Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1999), **19**, 413–436
Printed in the United Kingdom © *1999 Cambridge University Press*

Flots magnétiques en courbure négative

STÉPHANE GROGNET

Université de Nantes, Département de Mathématiques, U. M. R. 6629, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes cedex 03, France
(e-mail: grognet@math.univ-nantes.fr)

(*Received* 24 *February* 1997 *and accepted in revised form* 29 *May* 1997)

Abstract. Consider a magnetic field on a closed Riemannian manifold of negative curvature. A geometric study provides dynamical properties of the associated flow stronger than expected for general perturbations of the geodesic flow. Under natural assumptions, a magnetic flow on a closed surface cannot be $\mathcal{C}^1$-conjugate to a geodesic flow.

1. *Introduction*

Les aspects à la fois dynamique et géométrique du flot géodésique en courbure négative ont suscité de nombreuses études [**2, 3, 4, 5, 9, 18**]. La géométrie des équations différentielles du second ordre [**14**] prouve que beaucoup de résultats ne sont pas spécifiques au flot géodésique. On se propose d'étudier des aspects particuliers d'une perturbation : les flots magnétiques sur les variétés riemanniennes. La mesure de Liouville est préservée et l'accélération découle d'une 2-forme, ce qui fournit des résultats plus étendus que pour une équation du second ordre quelconque. Dans le cas où le champ magnétique est assez faible, et la variété compacte à courbure négative, la stabilité structurelle des systèmes Anosov [**2**] entraîne la conservation de propriétés dynamiques du flot géodésique : ergodicité d'une éventuelle mesure invariante absolument continue, densité de presque toute trajectoire, mélange. Sur les surfaces la stabilité est plus forte [**16**]. Le résultat de stabilité dynamique pour les flots magnétiques sort du cadre des systèmes Anosov.

THÉORÈME 3.2. *Soit M une variété riemannienne à courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$. Tous les flots induits par un champ magnétique b vérifiant la relation*

$$\|b\|_\infty < k_1$$

sont orbite-équivalents.

Les conditions pour que le flot géodésique soit de type Anosov sont connues [**11, 12**]. Une condition suffisante pour que le flot magnétique soit de type Anosov, joue le même rôle que le pincement de la courbure pour les flots géodésiques.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4.1. *Soit M une variété riemannienne fermée, avec une courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$. Si le champ magnétique b vérifie l'inégalité suivante :*

$$\tfrac{5}{4}\|b\|_\infty^2 + \|Db\|_\infty < k_1^2,$$

alors le flot est de type Anosov.

Katok a mis en évidence les problèmes de rigidité entropique et spectrale des surfaces [**19**]. Les travaux suscités traitent des métriques riemanniennes sur les surfaces [**8, 9, 21**], ou sur les variétés de dimension supérieure [**4, 5, 10**]. La rigidité de conjugaison persiste avec l'application d'un champ magnétique sur une surface :

THÉORÈME 7.3. *Soit une surface fermée orientée munie d'une métrique riemannienne à courbure pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$, et d'un champ magnétique b qui vérifie*

$$\|b\|_\infty^2 + \|Db\|_\infty < k_1.$$

On suppose que le flot magnétique est conjugué au flot géodésique d'une autre métrique riemannienne de courbure sectionnelle strictement négatve sur la même surface, ayant le même volume total ; si, de plus, la conjugaison est absolument continue, alors le champ magnétique est nul et les deux métriques sont isométriques.

Après une définition du flot magnétique dans la §2, on expose dans la §3 la stabilité dynamique qui a lieu dans la topologie $\mathcal{C}^0$ et pas dans la topologie $\mathcal{C}^1$ comme le laisse supposer la théorie générale des systèmes Anosov : c'est l'objet du Théorème 3.2. L'analyse des champs de Jacobi dans la §4 fait apparaître les propriétés géométriques du flot et notamment le Théorème 4.1. Ces résultats sont démontrés dans les §5 et §6. La §7 est consacrée aux surfaces.

2. *Flot magnétique*

On décrit d'abord la trajectoire d'une particule ponctuelle, de masse et charge unités. Cette particule se déplace sous l'influence d'un champ magnétique indépendant du temps, dans une variété riemannienne (M, g) de dimension n et de classe $\mathcal{C}^2$ au moins.

On peut considérer le champ magnétique comme un champ d'applications linéaires antisymétriques b sur le fibré tangent à la variété. Si on note : $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire du fibré tangent TM associé à la métrique riemannienne g, l'application champ magnétique b est une section du fibré :

$$\begin{array}{ccccc} TM & \otimes & T^*M & & \mathcal{L}(TM, TM) \\ \downarrow & & & \simeq & \downarrow \\ M & & & & M \end{array}$$

telle que pour tous champs de vecteurs ξ_1, ξ_2 tangents à la variété M on ait :

$$\langle b \cdot \xi_1, \xi_2\rangle + \langle \xi_1, b \cdot \xi_2\rangle = 0.$$

On rappelle qu'on définit de manière habituelle le champ magnétique par la 2-forme β :

$$\beta(\xi_1, \xi_2) = \langle b \cdot \xi_1, \xi_2\rangle. \tag{1}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

La trajectoire d'une particule soumise à la force magnétique est décrite par une application lisse c d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans la variété M. On note $T = dc/dt$ le vecteur vitesse et D la dérivation covariante. La courbe vérifie l'équation différentielle :

$$D_T T = b \cdot T. \tag{2}$$

Si l'on change le champ b en son opposé, il faut parcourir les trajectoires en sens inverse. Le champ magnétique nul donne les géodésiques. On remarque que la norme du vecteur vitesse est constante ; dans les autres sections on la supposera toujours égale à un. Sans démonstration (elle est analogue à celle du théorème de Hopf–Rinow pour le flot géodésique [**6**, pp. 11–13]), on peut énoncer :

PROPOSITION 2.1. *Si la variété M est complète pour la distance associée à la métrique g, alors les courbes solutions de l'équation (2) sont définies sur $\mathbb{R}$.*

Dans la suite, on suppose toujours la variété M complète.

Définition 2.1. Le *flot ψ associé au champ magnétique b* est défini comme suit : soit v un vecteur tangent à la variété M, alors

$$\psi_t v = \frac{dc}{dt}(t)$$

où $c(t)$ est la courbe solution de l'équation (2) de condition initiale $dc/dt\,(0) = v$. Comme l'accélération est orthogonale à la trajectoire, le flot ψ peut aussi être défini sur le *fibré unitaire tangent* $T^1M = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\}$.

Il arrive que ce flot préserve la mesure de Liouville.

Définition 2.2. On dit que le champ magnétique est *irrotationnel* si la 2-forme β (définie dans la formule (1)) est fermée. On dit que le champ magnétique admet un *potentiel* si la 2-forme β est exacte et admet une primitive α. Dans ce cas on introduit, sur le fibré tangent TM, le lagrangien :

$$L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2}\|\dot{q}\|^2 - \alpha(\dot{q}).$$

Alors l'équation (2) des trajectoires correspond à l'équation d'Euler–Lagrange pour l'action du lagrangien L.

On note $\flat = \sharp^{-1}$ l'isomorphisme canonique du fibré tangent TM sur le fibré cotangent $T^\star M$ induit par la métrique riemannienne g. La transformée de Legendre s'écrit :

$$\begin{aligned} TM &\to T^\star M \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (q, p) \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^\flat - \alpha, \end{aligned}$$

et son inverse :

$$\begin{aligned} T^\star M &\to TM \\ (q, p) &\mapsto (q, \dot{q}) \quad \text{avec} \quad \dot{q} = (p + \alpha)^\sharp. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Dans ce cas, le hamiltonien vaut [**1**] :

$$H(p,q) = \tfrac{1}{2}\|p+\alpha\|^2.$$

En appliquant la transformée de Legendre inverse, on obtient :

$$\hat{H}(q,\dot{q}) = \tfrac{1}{2}\|\dot{q}\|^2.$$

Le flot défini par le Hamiltonien H sur le fibré cotangent préserve le volume. Il préserve aussi le volume des hypersurfaces d'énergie.

On remarque que la transformée de Legendre et son inverse envoient mesure de volume riemannien sur mesure de volume riemannien. Cette propriété est locale, et on n'a pas besoin que la forme β soit exacte sur la variété M. On en déduit :

THÉORÈME 2.1. *Quand le champ magnétique est irrotationnel, le flot associé préserve la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent T^1M.*

3. *Équivalences d'orbites*

Pour aborder le premier théorème, on utilise un outil courant en géométrie hyperbolique.

Définition 3.1. Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. Une application f de E dans E' est une *quasi-isométrie* s'il existe des constantes C_1, C_2 strictement positives telles que pour tous éléments x et y de E, on ait :

$$\frac{1}{C_1}d(x,y) - C_2 \leq d'(fx,fy) \leq C_1 d(x,y). \tag{3}$$

Soit (M,g) une une variété riemannienne difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Une courbe $c:\mathbb{R}\to M$ de classe $\mathcal{C}^0$ est une *quasi-géodésique* si c'est une quasi-isométrie de $\mathbb{R}$ dans M.

Au début de la §5.1, on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. *Sur une variété riemannienne $\widetilde{M}$ simplement connexe à courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$, si le champ magnétique a une norme uniforme strictement inférieure à k_1, alors ses orbites sont des quasi-géodésiques.*

Cela généralise un résultat du même type sur les surfaces hyperboliques, qui nous a été communiqué par Wojtkowski. Il admet une interprétation *dynamique*.

Définition 3.2. Deux flots (φ_t) et (ψ_t) sur une variété N sont dits *orbite-équivalents* s'il existe un homéomorphisme h de la variété N dans elle-même et une application continue τ de $N\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

(i) à x fixé, l'application $\tau(x,\cdot)$ soit un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans lui-même (changement de paramétrage) ;

(ii) Pour tout réel t et tout élément x de la variété N, on ait :

$$h(\varphi_t x) = \psi_{\tau(x,t)}h(x).$$

À la fin de la §5.1, on démontre résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. *Sur une variété riemannienne (M,g) de courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$, un champ magnétique de norme uniforme strictement inférieure à k_1 engendre un flot orbite-équivalent au flot géodésique sous-jacent.*

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

De l'équivalence d'orbites de tous les flots géodésiques à courbure pincée, on déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. *Sur une variété différentielle M donnée, tous les flots induits par une métrique et un champ magnétique qui vérifient la condition du théorème précédent sont orbite-équivalents.*

Remarquons que ces théorèmes sont vrais pour des champs magnétiques continus pas nécessairement différentiables, et ne rentrent donc pas dans le cadre de la théorie des flots d'Anosov (qui réclame des flots suffisamment réguliers [**2**]). Grâce à la description du flot sur les surfaces (§7) il suffit de choisir une fonction continue non-différentiable à valeurs réelles pour construire de tels contre-exemples. D'autre part, le flot horocyclique des surfaces à courbure -1 donne un exemple de cas limite où les résultats ne peuvent être améliorés.

4. *Champs de Jacobi*

4.1. *Variation seconde.* On suppose dans cette section que le champ magnétique est de classe $\mathcal{C}^1$. On considère une famille de courbes (c_s) de classe $\mathcal{C}^3$:

$$\begin{aligned} c_s : \mathbb{R} &\to M \\ t &\mapsto c_s(t) \end{aligned}$$

formée de courbes trajectoires du champ magnétique b. On les suppose paramétrées à vitesse un et on note les champs de vecteurs :

$$T = \frac{\partial c_s}{\partial t} \quad \text{et} \quad S = \frac{\partial c_s}{\partial s}.$$

Soit une base orthonormée directe $(E_0^s(0), \ldots, E_{n-1}^s(0))$ de l'espace vectoriel tangent $T_{c_s(0)}M$ vérifiant $E_0^s(0) = T(t=0)$.

On considère l'équation différentielle ordinaire à s fixé : $D_T V = b.V$, pour des champs de vecteurs $V^s(t)$ définis le long de la courbe $c_s(t)$. Dans la suite des calculs on omet l'indice s. Pour tout i, il existe une unique solution $V(t) = E_i(t)$ telle que $V(0) = E_i(0)$. Et le champ $(E_0(t), \ldots, E_{n-1}(t))$ est un champ de bases orthonormées le long de la courbe $c(t)$.

On décompose ainsi le champ de variation, ou *champ de Jacobi* :

$$S = xT + \sum_{i=1}^{n-1} y_i E_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i E_i \quad (\text{avec } x = y_0).$$

La dérivée par rapport au temps de parcours vaut :

$$D_T S = \sum_{i=0}^{n-1} y_i' E_i + b \cdot S$$

où l'on note $f' = \partial f / \partial t$ pour une application f à valeurs scalaires.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Définition 4.1. On définit l'opérateur $\mathcal{D}$ sur les champs dérivables le long de la courbe c :

$$\mathcal{D}(V) = D_T V - b \cdot V; \quad \mathcal{D}\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i E_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i' E_i,$$

et la projection orthogonale Π sur *l'espace orthogonal à la trajectoire* engendré par le système $(E_1(t), \ldots, E_{n-1}(t))$.

On note

$$Y = \Pi \cdot S = \sum_{i=1}^{n-1} y_i E_i,$$

la composante orthogonale du champ de Jacobi. Pour deux champs de vecteurs ξ_1 et ξ_2 le long de la courbe $c_s(t)$, on a la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \mathcal{D}\xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \mathcal{D}\xi_2 \rangle. \tag{4}$$

De la même manière que pour le flot géodésique [**6**, pp. 13–15], on sait que les champs S et T vérifient les relations :

$$[S, T] = 0, \quad D_T S = D_S T \quad \text{et} \quad D_T D_S T = D_S D_T T - R(T, S)T,$$

où R désigne le tenseur de courbure de la métrique g. Par conséquent l'équation des champs de Jacobi s'écrit :

$$D_T D_T S + R(T, S)T = D_S(b \cdot T) = (D_S b) \cdot T + b \cdot (D_T S).$$

Si l'on remplace l'opérateur D_T par $\mathcal{D} + b$, l'équation des champs de Jacobi devient :

$$\mathcal{D}^2 S + b \cdot \mathcal{D}S + (D_T b) \cdot S + R(T, S)T = (D_S b) \cdot T. \tag{5}$$

Ainsi on a séparé les différents ordres de dérivation des coordonnées y_i.

La composante tangentielle de l'équation des champs de Jacobi est exhibée en effectuant le produit scalaire des membres de l'équation (5) avec le vecteur T. En utilisant l'antisymétrie des applications linéaires b et $D_S b$, on obtient :

$$x'' + \langle b \cdot \mathcal{D}S, T \rangle + \langle (D_T b) \cdot S, T \rangle = 0,$$

ce qui revient à :

$$x'' + \frac{\partial}{\partial t}\langle b \cdot S, T \rangle = 0. \tag{6}$$

On remarque que puisque l'on impose une vitesse de parcours des orbites indépendante du paramètre s, soit :

$$\langle T, T \rangle = 1,$$

et en dérivant cette expression par rapport au paramètre s, il vient :

$$x' + \langle b \cdot S, T \rangle = 0. \tag{7}$$

En dérivant l'équation (7) par rapport au temps t, on retrouve l'équation (6).

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 4.1. *Si l'on suppose que les courbes sont paramétrées à vitesse un, le champ de Jacobi vérifie :*

$$\begin{cases} x' + \langle b \cdot S, T \rangle = 0, \\ \mathcal{D}^2 Y + A \cdot \mathcal{D}Y + B \cdot Y = 0\,; \end{cases} \tag{8}$$

avec

$$\begin{cases} A = \Pi \cdot b, \\ B \cdot Y = -(D_Y b) \cdot T + \Pi \cdot D_T b \cdot Y + \langle Y, b \cdot T \rangle b \cdot T + R(T, Y)T. \end{cases} \tag{9}$$

En général le champ de Jacobi ne peut pas rester orthogonal à la courbe. On remarque d'autre part que le deuxième terme de la matrice B est antisymétrique sur $T^{\perp}$ et que les troisième et quatrième termes sont symétriques.

De la même manière que pour le flot géodésique [**15**, 3.45, p. 121], on peut mettre en évidence une dualité entre champs de Jacobi et variations de courbes.

PROPOSITION 4.2. *On fixe un nombre réel a, et une trajectoire c.*

(i) *L'espace des champs de Jacobi le long de la courbe c est isomorphe à la somme directe orthogonale $T_{c(a)}M \oplus T_{c(a)}M$ par l'application $J \mapsto (J(a), \mathcal{D}J(a))$.*

(ii) *De même l'espace des champs de Jacobi provenant d'une variation à vitesse un est isomorphe à l'espace $T_{c(a)}M \oplus dc/dt(a)^{\perp}$.*

(iii) *Tout champ de Jacobi le long de la courbe c provient d'une variation.*

4.2. *Applications de l'équation des champs de Jacobi.* L'équation des champs de Jacobi permet de décrire les propriétés géométriques du flot magnétique.

Définition 4.2. On dit que deux points a et b de la variété M sont *conjugués* pour le flot associé au champ magnétique s'il existe une courbe solution qui les joint et un champ de Jacobi le long de cette courbe, qui s'annule en a et b sans être identiquement nul.

L'apostrophe désignera la dérivation par rapport au temps t. Comme précédemment on note :

$$Y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i E_i$$

la composante, orthogonale à l'orbite, du champ de Jacobi $S = \sum_{i=0}^{n-1} y_i E_i = xT + Y$, et :

$$f_s(t) = \|Y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2(t).$$

Concernant le tenseur de courbure on écrit $\langle R(a, b)c, d \rangle = R(a, b, c, d)$. Des conditions sur la métrique et le champ magnétique entraînent les propriétés voulues de la composante orthogonale des champs de Jacobi.

PROPOSITION 4.3. *Si la courbure sectionnelle K est pincée :*

$$-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2 < 0,$$

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

et si le premier jet du champ magnétique b vérifie l'inégalité :

$$\tfrac{5}{4}\|b\|^2 + \|D_\bullet b\| \leq k_1^2,$$

alors le flot associé ψ est sans points conjugués.

Démonstration. On utilise le résultat suivant qui est démontré dans la §6.

LEMME 4.1. *On suppose que les courbes sont paramétrées à vitesse un. Alors l'inégalité suivante a lieu :*

$$\tfrac{1}{2} f_s''(t) \geq (\tfrac{5}{4}\|b\|^2 + \|D_\bullet b \cdot T\|)\|Y\|^2 - R(T, Y, T, Y). \tag{10}$$

Ce lemme entraîne que la norme de la composante orthogonale d'un champ de Jacobi est une fonction convexe du temps de parcours : elle ne peut donc s'annuler plus d'une fois, sauf si le champ de Jacobi représente un simple changement de paramétrage de l'orbite. □

Définition 4.3. Soit N une variété compacte. Soit X un champ de vecteurs non-singulier sur N, de classe $\mathcal{C}^1$, et soit (φ_t) le flot qu'il engendre. Il est dit de type Anosov [**2**] s'il existe une décomposition du fibré vectoriel tangent à la variété N :

$$TN = \mathbb{R} \cdot X \oplus E^S \oplus E^U,$$

une métrique riemannienne $\| \|$ sur N, et des constantes A, B, a, b, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} A \geq 1 \geq B > 0; & & a \geq b > 0, \\ \forall \xi \in E^S & \forall t \geq 0 & Be^{-at}\|\xi\| \leq \|d\varphi_t \xi\| \leq Ae^{-bt}\|\xi\|, \\ \forall \xi \in E^U & \forall t \geq 0 & Be^{bt}\|\xi\| \leq \|d\varphi_t \xi\| \leq Ae^{at}\|\xi\|, \end{array}$$

Ces inégalités décrivent un comportement dit *hyperbolique* ; les espaces E^S, $E^S \oplus \mathbb{R}X$, E^U et $E^U \oplus \mathbb{R}X$ sont appelés respectivement *stable, centre-stable, instable* et *centre-instable*.

THÉORÈME 4.1. *Soit M une variété riemannienne compacte, avec une courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$. Si le champ magnétique b vérifie l'inégalité suivante :*

$$\tfrac{5}{4}\|b\|_\infty^2 + \|Db\|_\infty < k_1^2,$$

alors le flot est de type Anosov.

Ce théorème est démontré dans la §6. On remarque que la condition requise est d'intérieur non vide respectivement dans les topologies $\mathcal{C}^1$ pour le champ magnétique b et $\mathcal{C}^2$ pour la métrique g. Dans le cas des surfaces (§7) on réduit le coefficient $5/4$ à 1. Le flot horocyclique des surfaces à courbure -1 donne un exemple de cas limite où ce dernier résultat ne peut être amélioré. Une condition nécessaire pour que le flot soit de type Anosov fait intervenir une intégrale sur le champ magnétique [**22**, Théorème 1.3] :

$$\int_{v \in T^1 M} \|b \cdot v\|^2 \, d\lambda < -(n-1) \int_{v \in T^1 M} \mathrm{Ric}(v) \, d\lambda,$$

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

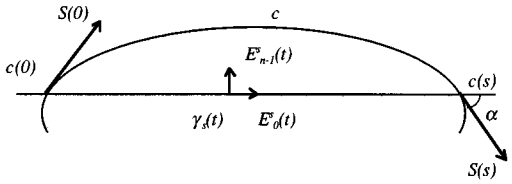


FIGURE 1.

où Ric désigne la courbure de Ricci et λ la mesure de Liouville normalisée.

On appelle *horosphères* les projections des variétés stables sur le revêtement universel $\widetilde{M}$. On sait que si le flot est de type Anosov et de classe $\mathcal{C}^2$, alors toute mesure invariante absolument continue par rapport à Lebesgue est ergodique [**2**].

PROPOSITION 4.4. *Si le champ magnétique est irrotationnel et de classe $\mathcal{C}^2$, si le flot magnétique sur T^1M est de type Anosov, alors celui-ci est ergodique pour la mesure de Liouville.*

5. *Quasi-géodésiques et sphère à l'infini*

5.1. *Quasi-géodésiques et cordes géodésiques.* Dans cette section on démontre d'abord la Proposition 3.1, puis le Théorème 3.1. On suppose que la courbure de la variété $\widetilde{M}$ (difféomorphe à $\mathbb{R}^n$) est strictement négative, pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$.

Définition 5.1. On appelle *corde* d'une courbe toute géodésique reliant deux de ses points. On dit que la courbe c, définie sur $\mathbb{R}$, *part à l'infini* si $d(c(0), c(t))$ tend vers l'infini quand $|t|$ tend vers l'infini.

PROPOSITION 3.1. *Sur une variété riemannienne $\widetilde{M}$ simplement connexe à courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$, si le champ magnétique a une norme uniforme strictement inférieure à k_1, alors ses orbites sont des quasi-géodésiques.*

La démonstration de la Proposition 3.1 se fait en deux temps : on démontre d'abord que la courbe part à l'infini si la norme uniforme du champ magnétique est strictement inférieure à k_1, en utilisant une équation différentielle sur l'angle que forme la courbe avec une corde géodésique. Cette équation met en évidence la manière dont la courbure sectionnelle négative contrarie les effets du champ magnétique. On démontre ensuite que la courbe reste dans un voisinage tubulaire d'une géodésique.

Démonstration. En suivant la Figure 1, on se donne :

(i) une courbe $s \mapsto c(s)$ de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée à vitesse un : on note $S(s) = (d/ds)c(s)$ son vecteur vitesse ;

(ii) la corde géodésique $t \mapsto \gamma_s(t)$ paramétrée à vitesse un et joignant $c(0) = \gamma_s(0)$ à $c(s) = \gamma_s(l(s))$;

(iii) la base orthonormée directe $s \mapsto (E_i^s(t))_{i=0,n-1}$ parallèle le long de la géodésique γ_s, avec $E_0^s(t) = (\partial/\partial t)\gamma_s(t)$;

(iv) le champ de Jacobi $J^s(t) = (\partial/\partial s)\gamma_s(t)$ de la variation de géodésiques $s \mapsto \gamma_s$ (on a $J^s(0) = 0$ et $J^s \perp E_0^s$ pour tout t) ;

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

(v) l'angle $\alpha(s) \in [0, \pi]$ entre les vecteurs $E_0^s(l(s))$ et $S(s)$. C'est la grandeur adéquate à l'étude du comportement de la courbe c.

LEMME 5.1. *Si la norme uniforme du champ magnétique sur la courbe $c(s)$ est strictement inférieure à k_1, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'angle α vérifie :* $\cos\alpha(s) > \varepsilon$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\frac{dc}{ds}(s) = \frac{dl}{ds}E_0 + J_s(l(s)), \quad \cos\alpha(s) = \left\langle \frac{dc}{ds}, E_0 \right\rangle = \frac{dl}{ds}, \quad \sin\alpha(s) = \|J_s(l(s))\|. \tag{11}$$

On remarque que l'application $s \mapsto \cos\alpha(s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que les applications α et $\sin\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles où $\sin\alpha$ ne s'annule pas.

En dérivant les équations (11), on obtient :

LEMME 5.2. *Quand son sinus n'est pas nul, l'angle α vérifie l'équation :*

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left\langle b \cdot E_0, \frac{1}{\|J_s\|}J_s \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\|J_s\|}J_s, \frac{D}{dt}J_s \right\rangle, \tag{12}$$

où $D/dt = D_{\partial\gamma/\partial t}$.

Or, toujours quand $\sin\alpha \neq 0$, les théorèmes de comparaison des champs de Jacobi du flot géodésique [**17**] donnent l'estimation suivante :

$$k_1 \leq k_1 \coth k_1 l(s) \leq \left\langle \frac{1}{\|J_s\|^2}J_s, \frac{D}{dt}J_s \right\rangle \leq k_0 \coth k_0 l(s). \tag{13}$$

L'étude des inéquations différentielles suggérées par le Lemme 5.2 et les inégalités (13) permet d'exprimer des conditions sur le champ magnétique pour contrôler l'angle α.

En tout point où $\sin\alpha \neq 0$, l'angle α vérifie :

$$\frac{d\alpha}{ds} \leq \|b\|_\infty - k_1 \sin\alpha.$$

On considère les solutions $y(x)$ de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = C - k\sin y \quad \text{avec} \quad k > C > 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 0. \tag{14}$$

Posant :

$$P(y) = \frac{\tan(y/2) - k/C}{\sqrt{k^2/C^2 - 1}},$$

on a :

$$x = \frac{1}{C\sqrt{k^2/C^2 - 1}} \cdot \ln\left| \frac{P(y) - 1}{P(y) + 1} \cdot \frac{P(0) + 1}{P(0) - 1} \right|.$$

La fonction y croît strictement de 0 à $2\arctan(k/C - \sqrt{k^2/C^2 - 1}) < \pi/2$ quand x va de 0 à $+\infty$.

On peut comparer les fonctions α et y dans l'esprit du lemme de Gronwall. L'application y est la solution de l'équation (14) avec $k = k_1$ et $\|b\|_\infty < C < k_1$. On définit $v(s) = y(s) - \alpha(s)$.

Soit un réel positif s tel que $v(s) = 0$.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

(a) si $\alpha(s) = 0$ alors $s = 0$;
(b) si $\alpha(s) \neq 0$ alors $\alpha'(s)$ existe ;
  (i) si $v'(s) \leq 0$ cela contredit les relations (12) et (14) qui entraînent $v'(s) > 0$,
  (ii) si $v'(s) > 0$ et s'il existe un point $\sigma \in]0, s[$ vérifiant $v(\sigma) = 0$ alors on peut supposer $v'(\sigma) \leq 0$.
  (iii) si $v'(s) > 0$ et s'il n'existe pas de point $\sigma \in]0, s[$ vérifiant $v(\sigma) = 0$, alors l'application v est strictement négative sur l'intervalle $]0, s[$, et sa dérivée converge vers une limite strictement positive en 0, ce qui est impossible.

La fonction continue v ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Si elle était strictement négative, le calcul de la limite à droite en 0 de $v'(s)$ fournirait une contradiction. La positivité de la fonction v et les propriétés de l'application y permettent de conclure avec $\varepsilon = \cos(\lim_{+\infty} y)$. □

LEMME 5.3. *Sous les hypothèses du Lemme 5.1, la courbe c part à l'infini.*

Démonstration. Avec les notations précédentes, on observe que $d(c(0), c(s)) \geq \varepsilon \cdot s$. □

LEMME 5.4. *Sous les hypothèses du Lemme 5.1, la courbe reste à une distance uniformément bornée de ses cordes.*

Démonstration. On utilise toujours les mêmes notations. On prend deux nombres réels $s_0 < s_1$ strictement positifs. La distance du point $c(s_0)$ à la corde γ_{s_1} est majorée par la longueur de la courbe $s \mapsto \gamma_s(l(s_0))$:

$$d(c(s_0), \gamma_{s_1}) \leq \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(l(s_0)) \right\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \|J_s(l(s_0))\| \, ds. \tag{15}$$

Des théorèmes de comparaison des champs de Jacobi [**17**] et de la dernière relation (11), on déduit :

$$\|J_s(l(s_0))\| \leq \frac{\operatorname{sh} k_1 l(s_0)}{\operatorname{sh} k_1 l(s)} \cdot \sin \alpha(s). \tag{16}$$

Des équations (15) et (16) on déduit :

$$d(c(s_0), \gamma_{s_1}) \leq \int_{s_0}^{s_1} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sh} k_1 l(s_0)}{\operatorname{sh} k_1 l(s)} \cdot \frac{dl}{ds} \, dt \leq \int_{l(s_0)}^{l(s_1)} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{sh} k_1 l(s_0)}{\operatorname{sh} k_1 l} \, dl,$$

$$d(c(s_0), \gamma_{s_1}) \leq \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \cdot \operatorname{sh} k_1 l(s_0) \cdot \ln \frac{1}{\operatorname{th}(k_1 l(s_0)/2)} \leq \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$ □

Cela entraîne le lemme suivant, utilisé pour démontrer la Proposition 3.1.

LEMME 5.5. *Si la norme uniforme du champ magnétique est strictement inférieure à k_1, alors il existe une unique géodésique asymptote à la courbe, c'est-à-dire une géodésique qui reste à distance bornée de la courbe.*

Démonstration. C'est un raisonnement classique dû à Morse [**23**, Chapitre 5, p. 39 et suivantes].

On fixe une date s_1. Soit s_2 un réel plus grand. Les théorèmes de comparaison des champs de Jacobi assurent que le vecteur vitesse en $c(s_1)$ de la géodésique joignant $c(s_1)$

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

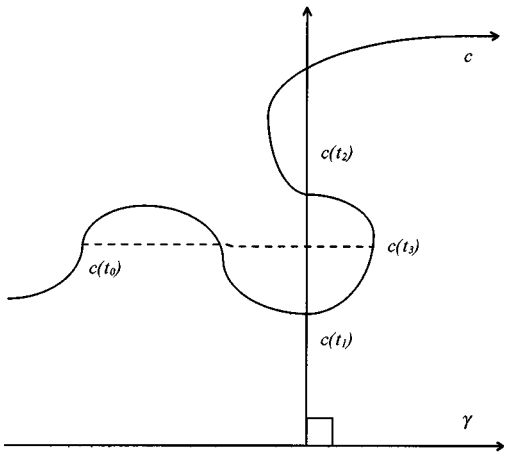


FIGURE 2.

à $c(s_2)$ converge exponentiellement quand s_2 tend vers $+\infty$. On appelle c_+ l'extrémité de la demi-géodésique limite. On procède de même en faisant tendre s_1 vers $-\infty$ à s_2 fixé, et on obtient une origine c_-. Alors le point à l'infini c_- est différent du point c_+ puisque la géodésique qui joint $c(s_1)$ et $c(s_2)$ reste à distance bornée du point $c(0)$, pour tous temps $s_1 < 0 < s_2$. La courbe c est dans le voisinage tubulaire de rayon $\rho = \sqrt{1-\varepsilon^2}/\varepsilon$ de la géodésique reliant c_- à c_+. □

On se donne deux réels $s_1 < s_2$. On a évidemment

$$s_2 - s_1 \geq d(c(s_1), c(s_2)),$$

ce qui donne la deuxième inégalité de (3). La démonstration du Lemme 5.3 entraîne la première inégalité.

La Proposition 3.1 est donc démontrée. □

THÉORÈME 3.1. *Sur une variété M de courbure sectionnelle pincée $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$, un champ magnétique de norme uniforme strictement inférieure à k_1 engendre un flot orbite-équivalent au flot géodésique sous-jacent.*

Démonstration. On peut suivre la Figure 2 pour la démonstration du Théorème 3.1. Soient :

(i) une trajectoire $c(t)$ associée au champ magnétique paramétrée à vitesse un ;
(ii) sa géodésique asymptote $\gamma(u)$ paramétrée à vitesse un ;
(iii) la famille de géodésiques $c_u(s)$ intersectant γ orthogonalement, et vérifiant $c(t) = c_{u(t)}(l(t))$.

Si la projection orthogonale de la courbe c sur la géodésique γ n'était pas une bijection, il existerait deux dates $t_1 < t_2$ telles que les points $c(t_1)$ et $c(t_2)$ se projettent sur un même point. Alors il existerait deux dates t_0 et t_3 ($t_1 < t_3 < t_2$ et $t_0 \ll t_1$) telles que l'angle entre la courbe c et la géodésique joignant $c(t_0)$ à $c(t_3)$ atteigne $\pi/2$, par exemple en prenant pour t_3 un extremum de la distance entre $c(t_0)$ et l'arc $c([t_1, t_2])$. Ceci contredit le Lemme 5.1.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Cette projection fournit une équivalence d'orbites entre le flot du champ magnétique et le flot géodésique. Cette équivalence d'orbites est une quasi-isométrie.

Le Théorème 3.1 est démontré. □

5.2. *Sphère à l'infini.* On se place encore dans les mêmes conditions : on suppose que la courbure de la variété $\widetilde{M}$ (difféomorphe à $\mathbb{R}^n$) est strictement négative, pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$.

LEMME 5.6. *Si le flot magnétique est sans points conjugués et si $\|b\|_\infty < k_1$, alors deux points quelconques du revêtement universel de la variété sont reliés dans un ordre donné par une unique trajectoire du champ magnétique b.*

Démonstration. La première hypothèse implique que l'exponentielle est un difféomorphisme local ; la seconde, que l'exponentielle est propre ; on en déduit que c'est un revêtement. Comme $\widetilde{M}$ est simplement connexe, c'est forcément un homéomorphisme global. □

Définition 5.2. Quand le flot est sans points conjugués on définit les points à l'infini comme les classes d'orbites dont les paramétrages restent à distance bornée quand le temps tend vers $+\infty$.

Sous les hypothèses du Théorème 3.1, on observe que l'ensemble de ces points est homéomorphe à la sphère à l'infini du flot géodésique.

PROPOSITION 5.1. *Si, de plus, le flot est de type Anosov, alors deux points à l'infini (pour le flot géodésique) sont joints dans un ordre donné par une unique trajectoire.*

Démonstration. On note ρ la distance maximale entre une trajectoire associée au champ magnétique b et toute corde géodésique (voir la Définition 5.1). En suivant la Figure 3, on se donne :

(i) p un point du revêtement universel $\widetilde{M}$;
(ii) a et b deux points du bord hyperbolique $\partial\widetilde{M}$;
(iii) γ_a et γ_b les géodésiques joignant le point p respectivement aux points a et b ;
(iv) γ la géodésique joignant a à b ;
(v) et S la sphère géodésique de centre p et de rayon $2\rho + d(p, \gamma)$.

Pour tout entier n, soient :

(vi) c_n la trajectoire associée à b allant de $\gamma_a(n)$ à $\gamma_b(n)$;
(vii) et γ_n la géodésique joignant ces deux points.

Pour un entier n assez grand, les courbes c_n et γ_n intersectent la sphère S. On considère les vecteurs tangents, en le premier contact avec S :

(viii) v à la géodésique γ ;
(ix) u_n à la courbe c_n ;
(x) v_n à la géodésique γ_n.

On sait que la suite (v_n) converge vers le vecteur v.

La restriction du fibré unitaire tangent $T^1\widetilde{M}$ à la sphère S est une partie compacte qui contient les vecteurs v, u_n, v_n. Soit u_{n_k} une sous-suite qui converge vers une valeur

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

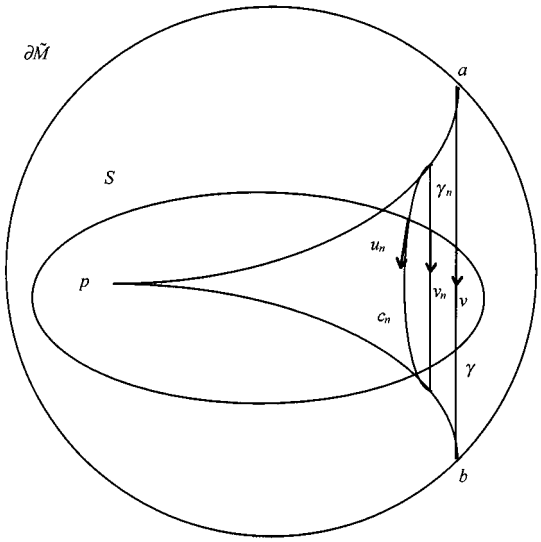


FIGURE 3.

d'adhérence u. Soit c la trajectoire associée au champ magnétique b, de condition initiale u. On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t. } \forall n \geq N(\varepsilon) \qquad \sup_{t \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]} d(c_n(t), \gamma_n(t)) \leq \rho.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Soit k assez grand pour que $n_k \geq N(\varepsilon)$ et :

$$\sup_{t \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]} \{d(\gamma_{n_k}(t), \gamma), d(c_{n_k}(t), c)\} < \varepsilon.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit des deux inégalités précédentes :

$$\sup_{t \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]} d(c(t), \gamma) \leq 2\varepsilon + \rho,$$

d'où

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d(c(t), \gamma) \leq \rho$$

donc γ est l'unique géodésique asymptote à c. On suppose qu'il existe une autre valeur d'adhérence u' de la suite (u_n), alors elle engendre une autre trajectoire c' associée au champ magnétique b qui reste à distance finie de la géodésique γ. Par conséquent, d'après la démonstration du Théorème 3.1, la distance entre les vecteurs vitesses au temps t de c et c' croît au plus comme une fonction affine de $|t|$. Le caractère Anosov assure que le vecteur u' appartient à l'orbite de u, donc il lui est égal. En effet, la structure de produit local permet de définir les variétés centre-stables comme ensemble de vecteurs dont les orbites croissent au plus comme des fonctions affines de $t > 0$ (ou constantes, ou polynomiales de degré fixé, puisque l'échelle de comparaison est exponentielle à taux fixe). Les vecteurs u et u' sont dans la même variété centre-stable et dans la même variété centre-instable,

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

donc dans la même orbite. Leurs pieds correspondent au premier contact avec la sphère S, donc ils sont bien confondus. La suite u_n admet une unique valeur d'adhérence donc elle converge. Par suite, la courbe c est unique. □

L'espace des orbites orientées du flot magnétique est donc homéomorphe au carré de la sphère de dimension $n-1$ privé de sa diagonale.

6. *L'équation de Sturm–Liouville*

6.1. *Convexité de la norme des champs de Jacobi.* Ce pararagraphe est consacré à la démonstration du Lemme 4.1. D'après la relation (4), on peut dériver l'application $f_s = \|Y_s\|^2$ comme suit :

$$f_s'(t) = 2\langle Y, \mathcal{D}Y\rangle \; ; \quad f_s''(t) = 2\langle Y, \mathcal{D}^2 Y\rangle + 2\langle \mathcal{D}Y, \mathcal{D}Y\rangle. \tag{17}$$

Dans l'équation des champs de Jacobi (5), on effectue le produit scalaire avec la composante orthogonale Y :

$$\langle \mathcal{D}^2 Y, Y\rangle + \langle b\cdot \mathcal{D}S, Y\rangle + \langle D_T b\cdot (xT), Y\rangle + R(T,Y,T,Y) = \langle D_S b\cdot T, Y\rangle. \tag{18}$$

Or on a :

$$\langle D_S b\cdot T, Y\rangle - \langle D_T b\cdot (xT), Y\rangle = \langle D_Y b\cdot T, Y\rangle, \tag{19}$$

et d'autre part :

$$\langle b\cdot \mathcal{D}S, Y\rangle = \langle b\cdot \mathcal{D}Y, Y\rangle + \langle b\cdot (x'T), Y\rangle.$$

Comme les courbes sont paramétrées à vitesse un, l'équation (7) entraîne :

$$\langle b\cdot \mathcal{D}S, Y\rangle = \langle b\cdot \mathcal{D}Y, Y\rangle + \langle b\cdot Y, T\rangle^2. \tag{20}$$

En utilisant les équations (18), (19) et (20), l'expression de f_s'' (17) devient :

$$\tfrac{1}{2} f_s''(t) = \langle \mathcal{D}Y, \mathcal{D}Y\rangle - \langle b\cdot \mathcal{D}Y, Y\rangle + \langle D_Y b\cdot T, Y\rangle - \langle Y, b\cdot T\rangle^2 - R(T,Y,T,Y).$$

On cherche à éliminer les termes *dissipatifs* en $\mathcal{D}Y$. On a :

$$\langle \mathcal{D}Y, \mathcal{D}Y\rangle - \langle b\cdot \mathcal{D}Y, Y\rangle = \|\mathcal{D}Y - \tfrac{1}{2} b\cdot Y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|b\cdot Y\|^2 \geq -\tfrac{1}{4}\|b\cdot Y\|^2,$$

d'où :

$$\tfrac{1}{2} f_s''(t) \geq -\tfrac{1}{4}\|b\cdot Y\|^2 + \langle D_Y b\cdot T, Y\rangle - \langle Y, b\cdot T\rangle^2 - R(T,Y,T,Y),$$

ce qui entraîne la relation (10) et termine la démonstration du Lemme 4.1.

6.2. *Caractère Anosov.* Grâce à la base orthonormée construite le long de la courbe solution dans la §4, on considère les composantes orthogonales des champs de Jacobi comme à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$. Les endomorphismes résolvants des équations différentielles sont identifiés à des matrices. On remplace l'opérateur $\mathcal{D}$ défini dans la §4 par l'apostrophe et on utilise la norme linéaire sur les matrices.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Sur l'espace vectoriel des matrices symétriques on utilise l'ordre habituel issu des formes quadratiques. On appelle G le champ de matrices orthogonales solution de l'équation différentielle :

$$G' = -\tfrac{1}{2}A \cdot G \quad \text{avec} \quad G(0) = \mathrm{Id}$$

où la matrice antisymétrique A est définie dans la formule (9).

On considère une résolvante $\mathcal{Y}$ de la composante orthogonale de l'équation des champs de Jacobi (8). C'est un champ $\mathcal{Y} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n-1, \mathbb{R})$. On rappelle qu'il suffit de trouver deux résolvantes $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ telles que

$$\begin{vmatrix} \mathcal{Y}_1(0) & \mathcal{Y}_2(0) \\ \mathcal{Y}_1'(0) & \mathcal{Y}_2'(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

pour que toute composante orthogonale Y d'un champ de Jacobi vérifie

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1(t) & \mathcal{Y}_2(t) \\ \mathcal{Y}_1'(t) & \mathcal{Y}_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1(0) & \mathcal{Y}_2(0) \\ \mathcal{Y}_1'(0) & \mathcal{Y}_2'(0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y(0) \\ Y'(0) \end{pmatrix}.$$

Alors le champ de matrices $Z = G^{-1}\mathcal{Y}$ est solution de l'équation de Sturm–Liouville :

$$Z'' + \mathcal{Q} \cdot Z = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{Q} = G^{-1}(-\tfrac{1}{2}A' - \tfrac{1}{4}A^2 + B)G.$$

où les matrices A et B sont définies dans la formule (9). Si maintenant on suppose que la résolvante $\mathcal{Y}$ est à valeurs dans le groupe linéaire, on peut considérer le champ $V = Z' \cdot Z^{-1}$. Il est solution de l'équation de Ricatti :

$$V' + V^2 + \mathcal{Q} = 0. \tag{21}$$

Les parties symétrique $\mathcal{S}$ et antisymétrique $\mathcal{A}$ de la solution V de l'équation de Ricatti vérifient l'équation :

$$\begin{cases} \mathcal{S}' + \mathcal{S}^2 + \mathcal{A}^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{Q} +^t \mathcal{Q}) = 0 \\ \mathcal{A}' + \mathcal{S}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{S} + \frac{1}{2}(\mathcal{Q} -^t \mathcal{Q}) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

En contrôlant la norme $\mathcal{C}^1$ du champ magnétique b, les espaces centre-stables du flot peuvent être construits comme graphes de certaines matrices $\mathcal{Y}'(0) \cdot \mathcal{Y}(0)^{-1}$. La convergence exponentielle des composantes orthogonales entraîne celle des composantes tangentielles, qui permettent de définir les espaces stables. On utilise des comparaisons d'équations différentielles dans la lignée du lemme de Gronwall, du même type que le résultat connu pour les flots géodésiques [**17**] rappelé ci-dessous.

THÉORÈME 6.1. *On considère les équations matricielles* symétriques

$$U'(t) + U^2(t) + R(t) = 0 \quad \textit{et} \quad U' + U^2 + R_0(t) = 0\,;$$

et on suppose vérifiée l'inégalité : $R(t) \leq R_0(t)$, c'est-à-dire :

$$\sup \mathrm{Sp}(R(t)) \leq \inf \mathrm{Sp}(R_0(t)),$$

pour tout réel t. Alors les solutions respectives U et U_0 de même condition initiale positive en $t = t_1$ vérifient : $U(t) \geq U_0(t)$ pour $t \geq t_1$ (toujours au sens des formes quadratiques).

Les espaces stables sont construits à partir de limites de champs de matrices $(V_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Définition 6.1. Pour $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on définit les solutions :

- V_τ telle que $V_\tau(\tau) = -q_1 \,\mathrm{Id}_{n-1}$ si $\tau > 0$, et
- V_τ telle que $V_\tau(\tau) = q_1 \,\mathrm{Id}_{n-1}$ si $\tau < 0$,

de l'équation de Ricatti (21). Alors les composantes vérifient :

- $\mathcal{S}_\tau(\tau) = -q_1 \,\mathrm{Id}_{n-1}$ et $\mathcal{A}_\tau(\tau) = 0$ si $\tau > 0$,
- $\mathcal{S}_\tau(\tau) = q_1 \,\mathrm{Id}_{n-1}$ et $\mathcal{A}_\tau(\tau) = 0$ si $\tau < 0$.

En appliquant le Théorème 6.1 à la première équation de (22) et en remarquant que comme la matrice $\mathcal{A}$ est antisymétrique, son carré est symétrique négatif, on obtient le résultat suivant :

LEMME 6.1. *S'il existe une constante $q_1 > 0$ telle que pour tout réel t,*

$$\mathrm{Sp}(-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^t\,\mathcal{Q})) \subset [q_1^2, +\infty[\,,$$

alors :

(1) *si $\tau > 0$, pour tout $t \le \tau$, on a $\mathrm{Sp}(\mathcal{S}_\tau(t)) \subset]-\infty, -q_1]$;*
(2) *si $\tau < 0$, pour tout $t \ge \tau$, on a $\mathrm{Sp}(\mathcal{S}_\tau(t)) \subset [q_1, +\infty[$.*

L'hypothèse est vérifiée si $\frac{5}{4}\|b\|_\infty^2 + \|Db\|_\infty < k_1^2$. Ce lemme offre un premier contrôle de la partie antisymétrique $\mathcal{A}_\tau$. La méthode de variation des constantes donne le résultat suivant :

LEMME 6.2. *Pour tout réel τ non-nul, étant donnée la matrice $\mathcal{S}_\tau$ qui vérifie les conditions du Lemme précédent (6.1), soient $\mathcal{A}_1^\tau$, $\mathcal{A}_2^\tau$ les solutions de :*

$$\mathcal{A}_1' + \mathcal{S}_\tau \cdot \mathcal{A}_1 = 0 \quad \textit{avec} \quad \mathcal{A}_1^\tau(\tau) = \mathrm{Id}_{n-1}\ ;$$
$$\mathcal{A}_2' + \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{S}_\tau = 0 \quad \textit{avec} \quad \mathcal{A}_2^\tau(\tau) = \mathrm{Id}_{n-1}\,.$$

Alors :

- *si $\tau > 0$, pour tout temps $t \le \tau$, les matrices $\mathcal{A}_1^\tau(t)$ et $\mathcal{A}_2^\tau(t)$ sont inversibles ; on a les inégalités pour $j = 1, 2$*

$$\|\mathcal{A}_j^\tau(t)\| \le e^{q_1(t-\tau)} < 1\ ;$$

et on a la formule

$$\mathcal{A}^\tau(t) = \mathcal{A}_1^\tau(t) \cdot \left[\int_{s=\tau}^{t} \mathcal{A}_1^\tau(s)^{-1} \cdot \tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} - {}^t\,\mathcal{Q})(s) \cdot \mathcal{A}_2^\tau(s)^{-1}\, ds\right] \cdot \mathcal{A}_2^\tau(t)\ ;$$

- *si $\tau < 0$, pour tout temps $t \ge \tau$, les matrices $\mathcal{A}_1^\tau(t)$ et $\mathcal{A}_2^\tau(t)$ sont inversibles ; on a les inégalités pour $j = 1, 2$*

$$\|\mathcal{A}_j^\tau(t)\| \le e^{-q_1(t-\tau)} < 1\ ;$$

et on a la même formule.

De ce lemme on déduit immédiatement :

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

LEMME 6.3.

- *Si $\tau > 0$, alors pour tout réel $t \leq \tau$, on a :*

$$\|\mathcal{A}^\tau(t)\| \leq \frac{1}{2q_1} \left\| \frac{1}{2}(\mathcal{Q} - {}^t\mathcal{Q}) \right\|_\infty .$$

- *Si $\tau < 0$, alors pour tout réel $t \geq \tau$, on a :*

$$\|\mathcal{A}^\tau(t)\| \leq \frac{1}{2q_1} \left\| \frac{1}{2}(\mathcal{Q} - {}^t\mathcal{Q}) \right\|_\infty .$$

Alors, de la même manière que pour le Lemme 6.1, on peut appliquer le Théorème 6.1 en utilisant le résultat précédent :

LEMME 6.4. *On suppose qu'il existe des constantes $q_0 > 0$, $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$ telles que pour tout réel t,*

$$\mathrm{Sp}(-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^t\mathcal{Q})) \subset [q_1^2, q_0^2] \quad \textit{et} \quad \|\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} - {}^t\mathcal{Q})\|_\infty \leq q_2.$$

Alors :

(1) *si $\tau > 0$, pour tout $t \leq \tau$, on a* $\mathrm{Sp}(\mathcal{S}_\tau(t)) \subset \big[-\sqrt{q_0^2 + (q_2/2q_1)^2}, -q_1 \big]$;

(2) *si $\tau < 0$, pour tout $t \geq \tau$, on a* $\mathrm{Sp}(\mathcal{S}_\tau(t)) \subset \big[q_1, \sqrt{q_0^2 + (q_2/2q_1)^2}\big]$.

Tous les outils sont maintenant réunis pour démontrer le :

LEMME 6.5. *Sous les hypothèses du lemme précédent, il existe une constante $C(q_0, q_1, q_2) > 0$ telle que :*

(i) *pour $\sigma > \tau > 0$ et $t \leq \tau$, on ait*

$$\|V_\sigma(t) - V_\tau(t)\| \leq C \cdot e^{2q_1(t-\tau)} ;$$

(ii) *pour $\sigma < \tau < 0$ et $t \geq \tau$, on ait*

$$\|V_\sigma(t) - V_\tau(t)\| \leq C \cdot e^{-2q_1(t-\tau)}.$$

Démonsration. On suppose $\sigma > \tau > 0$ et on considère le champ de matrices

$$X(t) = V_\sigma(t) - V_\tau(t).$$

Sous les hypothèses du Lemme 6.4, les Lemmes 6.3 et 6.4 entraînent :

$$\|X(\tau)\| = \|V_\sigma(\tau) - q_1 \,\mathrm{Id}\,\| \leq \frac{q_2}{2q_1} + \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{q_2}{2q_1}\right)^2} - q_1.$$

D'autre part le champ X vérifie :

$$X' + V_\sigma X + X V_\tau = 0.$$

On utilise les champs X_1^σ et X_2^τ tels que :

$$\frac{d}{dt}X_1^\sigma + V_\sigma X_1^\sigma = 0 \quad \text{avec} \quad X_1^\sigma(\sigma) = \mathrm{Id},$$
$$\frac{d}{dt}X_2^\tau + V_\tau X_2^\tau = 0 \quad \text{avec} \quad X_2^\tau(\tau) = \mathrm{Id}\,.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Alors, grâce au Lemme 4.1 on obtient les estimations suivantes :

$$\forall t \leq \tau \quad \|X_1^\sigma(t)\| \leq e^{q_1(t-\sigma)} \quad \text{et} \quad \|X_2^\tau(t)\| \leq e^{q_1(t-\tau)}.$$

Par intégration de l'équation différentielle, on déduit l'existence d'une constante C dépendant de q_0, q_1, q_2, telle que :

$$\|X(t)\| = \|X_1^\sigma(t) \cdot X(\tau) \cdot X_2^\tau(t)\| \leq C \cdot e^{2q_1(t-\tau)}.$$

La deuxième partie du lemme se démontre de la même manière. □

Pour finir, on note que l'hypothèse de compacité de la variété M entraîne l'existence des constantes q_0 et q_2. L'autre hypothèse du Théorème 4.1 entraîne l'existence de q_1. Du Lemme 6.4, on déduit qu'à t fixé, la famille $(V_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}}$ vérifie la condition de Cauchy en $+\infty$ et en $-\infty$. Pour $t = 0$, les limites donnent alors respectivement les espaces centre-stable et centre-instable. Étant données deux composantes orthogonales de champs de Jacobi : Y_+ croissant exponentiellement, et Y_- décroissant exponentiellement, on définit leurs composantes tangentielles respectives grâce à l'équation (7) :

$$x_+(t) = \int_{-\infty}^{t} \langle T, b \cdot Y_+ \rangle \quad \text{et} \quad x_-(t) = \int_{t}^{+\infty} -\langle T, b \cdot Y_- \rangle.$$

Ceci termine la construction des espaces stable et instable.

7. *Les surfaces*

Dans cette section on se limite au cas des surfaces orientées, munies d'une métrique riemannienne à courbure pincée : $-k_0^2 \leq K \leq -k_1^2$. On identifie *courbure sectionnelle* et *courbure gaussienne*. Un champ magnétique b de classe $\mathcal{C}^k$ sur une surface riemannienne orientée (M, g) est donné par l'application antisymétrique $\kappa \cdot \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la rotation d'angle $\pi/2$ et κ est une application de la variété M dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$. Si on note vol_g le volume riemannien, la 2-forme associée au champ magnétique b est $\beta = \kappa \cdot \mathrm{vol}_g$. Au lieu de flot magnétique on parle de *flot à courbure prescrite* κ [**7**, p. 55–57].

Définition 7.1. Soit κ une application continue sur M à valeurs réelles. Les *courbes à courbure prescrite* κ sont celles dont la courbure géodésique est égale à la fonction κ : ce sont les solutions c, paramétrées à vitesse un, de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt} = \kappa(c(t)) \cdot \mathcal{R}\left(\frac{dc}{dt}(t)\right).$$

Pour un élément v fixé du fibré unitaire tangent, il existe une unique courbe solution de cette équation avec pour condition initiale $dc/dt(0) = v$. L'image du vecteur v par le *flot à courbure prescrite* $\psi = (\psi_t)$ est le vecteur $\psi_t v = dc/dt(t)$.

Le Théorème 3.2 entraîne que tous les flots induits par une courbure prescrite κ et une métrique g sur la même surface M, qui vérifient $\|\kappa\|_\infty < \inf\sqrt{-K(g)}$, sont orbite-équivalents.

Si l'on suppose que la courbure prescrite κ est de classe $\mathcal{C}^1$, le flot préserve la mesure de Liouville puisque le champ magnétique est toujours irrotationnel. Si l'on suppose que

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

la courbure prescrite κ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut établir l'équation des champs de Jacobi. On considère une famille de courbes (c_s) de classe $\mathcal{C}^3$:

$$c_s : \mathbb{R} \to M$$
$$t \mapsto c_s(t)$$

formée de courbes trajectoires du champ magnétique b. On les suppose paramétrées à vitesse un et on note les champs de vecteurs :

$$T = \frac{\partial c_s}{\partial t} \quad \text{et} \quad S = \frac{\partial c_s}{\partial s}.$$

Dans le champ de bases $(T, N = \mathcal{R}T)$, le champ de Jacobi S admet la décomposition : $S = xT + yN$. Les composantes vérifient :

$$\begin{cases} x'' = (\kappa y)' \\ y'' + 2\kappa x' + (K - \kappa^2 - N \cdot \kappa) y = 0. \end{cases}$$

Puisque les courbes sont paramétrées à vitesse constante, on est ramené aux deux équations :

$$\begin{cases} x' = \kappa y \\ y'' + qy = 0 \end{cases} \tag{23}$$

avec $q = K + \kappa^2 - N \cdot \kappa$. On obtient alors les résultats suivants :

PROPOSITION 7.1. *Si $\|\kappa\|_\infty^2 + \|\nabla\kappa\|_\infty \leq k_1^2$, alors le flot à courbure prescrite κ est sans points conjugués.*

THÉORÈME 7.1. *Si la surface M est compacte, et si $\|\kappa\|_\infty^2 + \|\nabla\kappa\|_\infty < k_1^2$, alors le flot est de type Anosov.*

On remarque dans le cas où la courbure K de la surface est constante, que le flot horocyclique rend le coefficient q nul.

Comme pour le flot géodésique, les espaces centre-stables présentent une certaine régularité.

Définition 7.2. Sous les hypothèses du théorème précédent, à un vecteur $v \in T^1M$ on associe les champs de Jacobi stable et instable le long de l'orbite de v, de composantes $(x_-(v,t), y_-(v,t))$ et $(x_+(v,t), y_+(v,t))$ qui vérifient :

$$x_-(v, +\infty) = 0, \quad y_-(v, +\infty) = 0, \quad y_-(v, 0) = 1 ;$$
$$x_+(v, -\infty) = 0, \quad y_+(v, -\infty) = 0, \quad y_+(v, 0) = 1.$$

Les espaces stables et instables sont donnés par les applications :

$$v \mapsto (x_-(v,0), y'_-(v,0)), \quad v \mapsto (x_+(v,0), y'_+(v,0)).$$

La forme de l'équation des champs de Jacobi (23) permet d'appliquer directement un résultat connu pour le flot géodésique [**18**] : les calculs d'Eberhard Hopf sont encore valables dans ce cas et prouvent que les applications $v \mapsto y_-(v)$ et $v \mapsto y_+(v)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 7.2. *Sous les hypothèses du Théorème 7.2, les espaces centre-stables et centre-instables du flot à courbure prescrite κ sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Ceci entraîne le résultat suivant, donné sans démonstration :

PROPOSITION 7.3. *Sous les hypothèses du Théorème 7.1, le cercle à l'infini associé au flot à courbure prescrite admet une structure de classe $\mathcal{C}^1$.*

Le cadre qui vient d'être dessiné permet d'exhiber de la rigidité pour les champs magnétiques sur les surfaces.

Définition 7.3. Deux flots orbite-équivalents sur une même variété N sont dits *conjugués* si l'équivalence d'orbites respecte le temps de parcours.

Soit M une variété différentielle. On dit que deux métriques g_1 et g_2 sur la variété M ont *même spectre marqué des longueurs* si, dans chaque classe d'homotopie libre de lacets de M, la borne inférieure des g_1-longueurs des courbes est égale à la borne inférieure des g_2-longueurs des courbes.

Pour le flot à courbure prescrite κ sur la surface M, sous l'hypothèse $\|\kappa\|_\infty < k_1$, dans chaque classe d'homotopie on a une unique orbite. Deux flots ont *même spectre marqué des longueurs* si les longueurs des orbites dans la même classe sont égales.

On dit que deux métriques sont *isométriques* s'il existe un difféomorphisme de la surface, homotope à l'identité, qui envoie une métrique sur l'autre.

En 1988, Otal [**21**] a démontré qu'une métrique à courbure strictement négative sur une surface est déterminée à isométrie près par son spectre marqué des longueurs. En 1989, Croke a démontré que si une surface possède deux métriques à courbure négative dont les flots sont conjugués par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors les métriques sont isométriques. Ces résultats ont été réunis et étendus en 1990 par Croke, Fathi et Feldman.

THÉORÈME 7.2. (Croke *et al* [**9**]) *Soit M une surface fermée et g_1, g_2 des métriques riemanniennes sur M, telles que g_1 soit de courbure négative et g_2 soit sans points conjugués. Si les métriques g_1 et g_2 ont le même spectre marqué des longueurs, alors elles sont isométriques par un difféomorphisme homotope à l'identité.*

Dans le cadre des champs magnétiques on dispose du résultat suivant :

THÉORÈME 7.3. *Soit une surface fermée orientée munie d'une métrique riemannienne g_1 et d'une courbure prescrite κ qui vérifient les hypothèses du Théorème 7.1. On suppose que le flot magnétique est conjugué au flot géodésique d'une autre métrique riemannienne g_2 de courbure sectionnelle strictement négative sur la même surface, ayant le même volume total ; si, de plus, la conjugaison est absolument continue, alors la fonction κ est nulle et les deux métriques sont isométriques.*

Si on a seulement égalité des spectres, on a une conjugaison de classe $\mathcal{C}^0$ [**20**], mais on ne peut pas dire que la conjugaison soit de classe $\mathcal{C}^1$. En effet on ne sait pas si les espaces stables sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on ne peut pas invoquer le théorème de Feldman et Ornstein [**13**]. Dans le cas où le champ magnétique dérive d'un potentiel sur une variété de dimension quelconque, un résultat qui nous a été communiqué par Paternain assure que les espaces stables ne sont de classe $\mathcal{C}^1$ que si le champ magnétique est nul.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Étant donnée une métrique g, on note dv la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent T^1M (de masse totale $2\pi \operatorname{vol}_g M$). On en déduit une mesure sur l'espace des orbites du flot à courbure prescrite κ : on se donne une courbe $c(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ paramétrée par longueur d'arc. On considère les orbites qui coupent la courbe en $c(t)$ avec un angle θ. La mesure sur l'espace des orbites s'écrit :

$$i_X\, dv = \sin\theta\, d\theta\, dt,$$

où X est le champ générateur du flot. On appelle cette mesure *courant de Liouville*.

LEMME 7.1. *Une conjugaison h absolument continue entre deux flots à courbure prescrite ψ^1 et ψ^2 préserve la mesure de Liouville et l'application qu'elle induit sur l'espace des orbites préserve le courant de Liouville, au rapport des aires totales des surfaces près.*

Démonstration. On note λ_i la mesure de Liouville normalisée sur le fibré tangent unitaire de la métrique g_i. La mesure de probabilité $h_\star\lambda_1$ est invariante par ψ^2, ergodique et absolument continue par rapport à λ_2 ; donc par le théorème de décomposition en mesures ergodiques, on a $h_\star\lambda_1 = \lambda_2$. La conjugaison préserve les champs générateurs des flots. Par conséquent l'application induite sur l'espace des orbites a un jacobien constant et envoie la mesure

$$\sin\theta_1\, d\theta_1\, dt_1$$

sur la mesure

$$\frac{\operatorname{vol}_{g_1} M}{\operatorname{vol}_{g_2} M} \sin\theta_2\, d\theta_2\, dt_2. \qquad \square$$

On note ψ^1 le flot associé à g_1 et κ, et ψ^2 le flot géodésique de g_2.

D'après le lemme précédent et l'hypothèse $\operatorname{vol}_{g_1} M = \operatorname{vol}_{g_2} M$, la conjugaison h préserve le volume. On note :

$$v \mapsto \theta \cdot v$$

l'application qui fait tourner un vecteur dans sa fibre d'un angle θ et :

$$\xi : T^1M \to]0, \pi]$$

l'application qui à un vecteur associe le plus petit angle $\theta > 0$ tel que les orbites de $\theta \cdot v$ et v aient une extrémité commune.

L'application $\xi(v)$ est la borne inférieure de deux applications $\xi_1(v)$ et $\xi_2(v)$. La première est l'angle $\theta > 0$ dont il faut tourner un vecteur v pour que l'origine de $\theta \cdot v$ coïncide avec le but de v, la deuxième est l'angle $\theta > 0$ dont il faut tourner un vecteur v pour que le but de $\theta \cdot v$ coïncide avec l'origine de v. Si l'on se donne une courbe à courbure prescrite $c(t)$, la Proposition 7.3 entraîne que les applications $t \mapsto \xi_1(c(t))$ et $t \mapsto \xi_2(c(t))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour $v \in T^1_{g_1}M$ et $\theta \in [0, \xi(v)]$, on définit $\theta'(v, \theta)$ comme l'angle d'intersection des orbites de ψ^2 associées par la conjugaison à $\psi^1_{\mathbb{R}}(v)$ et $\psi^1_{\mathbb{R}}(\theta \cdot v)$ respectivement.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

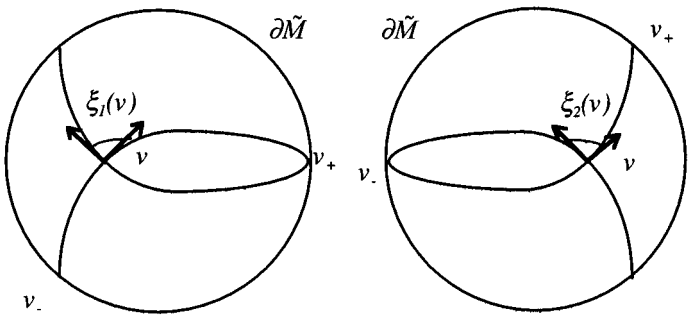


FIGURE 4.

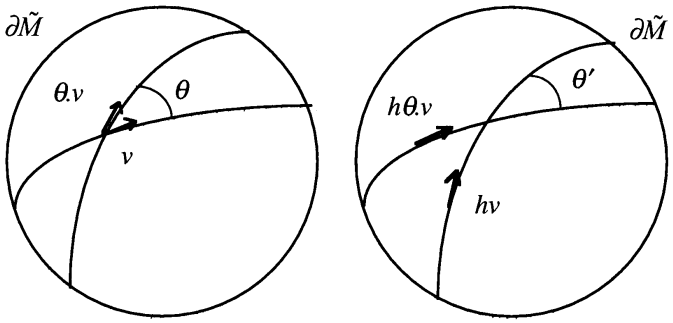


FIGURE 5.

Soit γ une orbite fermée et γ' son image par la conjugaison h. La conjugaison induit un homéomorphisme de l'ensemble :

$$\{(\gamma(t), \theta) \mid 0 \leq t \leq l(\gamma), 0 \leq \theta \leq \xi(\gamma(t))\}$$

sur $\gamma' \times]0, \pi[$ et envoie le courant de Liouville $\sin\theta \, d\theta \, dt$ sur $\sin\theta' \, d\theta' \, dt'$. On a :

$$\frac{1}{l(\gamma)} \int_0^{l(\gamma)} (1 - \cos\xi(\gamma(t))) \, dt = \frac{1}{l(\gamma)} \int_0^{l(\gamma)} \int_0^{\xi(\gamma(t))} \sin\theta \, d\theta \, dt$$
$$= \frac{1}{l(\gamma')} \int_0^{l(\gamma')} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, dt = 2.$$

Donc l'angle $\xi(\gamma(t))$ est égal à π pour tout t appartenant à l'intervalle $[0, l(\gamma)]$. Il ne reste plus qu'à démontrer que la courbure prescrite κ est nulle le long de la trajectoire γ.

Soit δ la géodésique qui reste à distance bornée de γ. Soit $\gamma(t)$ un élément de l'orbite γ. Soit c_t l'orbite du vecteur opposé $-\gamma(t)$. La Proposition 5.1 assure qu'il existe une unique courbe à courbure prescrite joignant deux points à l'infini dans un ordre donné. Alors les courbes c_t coïncident toutes. Donc $\gamma(t)$ peut être parcourue dans les deux sens, et on en déduit que sa courbure est nulle.

Comme les éléments périodiques sont denses dans T^1M, la fonction κ est nulle sur la surface M. On est ramené au cas des flots géodésiques, et on conclut grâce au Théorème 7.2. □

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press

RÉFÉRENCES

[1] V. Arnol'd. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Ch. 3. Mir, 1976.

[2] V. Arnol'd et A. Avez. *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Ch. 3. Gauthier-Villars, 1967.

[3] W. Ballmann, M. Brin et P. Eberlein. Structure of manifolds of nonpositive curvature. I. *Ann. Math.* **122** (1985), 171–203.

[4] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geometry Funct. Anal.* **5** (1995), 731–799.

[5] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot. Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **16** (1996), 623–649.

[6] J. Cheeger et D. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland Mathematical Library, 1975.

[7] I. Cornfeld, S. Fomin et Y. Sinai. *Ergodic Theory*. Springer, 1982.

[8] C. Croke. Rigidity for surfaces of non-positive curvature. *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), 150–169.

[9] C. Croke, A. Fathi et J. Feldman. The marked length spectrum of a surface of nonpositive curvature. *Topology* **31** (1990), 847–855.

[10] C. Croke et B. Kleiner. Conjugacy and rigidity for manifolds with a parallel vector field. *J. Diff. Geom.* **39** (1994), 659–680.

[11] P. Eberlein. When is a geodesic flow of Anosov type? I. *J. Diff. Geom.* **8** (1973), 437–463.

[12] P. Eberlein. When is a geodesic flow of Anosov type? II. *J. Diff. Geom.* **8** (1972), 565–577.

[13] J. Feldman et D. Ornstein. Semi-rigidity of horocycle flows over compact surfaces of variable negative curvature. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **7** (1987), 49–72.

[14] P. Foulon. Géométrie des équations différentielles du second ordre. *Ann. l'Inst. Henri Poincaré, Physique Théor.* **45** (1986), 1–28.

[15] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*, 2nd edn. Universitext, Springer, 1987.

[16] E. Ghys. Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **4** (1984), 67–80.

[17] L. Green. The generalized geodesic flow. *Duke Math. J.* **41** (1974), 115–126.

[18] E. Hopf. Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus II. *Math. Ann.* **117** (1940), 590–608.

[19] A. Katok. Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8** (1988), 139–152.

[20] A. Livčic. Some homology properties of U-systems. *Math. Notes* **10** (1971), 758–763.

[21] J.-P. Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Ann. Math.* **131** (1990), 151–162.

[22] G. Paternain et M. Paternain. Anosov geodesic flows and twisted symplectic structures. *Int. Cong. Dynamical Systems in Montevideo (a tribute to Ricardo Mañé) (Pitman Research Notes in Mathematics, 362)*. Eds F. Ledrappier, J. Lewowicz et S. Newhouse. 1996, pp. 132–145.

[23] W. Thurston. *Notes de Cours: 3-dimensional Geometry and Topology*, 1978.

https://doi.org/10.1017/S0143385799126634 Published online by Cambridge University Press