement celles d'al-Ḥasan ibn Mūsā sur l'ellipse ou "figure circulaire allongée" – inaugure toute une tradition.[1] Les coniques, non seulement pour leurs applications pratiques – astrolabes, cadrans solaires, miroirs ardents et plus tard lentilles – ou théoriques – résolution géométrique des équations algébriques du troisième degré –, mais aussi en tant qu'objets géométriques, focalisent les recherches des géomètres. Les problèmes solides – trisection de l'angle et construction de l'heptagone

[1] *Apollonius de Perge. Les coniques,* Tome 1.1*: Livre I*, éd. R. Rashed (Berlin et New York, 2008).

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

régulier tout particulièrement – sont l'objet, à partir du IXe siècle, d'un véritable engouement.[2] Ces travaux rendent nécessaire de se pencher sur la construction des sections coniques, problème peu ou pas abordé par les géomètres de l'Antiquité gréco-hellénistique.[3] Deux modes de construction dont les problématiques et les objectifs diffèrent vont être tentés: constructions par points et méthodes de tracé continu (à l'aide d'instruments, dont le compas parfait). On doit au géomètre de la première moitié du Xe siècle, Ibrāhīm ibn Sinān, le premier traité entièrement dévolu au problème de la construction par points des trois coniques.

LES TRAVAUX D'IBN SINĀN PORTANT SUR LA GÉOMÉTRIE DES CONIQUES

Ceux des travaux d'Ibn Sinān (909–946) qui nous sont parvenus, portant sur la géométrie des coniques – traité sur *La quadrature de la parabole*, traité sur *Les instruments des ombres*, traité sur *Le tracé des trois sections coniques* – témoignent de la vitalité, dans la première moitié du Xe siècle, des recherches portant sur ce chapitre des mathématiques; ces travaux portent la double marque de l'intérêt porté par Ibn Sinān aux transformations géométriques, dans la lignée des recherches de son aïeul Thābit ibn Qurra (mort en 901), traducteur d'Apollonius,[4] et à la géométrie pratique.

Dans son traité sur *La quadrature de la parabole*,[5] qui se rattache plutôt à la tradition archimédienne des mathématiques infinitésimales, Ibn Sinān étudie les effets d'une transformation affine bijective quelconque (définie dans le plan par les images non alignées de trois points non alignés) sur un arc de parabole et démontre les deux propriétés suivantes (la deuxième propriété étant démontrée par exhaustion):

- une transformation affine bijective transforme un segment de parabole en un segment de parabole de base l'image de la base et de sommet l'image du sommet,
- une transformation affine bijective conserve la proportionnalité des aires des segments de parabole (qu'elle multiplie par la

[2] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle,* vol. III*: Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique* (Londres, 2000).

[3] Voir O. Neugebauer, "The astronomical origin of the theory of conic sections", *Proceedings of the American Philosophical Society*, 92 (1948): 136–8.

[4] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au IXe siècle,* vol. I*: Fondateurs et commentateurs* (Londres, 1996), "Ibn Qurra, sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale", pp. 458–673.

[5] *Ibid.*, "Ibn Sinān, sur la mesure d'une portion de parabole", pp. 675–735; R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle* (Leyde, 2000), "Quadrature de la parabole et transformations affines", pp. 229–44.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

même constante que les aires des triangles inscrits correspondants).[6]

Le traité sur *Les instruments des ombres*,[7] c'est-à-dire les cadrans solaires, qu'Ibn Sinān classe parmi ses œuvres en astronomie, relève plutôt de la géométrie pratique, domaine qui, au x^e^ siècle, accède au rang de discipline et se voit doté d'un authentique statut. Dans ce traité, qui nous est malheureusement parvenu incomplet, Ibn Sinān entend présenter une théorie unifiée des cadrans solaires; un des problèmes pratiques qui se posent alors au géomètre est de tracer, pour un jour de l'année donné, la courbe que décrit l'extrémité de l'ombre du gnomon sur le plan du cadran, c'est-à-dire tracer une conique dont on connaît la nature, l'axe, un ou deux sommets sur cet axe, et un ou deux points. Ibn Sinān aurait en outre, selon ses propres dires, composé un traité qui ne nous est pas parvenu, destiné à un fabricant d'instruments astronomiques, sur la fabrication des cadrans solaires. Dans ce traité il aurait donné, sans démonstration, une caractérisation des coniques que l'on trace sur un cadran valable pour des artisans qui travaillent à la main.[8]

C'est dans la logique de ces travaux, et en lien avec eux, qu'Ibn Sinān a consacré à la construction par points, à la règle et au compas, des trois sections coniques le traité sur *Le tracé des trois sections coniques*,[9] premier traité du genre entièrement dévolu à ce problème.[10]

[6] Notons que ces deux propriétés pourraient sans peine être étendues à des segments d'ellipse ou d'hyperbole, ce que ne fait pas Ibn Sinān car son but est seulement la détermination de l'aire d'un segment de parabole; en effet, la suite de sa méthode ne pourrait s'étendre aux autres coniques: le rapport des aires des triangles obtenus par duplications successives de la base du segment de conique dont on cherche l'aire, n'est plus constant dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole.

[7] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, "Les cadrans solaires", pp. 291–433.

[8] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, "Autobiographie", p. 10. Ce type de collaboration ne semble pas avoir été exceptionnel au x^e^ siècle, même si nous en avons peu de traces: Abū al-Wafāʾ al-Būzjānī (940–998), dans son traité *Sur les constructions géométriques nécessaires aux artisans* (*Fīmā yaḥtaju ilayhi al-ṣānīʿ min al-aʿmāl al-handasiyya*), fait également allusion à ce type de collaboration entre artisans et géomètres et souligne les différences d'attitude des uns et des autres devant les problèmes ainsi débattus, par manque de sens pratique en ce qui concerne les géomètres, par manque de connaissances théoriques dans le cas des artisans.

[9] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, "Tracé des sections coniques et transformations géométriques", pp. 245–89.

[10] En ce qui concerne les constructions par points, il existe certes dans l'Antiquité quelques méthodes, essentiellement chez Dioclès dans son traité sur *Les miroirs ardents* (entre la première moitié du II^e^ siècle BC et la première moitié du I^er^ siècle AD). Il y démontre, pour la première fois, la propriété foyer-directrice de la parabole (absente des *Coniques* d'Apollonius) et en déduit une construction point par point, à la règle et au compas, de la parabole; sa construction, classique, fait correspondre à tout point de la directrice un point de la parabole; il fabrique ensuite un gabarit en courbant une règle de corne pour la superposer avec les points ainsi construits. Voir *Livre de Dioclès sur les miroirs ardents* dans R. Rashed, *Les catoptriciens grecs* (Paris, 2000), pp. 112–14.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

LE TRACÉ DES TROIS SECTIONS CONIQUES

Ce traité, qu'Ibn Sinān lui-même qualifie de "subtil", précède les traités exposant des méthodes de tracé continu à l'aide d'instruments – dont le compas parfait –, qui ne verront le jour que dans la deuxième moitié du x^{e} siècle.[11] Ibn Sinān signale en effet dans son *Autobiographie* qu'il ne connaît aucun instrument pour tracer de façon continue les trois sections coniques – peut-être connaissait-il cependant la méthode "du jardinier" pour le tracé de l'ellipse, qu'al-Sijzī quelques décennies plus tard attribuera à d'al-Ḥasan ibn Mūsā:[12]

> J'ai également fait un chapitre subtil sur *Le tracé des trois sections*, car il n'y a pas d'instrument pour tracer les sections coniques; j'ai donc fait ce chapitre dans lequel j'ai montré comment trouver de nombreux points, en quelque nombre que l'on veut, sur celle des coniques que l'on veut.[13]

Tout au long de ce traité Ibn Sinān insiste sur le fait que l'on peut, avec ses méthodes, construire une infinité de points de chacune de ces coniques, en quelque nombre que l'on veut. Les méthodes qu'indique Ibn Sinān permettent en effet de construire, à la règle et au compas, tout point de chaque conique et non seulement certains d'entre eux, fussent-t-ils en nombre infini (comme ce serait le cas pour des courbes transcendantes):

> Lorsque nous avons trouvé que le tracé de ces trois sections par le compas ou d'autres instruments est difficile, nous nous sommes ingéniés à tracer de nombreux points dont l'homme peut augmenter le nombre à volonté et tels que ces points seront sur l'une des trois sections. Tout ce que nous avons déterminé montre ainsi comment ces sections, ainsi que d'autres, s'engendrent à partir du cercle.[14]

[11] Le premier à avoir consacré un traité au compas parfait est le géomètre de la deuxième moitié du x^{e} siècle, al-Qūhī (*Sur le compas parfait*, dans R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* [Londres, 2005], pp. 726–806). D'autres mathématiciens, en particulier son contemporain al-Sijzī, consacreront également des traités à cet instrument (voir *Sur la construction du compas parfait*, dans R. Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī,* vol. I*: Géométrie des coniques et théorie des nombres au x^{e} siècle* [Louvain, 2004], pp. 282–309). Ibn Sahl, toujours dans la deuxième moitié du x^{e} siècle, donnera, dans son traité *Sur les instruments ardents*, des méthodes mécaniques de constructions des trois coniques, usant de fils inextensibles, de règles coulissantes et de poulies, constructions dont la théorie repose sur les propriétés dites "optiques" des coniques (*i.e.* foyers des coniques à centre, propriété foyer/directrice pour la parabole) (voir R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au x^{e} siècle, Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* [Paris, 1993], pp. 1–52, et *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, pp. 76–149).

[12] Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. I, p. 246. La première mention connue de ce procédé se trouve dans un fragment d'Anthémius de Tralles *Sur la construction des miroirs ardents* qui nous est parvenu en grec et en arabe (voir Rashed, *Les catoptriciens grecs*, pp. 250, 292).

[13] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, "Autobiographie", p. 18.

[14] *Sur le tracé des trois sections*, dans Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, p. 264.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

Deux types de méthodes vont être indiqués par Ibn Sinān: d'une part des méthodes permettant de construire chacune des trois coniques à partir d'un cercle de référence, d'autre part deux méthodes de construction des coniques à centre, basées l'une sur la proposition II.10 des *Coniques* (hyperbole rapportée à ses asymptotes), l'autre sur les propositions III.51 et III.52 (foyers des coniques à centre).

Constructions à partir du cercle

Construction de l'ellipse

La construction qu'expose Ibn Sinān est dans la postérité directe du traité de son aïeul Thābit ibn Qurra sur *Les sections du cylindre*; ce traité, qui a marqué l'histoire des mathématiques infinitésimales, est aussi l'un des textes les plus importants en géométrie, dans la mesure où Thābit y fait intervenir pour la première fois dans ses démonstrations, des transformations géométriques ponctuelles (projections cylindriques, affinités orthogonales, homothéties) dont il démontre et utilise certaines propriétés. En s'inspirant du modèle des *Coniques*, Thābit y élabore une théorie du cylindre et de ses sections planes (il y étudie en particulier – proposition 26 – les rapports des périmètres d'ellipses semblables).

Ibn Sinān commence par rappeler le résultat établi par Thābit dans ce traité (proposition 13), à savoir qu'une ellipse de grand axe $AB = 2a$ et de petit axe $CD = 2b$ est l'image par l'affinité orthogonale d'axe (AB) et de rapport b/a du cercle de diamètre $[AC]$, propriété dont il dit "cette proposition a été démontrée en plusieurs endroits" et qui figurait peut-être déjà dans le traité perdu d'al-Ḥasan ibn Mūsā sur l'ellipse. C'est de cette propriété que Thābit déduit, par la méthode d'exhaustion, l'aire de l'ellipse (proposition 14) et l'aire des segments elliptiques (propositions 15 à 17).

Rappelons cette proposition telle que Thābit l'énonce:

Soit une ellipse $\mathscr{E}$ de grand axe $[AB]$, de petit axe $[CD]$, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, alors, si la perpendiculaire à (AB) issue d'un point quelconque E de $\mathscr{C}$, coupe (AB) en H et $\mathscr{E}$ en J, $\frac{AB}{CD} = \frac{HE}{HJ}$. La démonstration découle du fait que, pour tout point J, d'ordonnée HJ, d'une ellipse $\mathscr{E}$ de grand axe AB, de côté droit d, on a $\frac{d}{AB} = \frac{HJ^2}{HA \cdot HB}$ (*Coniques*, I.21) et que, pour tout point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, $HA \cdot HB = HE^2$ (*Éléments*, VI.8, corollaire).

La construction d'Ibn Sinān repose sur cette propriété:

On veut construire une ellipse de grand axe $[AB]$ passant par un point J, intérieur au cercle de diamètre $[AB]$, donné. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$; la perpendiculaire à (AB) menée de J coupe $\mathscr{C}$ en

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

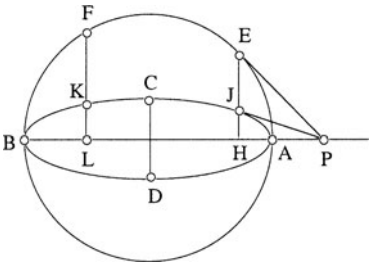


Fig. 1.

E et (AB) en H. Pour tout point F de $\mathscr{C}$, la perpendiculaire à (AB) issue de F coupe (AB) en L. Soit K le point du segment $[FL]$ tel que $\frac{KF}{KL} = \frac{JE}{JH}$.[15] Ibn Sinān montre alors que les points J et K appartiennent à la même ellipse $\mathscr{E}$ de grand axe $[AB]$ de côté droit d tel que $\frac{d}{AB} = \frac{HJ^2}{HA \cdot HB}$ (d est connu puisque les points A, B, H et J le sont). La construction d'Ibn Sinān fait ainsi correspondre à tout point du cercle $\mathscr{C}$ un point de l'ellipse $\mathscr{E}$, ou à tout point du segment $[AB]$ deux points de l'ellipse $\mathscr{E}$ symétriques par rapport à (BC) (Fig. 1).

Ibn Sinān ne précise pas la construction de d, cependant si l'on s'inspire des méthodes qu'il met en œuvre dans ses autres traités – en particulier dans *L'analyse et la synthèse* –, en posant X troisième proportionnelle de HJ et de HE, d quatrième proportionnelle de X, HJ et AB, on aurait, puisque $\frac{HJ}{HE} = \frac{HE}{X}$, $\frac{HJ^2}{HA \cdot HB} = \frac{HJ^2}{HE^2} = \frac{HJ}{X} = \frac{d}{AB}$.[16]

On pourrait déduire des propriétés de cette affinité une construction de la tangente à l'ellipse en tout point J: les droites (FE) et (KJ) se coupent en un point de la droite (AC), il en va de même lorsque F tend vers E. La tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$ au point J est donc la droite (JP), où P est le point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}$ au point E et de (AB).

Au cours de cette démonstration, Ibn Sinān a ainsi montré, d'une part qu'il existe une ellipse (et une seule) de grand axe $[AB]$ passant par un point J intérieur au cercle de diamètre $[AB]$, ellipse dont il détermine le côté droit; il a également montré que la relation $\frac{d}{AB} = \frac{HJ^2}{HA \cdot HB}$ caractérise l'ellipse $\mathscr{E}$ de grand axe $[AB]$ et de côté droit d en montrant (par l'absurde) la réciproque de la proposition

[15] Ce problème de construction élémentaire fait partie des exemples figurant dans le traité *Sur la méthode de l'analyse et de la synthèse dans les problèmes de géométrie* (voir Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, pp. 58–9).

[16] *Ibid*., pp. 45–50; voir en particulier la démonstration du problème de l'exemple 20.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

I.21 des *Coniques*, à savoir que tout point vérifiant cette relation est sur l'ellipse $\mathscr{E}$.

Construction de l'hyperbole

Le *symptoma* de l'hyperbole étant semblable à celui de l'ellipse, et la proposition I.21 des *Coniques* – sur laquelle repose essentiellement la démonstration précédente – s'appliquant tant à l'ellipse qu'à l'hyperbole (la seule différence étant que le point H doit, dans ce dernier cas, appartenir à $(AB) - [AB]$) où $[AB]$ est un diamètre transverse), il est tentant de chercher une construction semblable pour l'hyperbole, à partir du cercle de diamètre $[AB]$ (Fig. 2).

Comme dans le cas de l'ellipse, Ibn Sinān montre que la relation $\frac{d}{AB} = \frac{EH^2}{HA \cdot HB}$ (E point de $\mathscr{H}$, EH ordonnée correspondante de direction $\mathscr{D}$) caractérise l'hyperbole $\mathscr{H}$ de diamètre transverse $[AB]$ de côté droit d, d'ordonnées correspondantes parallèles à $\mathscr{D}$, en démontrant, également par l'absurde, la réciproque de la proposition I.21 des *Coniques* dans le cas de l'hyperbole.

Pour construire l'hyperbole, il procède ensuite en deux temps: il construit d'abord une hyperbole $\mathscr{H}$ dont le diamètre transverse $[AB]$ est égal au côté droit et les ordonnées correspondantes parallèles à $\mathscr{D}$, puis, à l'aide d'une affinité oblique, d'axe (AB) de direction $\mathscr{D}$, une hyperbole $\mathscr{H}'$ de même diamètre transverse, de côté droit d, dont les ordonnées correspondantes sont également parallèles à $\mathscr{D}$.

a. Construction de l'hyperbole $\mathscr{H}$ de diamètre transverse $[AB]$, d'ordonnée correspondante de direction $\mathscr{D}$, de côté droit AB.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Pour tout point D de $\mathscr{C}$ n'appartenant pas à la médiatrice de $[AB]$, la tangente en D à $\mathscr{C}$ coupe (AB) en H; soit E l'un ou l'autre des deux points de la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par H, tel que $EH = HD$; alors $E \in \mathscr{H}$, puisque EH vérifie la relation $\frac{AB}{AB} = \frac{EH^2}{HA \cdot HB}$ dont Ibn Sinān a démontré qu'elle caractérisait l'hyperbole $\mathscr{H}$ (en effet $HE^2 = HD^2 = HA \cdot HB$, *Éléments*, III.36).

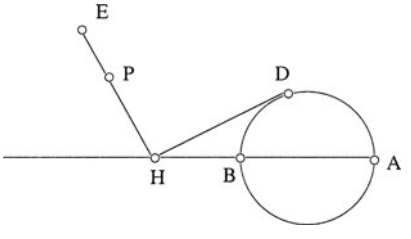


Fig. 2.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

N. B.: À tout point de $\mathscr{C}$ – autre que l'une ou l'autre des extrémités du diamètre orthogonal à (*AB*) – correspondent deux points de $\mathscr{H}$, et à deux points de $\mathscr{C}$ symétriques par rapport à (*AB*) correspondent les deux mêmes points de $\mathscr{H}$, cependant, si l'on impose en outre à *D* et à *E* d'être dans le même demi-plan défini par (*AB*), à tout point de $\mathscr{C}$ – autre que l'une ou l'autre des extrémités du diamètre orthogonal à (*AB*) – correspond un point de $\mathscr{H}$. Si $\mathscr{D} \perp (AB)$, c'est-à-dire si (*AB*) est l'axe transverse de $\mathscr{H}$, cette transformation ponctuelle est la transformation projective involutive qui, dans un repère *ad hoc*, fait correspondre au point *m* (*x*, *y*) le point *M* (*X*, *Y*) de coordonnées $X = \frac{AB^2}{4x}$ et $Y = \frac{AB \cdot y}{2x}$. Cette application, qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{H}$, transforme des droites en droites, des coniques en coniques, et de façon générale toute courbe algébrique de degré *n* en une courbe algébrique de degré *n*.

b. Construction de l'hyperbole $\mathscr{H}'$ de diamètre transverse [*AB*], d'ordonnée correspondante de direction $\mathscr{D}$, de côté droit *d*. Ibn Sinān montre que, si $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont deux hyperboles de même diamètre transverse [*AB*], de côtés droits respectifs *AB* et *d*, et dont les ordonnées correspondantes ont la même direction $\mathscr{D}$, alors, pour tous points *E* et *P* appartenant respectivement à $\mathscr{H}$ et à $\mathscr{H}'$ et se projetant sur (*AB*) parallèlement à $\mathscr{D}$ en un même point *H*, $\frac{HP^2}{HE^2} = \frac{d}{AB}$; $\mathscr{H}'$ est donc l'image de $\mathscr{H}$ par l'affinité oblique d'axe (*AB*) de direction $\mathscr{D}$ et de rapport $\frac{a}{AB}$ où *a* est la moyenne proportionnelle de *d* et de *AB*. Il en déduit, comme dans le cas de l'ellipse construite à partir du cercle, la construction de $\mathscr{H}'$ à partir de $\mathscr{H}$. Cette construction – avec l'hypothèse que *D*, *E* et *P* sont dans le même demi-plan défini par (*AB*) – fait alors correspondre à tout point de $\mathscr{C}$ – autre que l'une ou l'autre des extrémités du diamètre orthogonal à (*AB*) – un point de $\mathscr{H}'$; elle fait également correspondre à tout point de la droite (*AB*) extérieur au segment [*AB*], deux points de $\mathscr{H}'$ de même ordonnée.

Au cours de cette démonstration, Ibn Sinān a ainsi montré qu'il existe une hyperbole (et une seule) de diamètre transverse [*AB*], d'ordonnée correspondante de direction $\mathscr{D}$, passant par un point *P* tel que la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par *P* coupe (*AB*) en un point *H* extérieur au segment [*AB*]. Il a également montré que deux hyperboles de même diamètre transverse [*AB*], d'ordonnées correspondantes de même direction $\mathscr{D}$ sont image l'une de l'autre par une affinité oblique d'axe (*AB*), de direction $\mathscr{D}$.

Si l'on suppose en outre que $\mathscr{D}$ est orthogonale à (*AB*), on en déduit alors que toute hyperbole d'axe transverse [*AB*] est l'image du cercle de diamètre [*AB*] par la composée de la transformation projective précédemment évoquée et d'une affinité orthogonale d'axe (*AB*).

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

Construction de la parabole

Pour toute parabole $\mathscr{P}$ de sommet B, d'axe (BC), de côté droit BA, soit H un point de la parabole, G son projeté orthogonal sur (BC), on a $HG^2 = BG \cdot BA$ (*Coniques*, I.11). Ibn Sinān montre encore par l'absurde, la réciproque de cette proposition. La relation $HG^2 = BG \cdot BA$, *symptoma* de la parabole, caractérise donc la parabole (Fig. 3).

On veut construire la parabole $\mathscr{P}$ d'axe (BC), de sommet B, de côté droit BA (on suppose que A appartient à la demi-droite opposée à la demi-droite $[BC)$). Soit G un point quelconque de la demi-droite $[BC)$, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AG]$, la perpendiculaire à (BC) issue de B coupe $\mathscr{C}$ en E, on complète le rectangle $BEHG$, le point H appartient alors à $\mathscr{P}$, puisque $HG^2 = BE^2 = BG \cdot BA$ (*Éléments*, VI.8, corollaire). Cette construction fait donc correspondre à tout point de la demi-droite [BC) deux points de la parabole $\mathscr{P}$, symétriques par rapport à l'axe (BC).

Cette construction permettrait également de construire à la règle et au compas tout point d'une parabole $\mathscr{P}$ dont on connaît l'axe, le sommet et un point: soit en effet B le sommet, (BC) l'axe, H un point n'appartenant pas à la perpendiculaire à (BC) issue de B. Soit G le projeté orthogonal de H sur (BC), E le quatrième sommet du rectangle $HGBE$, A l'intersection de la perpendiculaire à (EG) issue de E et de (BC), et soit $\mathscr{P}$ la parabole de sommet B, d'axe (BC) de côté droit AB; H appartient alors à $\mathscr{P}$: en effet $GH^2 = EB^2 = BA \cdot BG$, *symptoma* de la parabole $\mathscr{P}$. La construction précédente permet alors de construire tout point de $\mathscr{P}$. Il existe donc une parabole et une seule d'axe et de sommet donnés, passant par un point donné n'appartenant pas à la perpendiculaire à l'axe passant par le sommet.

Contrairement aux précédentes, cette dernière construction ne se laisse cependant pas interpréter en termes de transformation ponctuelle d'un cercle, puisque le cercle $\mathscr{C}$ dépend, dans ce cas, du point G.

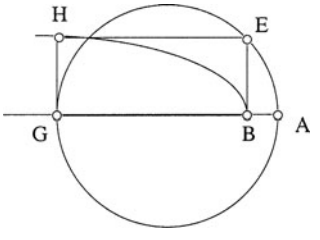


Fig. 3.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

Application de ces constructions aux cadrans solaires

Ces trois constructions qualifiées de "par le cercle" – qui ont en commun de reposer, entre autres, sur les propositions III.36 et VI.8 des *Éléments* (puissance d'un point par rapport à un cercle) – permettent de tracer à la règle et au compas tout point d'une conique dont on connaît le grand axe et un point pour l'ellipse, les deux sommets de l'axe transverse et un point dans le cas de l'hyperbole, l'axe, le sommet et un point dans le cas de la parabole.

Ce sont là quasiment les éléments par lesquels sont définies, dans le traité *Sur les instruments des ombres*, les courbes à tracer sur les cadrans solaires plans (seule partie du traité *Sur les instruments des ombres* qui nous soit parvenue). Pour étudier ces cadrans, Ibn Sinān, manifestement conscient que la réalité physique ne se laisse appréhender que si l'on néglige certains phénomènes secondaires, fait quatre hypothèses simplificatrices:

1. Puisque la courbe que trace sur le plan du cadran l'ombre de l'extrémité du gnomon ne dépend que de celle-ci, on peut supposer celui-ci perpendiculaire au plan du cadran:

> mais d'autre part quand on pose les gnomons inclinés sur les plans, alors l'ombre tracée est semblable à celle tracée par les gnomons droits. En effet, l'extrémité de l'ombre ne produit à partir de l'extrémité du gnomon incliné qu'un gnomon perpendiculaire au plan. Mais puisque l'ombre engendrée par son extrémité est celle dont nous avons montré les sortes et que son extrémité est l'extrémité du gnomon incliné, alors ce qui est engendré par l'incliné est ce qui est produit par le droit.[17]

2. Du fait que la sphère terrestre, relativement à la sphère céleste, peut être assimilée à un point, on peut supposer que l'extrémité du gnomon est au centre du monde:

> nous posons le sommet du gnomon comme centre de la sphère céleste [. . .] et nous savons qu'un plan, ou le plan sur lequel tombe l'ombre, est parallèle à l'un des plans des grands cercles. En disant "parallèle à lui" nous ne pensons pas qu'entre ces deux plans [. . .] il y ait, relativement à la sphère céleste, une grandeur que l'on puisse prendre en compte; comment cela serait-il possible, alors que la terre tout entière n'a aucune grandeur par rapport au ciel?[18]

3. On suppose que la trajectoire du soleil chaque jour de l'année est un cercle de hauteur variable, parallèle à l'équateur céleste; Ibn Sinān ne rappelle pas qu'il s'agit là d'une approximation, comme son aïeul Thābit le précisait dans son propre traité sur les cadrans solaires:

[17] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, p. 358.
[18] *Ibid*., p. 344.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

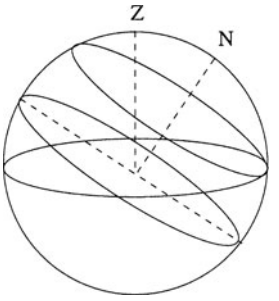


Fig. 4.

Pour cette proposition, comme pour les suivantes, partons du fait que le soleil en une journée, n'a pas une progression telle qu'elle le fasse quitter, dans sa rotation, un cercle parallèle à l'équateur.[19]

4. Tout plan étant le plan de l'horizon d'un lieu à la surface de la terre, on peut supposer, pour étudier la nature des courbes que trace l'ombre de l'extrémité du gnomon sur le plan du cadran, que ce plan est parallèle au plan de l'horizon:

il nous faut savoir que si nous établissons ce qui se passe pour les horizons de tous les lieux à partir de la *sphera recta* (*i.e.* l'équateur terrestre) jusqu'au lieu où le pôle de l'équateur est au zénith (*i.e.* l'un ou l'autre pôle), alors nous aurons épuisé tous les plans dans les analogues desquels nous pouvons dresser des instruments [...]. C'est pourquoi nous nous sommes borné à expliquer ce qui se passe dans les plans qui sont parallèles aux horizons seulement.[20]

La courbe que trace l'ombre de l'extrémité du gnomon sur le plan du cadran est alors la section de cône, intersection avec le plan du cadran, du cône de sommet le sommet du gnomon (confondu avec le centre du monde) et de cercle de base le cercle portant l'arc que décrit chaque jour le soleil (Fig. 4).

Les paramètres qui interviennent dans les calculs d'Ibn Sinān sont, d'une part la latitude du lieu, α (mesurée, dans l'hémisphère nord, par l'élévation du pôle nord de la sphère céleste au-dessus de l'horizon, et égale à l'angle que fait le zénith du lieu avec le plan de l'équateur), d'autre part la hauteur sur l'équateur du cercle que décrit quotidiennement le soleil, δ (ce que l'on mesure est h, hauteur au-dessus de l'horizon du soleil à son zénith, $\delta = h + \alpha - (\pi/2)$; si δ_M et $-\delta_M$ sont

[19] *Description des figures que forme l'extrémité de l'ombre d'un gnomon par son passage sur un plan horizontal*, dans R. Morelon, *Thābit ibn Qurra. Œuvres d'astronomie* (Paris, 1987), p. 118.
[20] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, p. 344.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

les hauteurs des cercles que décrit le soleil les jours des solstices d'été et d'hiver, on a $-\delta_M \leq \delta \leq \delta_M$. On obtiendra donc, selon les dates et les lieux, une droite (aux équinoxes, lorsque le plan du cadran n'est pas parallèle au plan de l'équateur), un cercle (lorsque le plan du cadran est parallèle au plan de l'équateur et en dehors des équinoxes), une ellipse, une hyperbole, ou une parabole:

1. Pour un lieu de latitude α et une hauteur δ du cercle que décrit le soleil un jour de l'année, alors, lorsque $\delta_M \geq \delta > 90° - \alpha$ (*i.e.* au nord du cercle polaire lorsque le soleil ne se couche pas), l'extrémité de l'ombre du gnomon décrit, sur le plan d'un cadran parallèle au plan de l'horizon, une ellipse, de grand axe le segment joignant l'extrémité de l'ombre la plus longue et l'extrémité de l'ombre la plus courte (lorsque le soleil est à son zénith, dans le plan du méridien). Pour tracer cette ellipse il suffit alors de relever un troisième point, et d'appliquer la méthode qui vient d'être exposée.

2. Sur le cercle polaire le jour du solstice d'été, ou au nord du cercle polaire lorsque $\delta = 90° - \alpha$, l'extrémité de l'ombre du gnomon décrit une parabole $\mathscr{P}$, d'axe la droite joignant l'extrémité B de l'ombre la plus courte et le pied O du gnomon, de sommet B. Pour tracer $\mathscr{P}$, il suffit alors de relever un point H de projeté orthogonal G sur l'axe (OB) et d'appliquer la construction qui vient d'être exposée.

3. Lorsque $0 \leq \alpha < 90° - \delta_M$ (*i.e.* entre l'équateur et le cercle polaire), ou lorsque $\alpha \geq 90° - \delta_M$ et $\delta < 90° - \alpha$ (*i.e.* au nord du cercle polaire lorsque le soleil se lève et se couche), l'extrémité de l'ombre du gnomon décrit, sur le plan du cadran, une branche d'hyperbole $\mathscr{H}$, d'axe transverse la droite joignant l'extrémité B de l'ombre la plus courte et le pied O du gnomon, l'un des sommets de l'axe transverse étant le point B. Dans ce cas – le plus fréquent – la construction exposée dans le traité *Sur le tracé des trois sections* ne donne pas directement la construction de la branche d'hyperbole. Pour tracer $\mathscr{H}$, on pourrait procéder ainsi: on relève deux points P et Q de projetés orthogonaux respectifs H et I $(H \neq I)$ sur l'axe (OB); on construit ensuite – à la règle et au compas – le point A de la droite (OB), n'appartenant pas au segment $[HI]$ et tel que $\frac{AH}{AI} = \frac{HP^2}{IQ^2} \cdot \frac{IB}{HB}$, A est le second sommet de l'hyperbole $\mathscr{H}$: en effet $\frac{HP^2}{IQ^2} = \frac{AH}{AI} \cdot \frac{HB}{IB}$, soit d tel que $\frac{d}{AB} = \frac{HP^2}{HA \cdot HB}$ (voir la construction de *d supra*), P et Q appartiennent à la branche d'hyperbole d'axe transverse (AB), de sommets A et B et de coté droit d. La construction précédemment exposée permettrait alors de tracer dans un premier temps la branche d'hyperbole $\mathscr{H}'$ d'axe (AB) de sommets A et B et de côté droit AB, puis, en lui

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

appliquant l'affinité orthogonale d'axe (*AB*) et de rapport $\frac{HP}{HE}$ où *E* est le point de $\mathscr{H}'$ d'ordonnée *HE*, la branche de $\mathscr{H}$ passant par *P*.

Ces trois constructions se prêtent assez simplement à un usage pratique et sont facilement utilisables par des artisans. Il n'est d'ailleurs pas impossible que ce soient celles-là mêmes qu'Ibn Sinān aurait dictées à l'artisan auquel il fait allusion dans son autobiographie. Elles seront également reprises par quelques géomètres: Abū al-Wafā' al-Būzjānī (940–998), dans son traité *Sur les constructions nécessaires aux artisans*,[21] recourt à cette construction de la parabole pour construire un miroir parabolique. Al-Sijzī (x^{e}–xi^{e} siècle), dans son traité *Sur la description des sections coniques*,[22] après avoir indiqué que les constructions par points sont celles usitées par mathématiciens et astronomes dans la construction des cadrans, reprend la construction de la parabole ainsi que celle de l'hyperbole (mais uniquement dans le cas particulier d'une hyperbole équilatère d'axe (*AB*), de sommets *A* et *B*); il montre en outre que, lorsque le soleil parcourt l'un ou l'autre de deux cercles symétriques par rapport au plan de l'équateur, et dans le cas où la courbe tracée par l'extrémité de l'ombre du gnomon sur un cadran solaire plan est une hyperbole, il correspond à ces deux cercles les deux branches d'une même hyperbole, dont on connaît alors les sommets, et dont il détermine ensuite le côté droit.

AUTRES MÉTHODES

Les deux autres méthodes qu'expose Ibn Sinān à la fin de son traité sont moins directement applicables à la construction des cadrans et ne concernent que la construction des coniques à centre.

Construction de l'hyperbole "par les droites"

Cette construction d'une hyperbole connaissant ses asymptotes, une direction d'ordonnée et un point, repose sur la proposition II.10 des *Coniques*: soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de centre *A*, d'asymptotes (*AB*) et (*AC*), de diamètre transverse (*AJ*), soient *IK* et *BC*, les ordonnées correspondant à ce diamètre – (*IK*) tangente à $\mathscr{H}$ au point *J*,

[21] Jafar Aghayani-Chavoshi, *L'œuvre scientifique d'Abū al-Wafā' al-Būzjānī*, thèse Université Paris VII, Paris, 1996, non publiée. Pour une autre méthode de construction d'un arc de parabole, toujours à partir d'un cercle, voir O. Neugebauer et R. Rashed, "Sur une construction du miroir parabolique par Abū al-Wafā' al-Būzjānī", *Arabic Sciences and Philosophy*, 9.2 (1999): 261–77.

[22] Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. I, pp. 248–52, 260–9.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

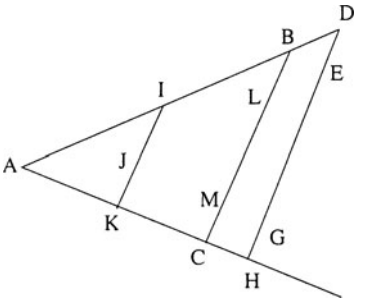


Fig. 5.

(*BC*) parallèle à (*IK*) –, coupant $\mathscr{H}$ respectivement en *J*, *L* et *M*, alors $LB \cdot LC = MB \cdot MC = IJ^2$.

Ibn Sinān affirme d'abord que l'on démontrerait comme dans les cas précédents, c'est-à-dire par l'absurde, la réciproque de cette proposition, c'est-à-dire que, si (*DH*) est parallèle à (*IK*) et si $ED \cdot EH = GD \cdot GH = IJ^2$, alors les points *E* et *G* appartiennent à $\mathscr{H}$. Il en déduit que, étant données deux droites (*AB*) et (*AC*), une surface *s* et une direction $\mathscr{D}$ – non parallèle à (*AB*) ou à (*AC*), pour tout segment [*DH*], (*DH*) parallèle à $\mathscr{D}$, les points *E* et *G* du segment [*DH*] tels que $ED \cdot EH = GD \cdot GH = s$ sont sur une même hyperbole $\mathscr{H}$ dont il ne précise pas les caractéristiques géométriques. (Fig. 5)

Le problème, construire un point *E* d'un segment [*DH*] tel que $ED \cdot EH = s$, est résolu par Ibn Sinān dans le traité sur *L'analyse et la synthèse* (exemple 5) comme exemple paradigmatique de problème donnant lieu à discussion[23] (le problème n'ayant de solution que si $s \leq DH^2/4$). Ibn Sinān ne précise pas dans ce texte la construction du point *E*, son intérêt portant sur le diorisme et le formalisme de la résolution d'un problème avec discussion (Fig. 6).

Al-Sijzī, dans les traités *Sur la description des sections coniques* et *Comment concevoir deux lignes qui se rapprochent et ne se rencontrent pas*,[24] reprend cette construction de l'hyperbole et donne deux constructions du point *E* à partir d'un cercle également basées sur la proposition VI.8 des *Éléments*; dans l'opuscule sur l'asymptote, il procède ainsi: on trace le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [*DH*], une parallèle à (*DH*) à la distance *IJ* de (*DH*) coupe $\mathscr{C}$ en deux points (puisque $IJ^2 = \frac{IK^2}{4} \leq \frac{DH^2}{4}$); les projetés orthogonaux sur (*DH*) de ces points sont les points *E* et *G* cherchés.

[23] Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, pp. 37–9, 130–3.
[24] Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. I, pp. 248–51 et 302–7.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

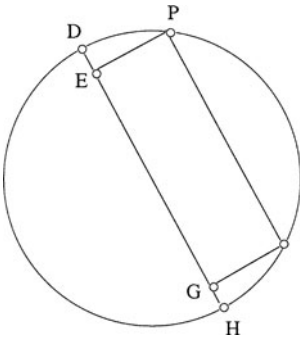


Fig. 6.

Construction des coniques à centre à partir de cercles tangents

Le traité *Sur le tracé des trois sections* s'achève, de façon quelque peu abrupte, sur deux propositions qui reposent sur des réciproques (qu'Ibn Sinān ne démontre pas) des propositions III.51 et III.52 des *Coniques*: F et F' étant les foyers d'une branche d'hyperbole (respectivement d'une ellipse), M un point de cette courbe, alors $|MF - MF'| = d$ (respectivement $MF + MF' = d$). Ibn Sinān en déduit que, si l'on se donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et un point A extérieur (respectivement intérieur) à $\mathscr{C}$, alors tout cercle passant par A et tangent à $\mathscr{C}$ a son centre sur une hyperbole (respectivement une ellipse), de foyers O et A, dont il ne précise pas la construction. Ce problème, "construire un cercle tangent à un cercle donné et passant par un point donné", peut être considéré comme une généralisation du problème des *Contacts* d'Apollonius[25] auquel Ibn Sinān s'est intéressé, tant dans son *Anthologie de problèmes* que dans son traité perdu sur *Les cercles tangents* qui semble avoir été une tentative de reconstitution des *Contacts*.[26]

La construction déduite de ces propositions, basées sur la propriété bifocale des coniques à centre et du cercle directeur associé à un des

[25] Avec la formulation de Pappus: "trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui, passant par chacun des points donnés – dans le cas de points donnés –, soit tangent à chacune des lignes données", *Pappus d'Alexandrie. La collection mathématique*, trad. P. Ver Eecke, 2 vol. (Paris, 1982), vol. I, p. 483.

[26] Voir *L'anthologie de problèmes*, problèmes 2, 18, 19, 22, 39, 40 et 41 dans Rashed et Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie*, pp. 586–90, 662–8, 672–95, 734–59. H. Bellosta, "Les mathématiciens arabes et le problème des *Contacts*", *Oriens-Occidens*, Cahiers du Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales, 1 (1997): 105–22. Al-Qūhī (deuxième moitié du x^{e} siècle), reprendra cette généralisation du problème des *Contacts* dans son traité *Le livre des centres des cercles tangents situés sur des lignes par la méthode de l'analyse*; voir P. Abgrall, "Les cercles tangents d'al-Qūhī", *Arabic Sciences and Philosophy*, 5.2 (1995): 263–96.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

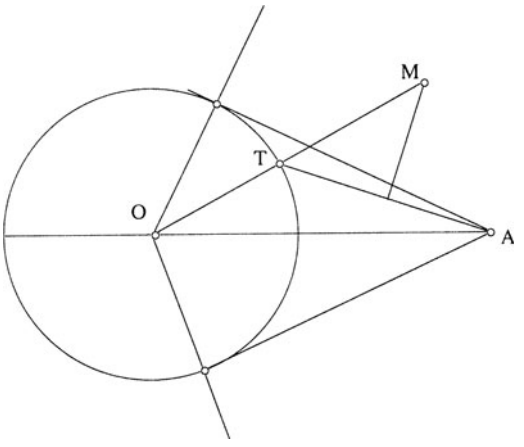


Fig. 7.

foyers, sera donnée, dans le cas de l'ellipse uniquement, par al-Sijzī,[27] dans son traité *Sur la description des sections coniques*; ici encore, on construit l'ellipse à partir d'un cercle $\mathscr{C}$ et d'un point A intérieur à $\mathscr{C}$: à tout point T de $\mathscr{C}$ on fait correspondre le point M intersection de la droite (OT) et de la médiatrice de $[AT]$, le cercle de centre M et de rayon MA passe par A et est tangent au cercle $\mathscr{C}$, et $MA + MO = R$, rayon du cercle $\mathscr{C}$, M appartient donc à l'ellipse de foyer A et O.

On procéderait de même dans le cas de l'hyperbole: si A est extérieur à $\mathscr{C}$, à tout point de $\mathscr{C}$, autre que les points de contact des tangentes à $\mathscr{C}$ issues de A, on fait correspondre le point M intersection de la droite (OT) et de la médiatrice de $[AT]$, le cercle de centre M et de rayon MA passe par A et est tangent au cercle $\mathscr{C}$, et $|MA - MO| = R$; M appartient donc à l'hyperbole de foyers A et O, dont les asymptotes sont les droites issues de O et orthogonales aux tangentes à $\mathscr{C}$ issues de A (Fig. 7).

C'est également sur ces propriétés des foyers des coniques à centre que repose tant la méthode bien connue de construction continue de l'ellipse dite "méthode du jardinier", que le procédé de tracé continu de l'hyperbole exposé par Ibn Sahl (deuxième moitié du x^{e} siècle), dans son traité *Sur les instruments ardents*.[28]

CONCLUSION

L'œuvre d'Apollonius qu'il cite abondamment, *Les coniques* certes, mais également *Les contacts*, *La section de rapport*, *La section*

[27] Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. I, pp. 252–5.
[28] Rashed, *Géométrie et dioptrique au x^{e} siècle*, pp. 1–52.

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

d'aire, ou *Les lieux plans*, irrigue toute l'œuvre géométrique d'Ibn Sinān.[29] Cependant, si l'ouvrage de référence sur les coniques reste, et restera, l'ouvrage d'Apollonius, il semble néanmoins que, d'Apollonius à Ibn Sinān, le concept même de conique ne subisse une subtile modification. Pour Apollonius, en effet, les coniques sont, au départ, des courbes obtenues par intersection d'un cône et d'un plan et ce cône générateur reste souvent implicitement présent. En revanche, et hormis dans le traité *Sur les instruments des ombres*, les coniques sont, dans les autres traités d'Ibn Sinān évoqués ici, définies dans le plan, soit par leurs éléments géométriques définis indépendamment du cône générateur – pour la parabole, sommet, axe et côté droit, pour l'ellipse, grand axe et côté droit et pour l'hyperbole, diamètre transverse, direction correspondante des ordonnées et côté droit –, soit par des relations métriques qui, pour la première fois, les caractérisent: Ibn Sinān on l'a vu, démontre par l'absurde, tant les réciproques des propositions I.20 et I.21 des *Coniques*, que la réciproque de la proposition II.10 et admet les réciproques des propositions III.51 et III.52 (qui se démontreraient de même par l'absurde). Certes, et Ibn Sinān lui-même l'indique, les réciproques des propositions II.20 et I.21 sont une conséquence des propositions I.52, I.53, I.54, I.55 et I.56 des *Coniques*; Apollonius énonce cependant ces propositions sous forme de problèmes – trouver une conique sur laquelle se trouvent des points vérifiant certaines relations – et non comme Ibn Sinān de théorèmes – tout point vérifiant l'une ou l'autre de ces relations appartient à une conique déterminée; en outre et dans tous les cas, la démonstration d'Apollonius consiste à construire un cône d'où proviennent ces coniques, les éléments de ces coniques, et en particulier le côté droit, étant définis en référence à ce cône générateur. La démonstration d'Ibn Sinān, au contraire, s'effectue intégralement dans le plan de la conique et toute référence à un cône générateur disparaît; le côté droit n'est plus qu'une grandeur (longueur) donnée, un des paramètres définissant la conique, dans le plan de celle-ci. En outre, la formulation même de ces relations diffère: énoncées par Apollonius en termes d'application des aires et d'égalités d'aires elles sont exprimées par Ibn Sinān en termes de rapports et de produits de grandeurs;[30] ce type de formulation est une des

[29] H. Bellosta, "Ibrāhīm ibn Sinān, Apollonius Arabicus", dans A. Hasnawi, A. Elamrani-Jamal et M. Aouad (éd.), *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque* (Louvain, 1997), pp. 31–48.

[30] Cette "arithmétisation" de l'expression, déjà notée par Roshdi Rashed à propos de la tradition néo-archimédienne arabe n'est du reste pas propre à Ibn Sinān, on la rencontre déjà au IX^e^ siècle chez Thābit ibn Qurra et les Banū Mūsā. R. Rashed, *Optique et mathématiques*, Variorum (Aldershot, 1986), IX "Archimède dans les mathématiques arabes".

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press

caractéristiques de la nouvelle analyse géométrique dont Ibn Sinān est le théoricien, et dont l'objet est de montrer que la géométrie a des moyens aussi puissants que l'algèbre (et plus rigoureux) pour résoudre les problèmes.

Les trois premières constructions exposées par Ibn Sinān, celles dites "à partir du cercle", permettent également d'associer, à tout point de la partie adéquate de son axe, un point d'une conique. On peut ainsi construire, à la règle et au compas, tout point de l'une quelconque des trois coniques à partir de son projeté orthogonal sur l'axe. S'il est évidemment excessif et anachronique de voir dans cette correspondance entre un point de la partie adéquate de l'axe et un point de la conique, construit à la règle et au compas, l'amorce de l'idée que l'abscisse et l'ordonnée d'un point d'une conique sont liées par une équation quadratique, on en est cependant plus proche que chez Apollonius. En outre, le cercle étant une figure sur la continuité de laquelle on ne s'interroge pas – il est construit, à l'aide d'un instrument, par un mouvement de rotation unique – l'usage de transformations géométriques qui permettent d'obtenir l'ellipse et l'hyperbole (c'est moins vrai pour la parabole) comme images d'un cercle, pourrait être un moyen, autre que le mouvement sur quoi se fonderont toutes les méthodes de tracé continu, d'assurer implicitement la continuité de ces courbes. Cette continuité des sections coniques est en effet fondamentale lorsqu'on veut résoudre géométriquement des équations du troisième degré: tant al-Khayyām que Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī caractériseront, à la suite d'Ibn Sinān, une conique par son *symptoma* ou, dans le cas d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes, par une relation du type $xy = a$; ce sont également ces relations qui permettront à al-Ṭūsī de définir, par des inégalités, les notions d'intérieur et d'extérieur d'une conique, sans plus de référence à l'intérieur du cône générateur.[31] On verra ainsi se préciser une proto-topologie, faisant intervenir, outre la notion implicite de continuité des courbes, les concepts d'intérieur et d'extérieur, de convexité et de comportement à l'infini.

[31] R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien* (Paris, 1999); R. Rashed, *Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques*, 2 vols. (Paris, 1986).

https://doi.org/10.1017/S0957423911000129 Published online by Cambridge University Press