CrossMark

Arabic Sciences and Philosophy, vol. 25 (2015) pp. 135–166
doi:10.1017/S0957423914000125 © 2015 Cambridge University Press

LES DÉBUTS DE LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE: CONCEPTION ET PRINCIPES

PHILIPPE ABGRALL
Aix Marseille Université, CNRS, CEPERC UMR 7304,
13621, Aix en Provence, France
Email: philippe.abgrall@univ-amu.fr

Abstract. In the *Planisphaerium*, Ptolemy deals with a method of representing a sphere onto a plane, according to principles which were compatible with the stereographic projection. But this projection will only become a real mathematical concept in the 9th century, when al-Farghānī will demonstrate the fundamental property of this projection. It is only in the 10th century that the first general theory of projections of spheres was worked out by al-Qūhī and Ibn Sahl. This paper addresses the reasons which allow to claim that Ptolemy did not conceive of projection and that this conception was based on the Apollonius' definition of the conical surface.

Résumé. Dans son traité intitulé *Le Planisphère*, Ptolémée présente une méthode pour représenter une sphère sur un plan, selon des principes compatibles avec ce qu'on nomme aujourd'hui la projection stéréographique. Mais cette dernière ne sera traitée mathématiquement, en tant que telle, que bien plus tard, au IX^{e} siècle, dans l'œuvre d'al-Farghānī qui démontrera notamment la propriété fondamentale de cette projection. Ce n'est qu'au X^{e} siècle qu'al-Qūhī et Ibn Sahl écriront une première théorie générale des projections de la sphère. Cet article analyse les raisons qui permettent d'affirmer que Ptolémée n'a pas conçu mathématiquement de projection, et que cette conception n'a pu être possible qu'avec l'aide de la définition de la surface conique telle qu'Apollonius l'a exposée dans ses *Coniques*.

L'astrolabe est un instrument mathématique qui permet de résoudre des problèmes de trigonométrie sphérique, tels que la détermination des heures inégales ou temporaires, des longitudes et des latitudes célestes des différents astres, ou encore de la *Qibla*,[1] par des méthodes de géométrie plane euclidienne: tracé de cercles circonscrits à des triangles, calculs d'arcs dans un cercle, similitude de triangles et calculs de proportions. Parmi les multiples études sur l'astrolabe menées depuis l'antiquité, on peut distinguer celles qui expliquent son usage de celles qui justifient sa construction. C'est à ces

[1] Il s'agit de l'azimut du principal lieu saint pour les musulmans, situé à La Mecque et vers lequel les pratiquants doivent se tourner pour effectuer leurs prières rituelles.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

dernières que nous allons nous intéresser dans cet article. Le principe de cet instrument consiste à projeter une sphère, représentant la sphère céleste, sur un plan. On peut le faire de différentes façons. Le modèle d'astrolabe qui s'est le plus répandu, de la fin de l'antiquité jusqu'au XII^{e} siècle, résulte d'une projection conique à partir de l'un des pôles de la sphère sur le plan de l'équateur, que l'on nomme aujourd'hui projection stéréographique.[2]

Si l'étude de la construction de l'astrolabe a débuté dans l'antiquité, elle a connu un essor sans précédent à partir du IX^{e} siècle, et retenu l'attention des plus grands géomètres de l'Orient méditerranéen. Les noms d'al-Ṣāghānī, al-Sijzī, al-Qūhī, Ibn Sahl et Ibn ʿIrāq, auxquels on peut peut-être ajouter Ibn Sinān,[3] sont associés à cette recherche qui va s'étendre à d'autres types de projections: des projections coniques dont le pôle n'est plus situé à la surface de la sphère, et des projections cylindriques, orthographiques ou non, des plus générales qui soient.[4]

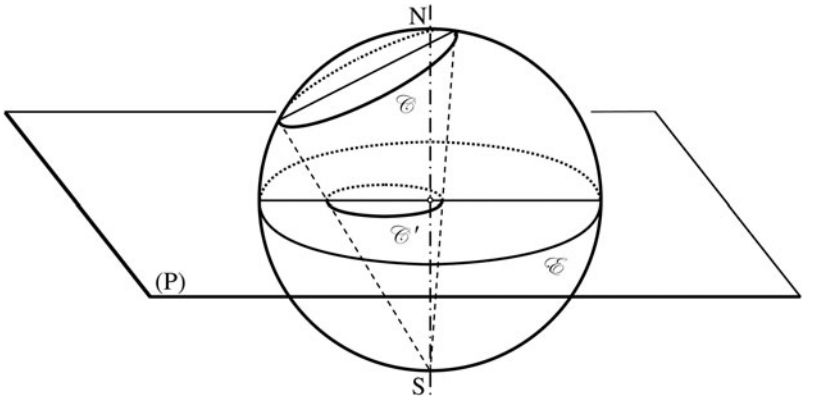


Fig. 1.

[2] La projection stéréographique générale est une projection conique de la sphère sur un plan passant par son centre, à partir de l'un des pôles du cercle que ce plan découpe dans la sphère. La projection stéréographique que nous étudions ici est un cas particulier pour lequel le plan de projection est le plan de l'équateur. On qualifie alors cette projection de "polaire" (voir R. D'Hollander, *L'Astrolabe – Histoire, théorie et pratique*, Institut Océanographique [Paris, 1999], pp. 51–3).

[3] Il nous est parvenu un traité portant sur l'astrolabe et attribué à cet auteur, dont l'authenticité n'est pas certaine (voir *infra*, pp. 162–3, note 71).

[4] R. Rashed et P. Abgrall, "Les traditions des coniques et le début de la recherche sur les projections", dans R. Rashed, *D'al-Khwārizmī à Descartes: Études sur l'histoire des mathématiques classiques* (Paris, 2011), pp. 489–534.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

Rappelons brièvement certains principes de la projection stéréographique, tels qu'ils sont connus aujourd'hui. Si l'on choisit de projeter la sphère à partir du pôle sud, S, sur son plan équatorial (P), alors l'image d'un cercle $\mathscr{C}$ de la sphère est l'intersection du cône de sommet S et de base ce cercle $\mathscr{C}$, avec le plan (P). C'est le cercle $\mathscr{C}'$, si $\mathscr{C}$ ne passe pas par le pôle S (Fig. 1).[5]

Par cette transformation, l'équateur $\mathscr{E}$ est invariant point par point, le tropique du Cancer se projette en un cercle intérieur à l'équateur, et le tropique du Capricorne, en un cercle extérieur. Les trois cercles obtenus dans le plan (P) sont concentriques, comme le sont les projetés de tous les cercles parallèles à l'équateur. Outre ces trois cercles, le tracé d'un astrolabe reposant sur une telle projection consiste avant tout à construire les projetés des cercles parallèles et des cercles orthogonaux à un horizon donné, sur le plan (P). Considérons le méridien $NASB$ d'un lieu donné, et l'horizon de ce lieu, de diamètre HH' dans le plan du méridien. Si P et P' sont les pôles de cet horizon, alors leurs projetés P_1 et P'_1 peuvent être placés sur la ligne méridienne qui représente, dans le plan rabattu, le méridien projeté.[6] Le projeté d'un cercle de la sphère, dont le plan est orthogonal à celui du méridien, est centré sur la ligne méridienne.[7] C'est le cas de l'horizon, qui se projette selon le cercle de diamètre $H_1H'_1$, dont les extrémités sont les projetés des points H et H' (Fig. 2).

Les projetés des cercles parallèles à l'horizon, qu'on appelle les *muqanṭarāt*, forment un faisceau de cercles à points limites P_1 et P'_1. Le cercle Λ, parallèle à l'horizon et passant par le pôle S, se projette selon une droite Δ, perpendiculaire à la ligne méridienne. Tous les autres cercles parallèles à l'horizon se projettent, comme l'horizon lui-même, selon des cercles centrés sur la ligne méridienne. Les projetés de tous ceux qui sont situés entre Λ et le pôle P, auront leur convexité tournée vers P_1 et les projetés de tous ceux qui sont situés entre Λ et le pôle P', vers P'_1. Les grands cercles perpendiculaires à l'horizon, appelés cercles de hauteur, se projettent, quant à eux, selon un faisceau de cercles à points de base P_1 et P'_1,[8] les azimuts (*al-sumūt*). Ainsi, tout point de la sphère peut être placé sur l'astrolabe en transférant ses coordonnées horizontales sur ce nouveau réseau de cercles du plan, formé par les deux faisceaux conjugués.

[5] En effet, la projection stéréographique transforme les cercles de la sphère en cercles ou droites du plan équatorial. Nous reviendrons sur cette propriété fondamentale tout au long de cet article.

[6] Il suffit pour cela de tracer les droites SP et SP', et de rabattre leur intersection avec la droite AB (Fig. 2).

[7] À condition, bien entendu, qu'il ne passe pas par le pôle S.

[8] L'un de ces cercles a son centre sur la droite méridienne, c'est le projeté du cercle de hauteur perpendiculaire au méridien.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

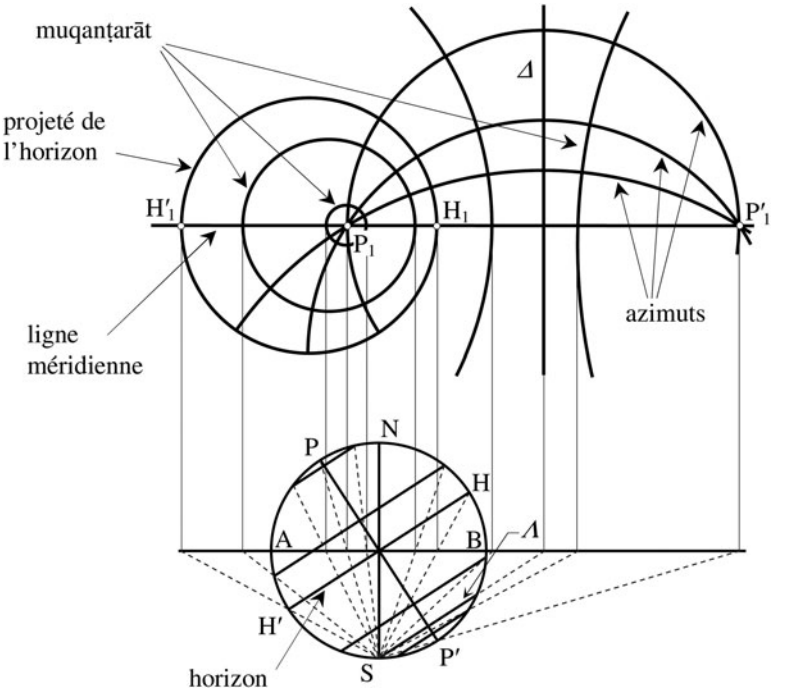


Fig. 2. [9]

Depuis les travaux d'O. Neugebauer,[10] on peut conjecturer qu'Hipparque de Nicée, astronome du IIe siècle avant le début de l'ère chrétienne (*c.* –160/–125), connaissait la projection stéréographique, et que ses recherches ont pu constituer une source pour Ptolémée quand il a rédigé son *Planisphère*, mais cette affirmation reste controversée.[11]

[9] Cette figure est construite à partir de celle que l'on trouve dans l'ouvrage de R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au Xe siècle - Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, 1993), p. CXIII, et qui est reproduite dans R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* (Londres, 2005), p. 860.

[10] En particulier, "The early history of the astrolabe", *Isis*, 40, fasc. 3 (1949): 240–56, p. 246, et *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, vol. II (Berlin, 1975), pp. 857–8 et 868–9.

[11] Dans son article sur l'origine de l'astrolabe, O. Neugebauer fait reposer cette affirmation sur deux arguments: le premier s'appuie sur l'analyse qu'il fait du texte de Ptolémée, *Le planisphère*, dont le but principal, selon lui, est de démontrer comment il est possible de résoudre des problèmes de trigonométrie sphérique au seul moyen de la trigonométrie plane. Il est donc plausible, toujours selon O. Neugebauer, qu'Hipparque ait utilisé la projection stéréographique, puisque sans disposer de trigonométrie sphérique, il a pu résoudre de tels problèmes. Le second argument consiste en un témoignage contenu dans une lettre de Synesius de Cyrene, datant du IVe siècle (entre 373 et 414) et affirmant qu'Hipparque fut le premier à étudier la projection de la sphère sur un plan (D. R. Dicks, *The Geographical Fragments of Hipparchus* [Londres, 1960], pp. 194–205). Néanmoins, C. Anagnostakis a relevé dans sa thèse que Neugebauer lui-même a reconnu qu'Hipparque aurait pu recourir à d'autres méthodes (C. Anagnostakis, *The Arabic Version of Ptolemy's Planisphaerium*,

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

Cela ne nous permet pas de situer précisément l'origine de cette projection, et nous ne chercherons pas ici à traiter cette question. Ce qui nous occupe est plutôt de comprendre comment les Anciens s'y prenaient pour reporter sur un plan la géométrie de la sphère, en nous plaçant du point de vue conceptuel. Pour cela, nous nous proposons de mettre en évidence et d'analyser les principes qui étaient à la base des procédés géométriques qu'ils ont employés, afin de mieux comprendre le contexte mathématique dans lequel chacun d'eux se plaçait et d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes:

Quand la projection stéréographique a-t-elle été conçue? Est-ce équivalent de concevoir une telle projection et d'en écrire la théorie? Comment cette théorie a-t-elle évoluée au cours de l'histoire?

L'exposé et la discussion que nous voulons mener se feront exclusivement à partir de textes dont on dispose aujourd'hui, à commencer par le plus ancien d'entre eux.

I. *LE PLANISPHÈRE* DE PTOLÉMÉE

Cet ouvrage, que l'astronome alexandrin rédigea au cours du II^{e} siècle de l'ère chrétienne, est perdu en grec. Il nous est parvenu dans une traduction arabe[12] ainsi que dans une traduction latine faite sur une version arabe qui présente des différences avec celle que l'on possède.[13] Dans son introduction, Ptolémée expose brièvement le

Ph.D. thesis, Yale University [1984], p. 10 et Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, pp. 302–4).

[12] Notre commentaire se fera à partir de la traduction arabe telle qu'elle se présente dans l'édition publiée par N. Sidoli et J. L. Berggren, "The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere* or *Flattening the Surface of the Sphere*: text, translation, commentary", *SCIAMVS*, vol. 8, (2007): 37–139.

[13] Cette traduction latine a été faite par Hermann de Carinthie, en 1143. P. Kunitzsch a trouvé des traces d'une traduction latine antérieure, qui remonterait à la fin du X^{e} siècle ("Fragments of Ptolemy's *Planisphaerium* in an early Latin translation", *Centaurus*, 36 [1993]: 97–101, en particulier pp. 98–9). Il compare le texte arabe des deux manuscrits qui ont servi à l'édition de N. Sidoli et J. L. Berggren à celui de la traduction latine de 1143, et conclut que si certaines différences entre les deux textes peuvent être attribuées au caractère parfois libre de la traduction de Hermann, on doit reconnaître l'existence de deux familles différentes ("The second Arabic manuscript of Ptolemy's *Planisphaerium*", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 9 [1994]: 83–9, en particulier pp. 85 et 86). Quant à la traduction arabe, dont on ne connaît ni la date, ni l'auteur, P. Kunitzsch affirme qu'elle remonte au début du X^{e} siècle, voire à la fin du IX^{e}, en s'appuyant sur la citation que l'on trouve dans le texte sur l'astrolabe attribué à Ibn Sinān ("Fragments of Ptolemy's *Planisphaerium*", p. 97, "The second Arabic manuscript of Ptolemy's *Planisphaerium*", p. 84 et surtout "The role of al-Andalus in the transmission of Ptolemy's *Planisphaerium* and *Almagest*", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 10 [1995]: 147–55, en particulier p. 152). Néanmoins l'argument principal de cette affirmation présente une faiblesse, dans la mesure où l'authenticité de ce traité n'est toujours pas établie de façon certaine.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

but de son ouvrage, et certains des principes qui président à son étude. Il veut reproduire sur un plan, les différents cercles de la sphère solide. Il précise qu'il a voulu écrire "un livre d'une manière abrégée, dans lequel [il] montre par quelle voie il est possible de tracer l'écliptique, les cercles parallèles à l'équateur et les cercles connus comme les méridiens" (§ 1, p. 55, *l.* 6–7; trad. p. 82),[14] et que tout ce qui sera fait dans le plan sera "conforme à ce qui apparaît dans la sphère solide" (§ 1, p. 55, *l.* 8; trad. p. 82). En fait, il étudiera également la position relative des trois grands cercles de la sphère sur lesquels reposent la plupart des problèmes cosmographiques: l'équateur, l'écliptique et l'horizon d'un lieu (§ 2 et § 3), ainsi que le tracé des cercles parallèles et perpendiculaires à l'écliptique (§ 16 à 19), ce qu'il n'annonce pas ici.

L'une des propriétés fondamentales de la projection stéréographique est qu'elle conserve la forme des cercles, exception faite des cercles de la sphère qui passent par le pôle de projection et dont les projetés sont alors des droites. Cette propriété est traitée par Ptolémée comme un postulat implicite: jamais il ne l'énonce en tant que telle, et encore moins ne la démontre.[15]

Dans ce texte, ou du moins dans la version arabe que l'on peut considérer comme la plus proche de l'original du *Planisphère* parmi les versions que l'on peut lire, on trouve différents termes pour désigner la relation entre un cercle de la sphère et la ligne, cercle ou droite, qui lui est associée sur le plan. Tous sont empruntés au vocabulaire commun, et signifient que la ligne du plan *prend la place* ou *est à la place* du cercle de la sphère.[16] Un autre terme employé à plusieurs reprises, est le terme *naẓīr*, que l'on peut traduire par *correspondant*.[17] Nous exprimerons indifféremment ces propos trouvés dans

[14] Les références renvoient à l'édition et à la traduction de N. Sidoli et J. L. Berggren dans "The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere*", et s'appuient sur le découpage en 20 sections du texte, que les éditeurs ont adopté et qu'ils ont repris de la traduction latine d'Hermann, éditée par J. L. Heiberg (*Claudii Ptolemaei Opera*, vol. II, Opera astronomica minora [Leipzig, 1907]).

[15] Signalons qu'à la fin du texte, au § 19, l'auteur justifie que le cercle parallèle à l'écliptique et passant par le pôle sud de la sphère, est remplacé par une droite dans le plan (voir *infra*, p. 151, note 44). Néanmoins, nous ne partageons pas l'hypothèse formulée par N. Sidoli et J. L. Berggren: "Ptolemy knew a simple proof of circle preservation and assumed his readers would be familiar with this" ("The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere*", com. p. 112).

[16] On trouve le plus souvent *makāna*, parfois *badala*, et une fois l'expression *qāma maqāma* ("Ces cercles tracés sont ceux qui *se tiennent à la place* (*taqūmu maqāma*) des grands cercles perpendiculaires à l'écliptique" [§ 15, p. 75, *l.* 435–436; trad. p. 103]). Les traducteurs, N. Sidoli et J. L. Berggren, emploient *representing* pour traduire les deux premiers termes, et *to stand in for* pour la dernière expression ("The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere*", p. 48).

[17] Ce terme signifie aussi *semblable* ou *placé en vis-à-vis*: "Je dis que ces deux cercles sont les *correspondants* (*naẓīratā*) de deux des cercles qui sont sur la sphère solide" (§ 1, p. 55, *l.* 23; trad. p. 82). On retrouve ce mot dans plusieurs traités écrits en arabe au X^{e} siècle, notamment celui d'al-Qūhī, où il prendra un sens mathématique spécifiant systématiquement la

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

le *Planisphère*, par les tournures suivantes: "un cercle de la sphère est *remplacé* par un cercle ou une droite sur le plan" ou "un cercle du plan est le *correspondant* d'un cercle de la sphère".[18]

Ptolémée ne définit pas ce plan dans lequel il trace les cercles. Une des difficultés de ce texte, pour comprendre les raisonnements de son auteur et éviter les erreurs d'interprétation, réside dans l'ambiguïté de la relation géométrique entre la construction dans le plan et ce que l'on observe à la surface de la sphère solide. Du début du texte jusqu'au § 15 inclus, Ptolémée pose un cercle *ABCD* pour l'équateur.[19] Celui-ci n'est jamais remplacé par un cercle du plan, et l'on peut penser que le plan *est* celui de l'équateur. Dans toute la suite du texte, il pose dans le plan, au début des constructions, le cercle *ABCD* pour le colure des solstices, et deux diamètres perpendiculaires de ce cercle pour l'axe et le diamètre de l'équateur.[20]

Revenons aux principes sur lesquels Ptolémée fait reposer son étude. Parmi ces principes, certains sont explicités en introduction, mais d'autres restent sous-entendus. L'auteur admet que les cercles parallèles à l'équateur sont remplacés, dans le plan, par des cercles

relation d'un point ou d'un cercle de la sphère à son projeté sur le plan (cf. *infra*, p. 164). On le traduit alors par *homologue*.

[18] On pourrait faire à ce choix le reproche de gommer les nuances du texte. Mais l'analyse des termes relevés ici dans le *Planisphère*, révèle que l'auteur ne fait pas usage systématique d'un terme plutôt qu'un autre, en fonction de la situation. À plusieurs reprises, Ptolémée emploie même simplement le verbe *tracer* (*rasama*) pour désigner la correspondance: "le cercle dont le diamètre est la droite *GI* (un cercle de la sphère) est *tracé* autour du diamètre *MN* (un cercle du plan)" (§ 16, p. 76, *l.* 445; trad. p. 104); il arrive aussi qu'il ne précise plus la différence entre les deux cercles, celui de la sphère et son correspondant dans le plan, quand, par exemple, il pose "l'écliptique, le cercle *GBHD* (un cercle du plan)" (§ 2, p. 57, *l.* 54–55; trad. p. 84). Nous devons souligner que cette analyse repose sur des bases qui ne sont peut-être pas totalement infaillibles, étant donné qu'on ne dispose que d'une version dont on ne peut affirmer l'authenticité avec certitude.

[19] Il faut signaler une exception au § 14. L'auteur débute cette section en expliquant que l'on peut placer les astres fixes à partir de tout ce qui précède: l'étude du tracé des cercles parallèles à l'équateur, le calcul des rayons de ces cercles qui passent par le début des signes, le calcul des diamètres de l'écliptique et de l'horizon à la latitude de Rhodes et la position de leurs centres, ainsi que les ascensions des signes (ascensions droites et obliques à la latitude de Rhodes). Il considère alors le plan dans lequel on veut tracer les cercles définis à partir de l'écliptique, plan qu'il appellera ensuite le tympan, et pose le cercle *ABCD* comme "le cercle qui est extérieur à tous les cercles et qui en est le plus grand" (§ 14, p. 73, *l.* 403; trad. p. 101–2). Cela signifie qu'on décide de la taille du cercle qui borde toute la construction dans le plan. Il montre alors comment tracer l'équateur à partir de ce cercle *ABCD*, et le contexte géométrique reste semblable à ce qui précède.

[20] C'est le cas pour toutes les constructions du § 16 au § 19. L'axe est l'axe de la sphère. Cette fois, il semble bien qu'il adopte le point de vue d'une projection orthographique de la sphère sur le colure des solstices. On peut comprendre, comme l'expliquent N. Sidoli et J. L. Berggren, que dès le § 1, le plan de la figure est formée du plan de l'équateur et du colure des solstices, comme superposés ("The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere*", p. 113). C'est une façon d'interpréter le raisonnement de Ptolémée, mais ce dernier n'explicite jamais que ces deux plans sont comme superposés. Nous ne partageons pas cette interprétation (voir *infra* p. 144).

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

concentriques, mais il n'exprime pas cette propriété.[21] En revanche, il précise que les méridiens sont remplacés par des droites.[22] Dès les premières lignes du texte, on comprend donc que l'auteur base son étude sur les cercles de la sphère définis à partir de l'équateur: les parallèles et les méridiens. Et l'on peut penser que sa réflexion a débuté, elle aussi, par cela, étant donné le caractère fondamental, pour un astronome, de ces cercles qui définissent la déclinaison et l'ascension droite. Mais quelle connaissance pouvait-il avoir de la forme que prennent ces cercles dans le plan? Une connaissance intuitive pourrait expliquer que les cercles parallèles à l'équateur deviennent des cercles concentriques dans le plan, et les méridiens, des droites passant par le centre de l'équateur où vient se superposer le pôle nord. Elle pourrait être fondée sur la vision de la sphère que l'on peut imaginer à partir du pôle sud, selon un cône dont l'axe est l'axe de la sphère, sans induire pour autant une théorie mathématique des coniques, telle qu'on peut la trouver dans l'œuvre d'Apollonius, ou même chez l'un de ses prédécesseurs. Mais elle pourrait aussi résulter des recherches sur les cadrans solaires, problèmes traités par ailleurs par Ptolémée, et qui, alors, induirait une réflexion sur les coniques, comme peuvent nous inciter à le penser les travaux de Neugebauer.[23] Néanmoins, on ne trouve aucune trace d'une théorie des coniques dans le texte de Ptolémée.

Celui-ci commence par construire dans le plan, le correspondant de l'écliptique Γ, en utilisant les deux cercles parallèles à l'équateur auxquels Γ est tangent sur la sphère. Si l'on note Z et T les extrémités du diamètre de Γ dans le plan du colure des solstices, les deux cercles parallèles définissent la déclinaison des points Z et T et Ptolémée les caractérise comme "des cercles parallèles à l'équateur, situés de part et d'autre de celui-ci, à la même distance" (§ 1, p. 55, *l.* 11–12; trad. p. 82), car évidemment les arcs de déclinaison CZ et $Z'C$ sont égaux. Le cercle *IBMD*, correspondant de Γ dans le plan, est tracé à

[21] Ptolémée écrit dans l'introduction: "nous avons disposé les cercles parallèles à l'équateur selon un agencement par lequel, il a d'abord été possible que les grands cercles tracés à partir des cercles inclinés tangents aux cercles parallèles à l'équateur, <situés> de part et d'autre de lui, à la même distance, coupent toujours l'équateur en deux moitiés" (§ 1, p. 55, *l.* 10–12; trad. p. 82) en précisant seulement, quelques lignes plus loin, que de tels cercles situés sur la sphère au nord de l'équateur ou au sud de celui-ci, se trouveront, dans le plan, respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle *ABCD*, tenant lieu d'équateur (§ 1, p. 55, *l.* 18–20; trad. p. 82). Ce n'est qu'à la toute fin du texte, au § 20 qui tient lieu de conclusion, qu'on peut lire que le centre de l'équateur est aussi le centre pour tous les cercles parallèles à lui (§ 20, p. 80, *l.* 509–510; trad. p. 108). Tout au long du traité, cette propriété est passée sous silence, bien qu'employée comme une évidence.

[22] On peut lire, juste après l'exposé de son projet: "nous avons utilisé des droites à la place des méridiens" (§ 1, p. 55, *l.* 9–10; trad. p. 82). Il ajoutera plus tard que ces droites passent par le pôle nord, qui est aussi le centre de l'équateur, dans le plan: "toutes les droites qui traversent le pôle *E* sont à la place des méridiens" (§ 1, p. 57, *l.* 48–49; trad. p. 84).

[23] Notamment *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, vol. II, pp. 857–72.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

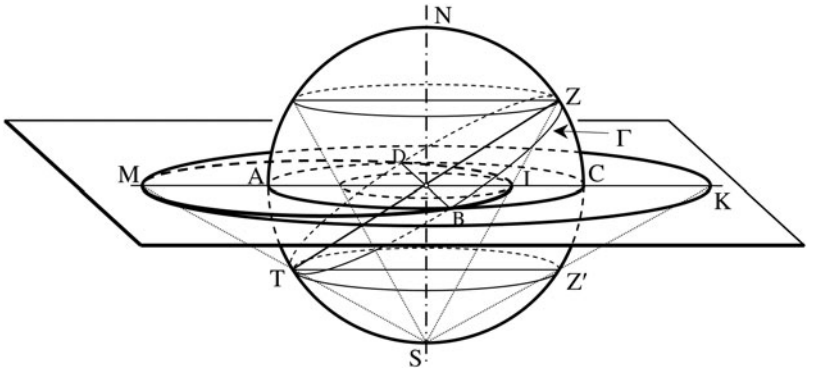


Fig. 3.

partir du point *I* et du point *M*, qui se trouvent sur le diamètre *AC* de l'équateur, perpendiculaire à l'autre diamètre *BD*, et respectivement sur les droites *SZ* et *ST* (Fig. 3).

La construction que nous venons de donner n'est pas celle que décrit Ptolémée. La Figure 3 illustre le point de vue projectif, tel qu'on peut le concevoir aujourd'hui, mais Ptolémée ne se place jamais dans l'espace à trois dimensions. Après avoir tracé le cercle *ABCD* de centre *E*, pour l'équateur, puis les deux diamètres perpendiculaires, *AC* et *BD*, *à la place* des méridiens, il explique que le point *E* est aussi un pôle de l'équateur, et qu'il est préférable de choisir le pôle nord car c'est le pôle toujours visible dans les contrées que l'on habite.[24]

[24] Puisque les cercles parallèles sont remplacés par des cercles concentriques, il est naturel que l'un des pôles de l'équateur sur la sphère se retrouve au centre de tous ces cercles dans le plan. Si l'on reprend l'image de la vision de la sphère à partir du pôle sud, c'est le pôle nord que l'on voit et cela coïncide, ici, avec le fait qu'en un lieu de l'hémisphère nord de la terre, le pôle nord est dans la partie visible du ciel, celle située au-dessus de l'horizon. Juste avant cela, il est écrit: "Que le point *E* soit le pôle nord, parce qu'on ne peut placer l'autre pôle sur la surface plane, car sa surface s'étend sans limite, comme nous le montrerons par la suite" (§ 1, p. 55, *l.* 15–16; trad. p. 82). On ne trouve pas d'explication de cela dans la suite du texte. Cette phrase fait précisément l'objet d'un commentaire de Maslama al-Majrīṭī, comme le précisent N. Sidoli et J. L. Breggren ("The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere*", p. 82, note 23) qui renvoient au travail de P. Kunitszch et R. Lorch, *Maslama's Notes on Ptolemy's* Planisphaerium *and Related Texts*, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-Historische Klasse Sitzungberichte 2 (Munich, 1994), pp. 14–17. En effet, dans sa note 3, relative au § 4 du *Planisphère* où Ptolémée calcule les rayons des cercles parallèles à l'équateur et passant par les signes du zodiaque, Maslama explique qu'il est impossible de placer le pôle sud dans le plan, car il devrait être à l'intersection de deux droites parallèles (le diamètre *AC* de l'équateur et la droite parallèle à ce diamètre et passant par *D*). Mais il explique ensuite ce que Ptolémée a dû penser. Les droites représentant les méridiens se rencontrent toutes au point *E*, centre de l'équateur. Si ce point représente également le pôle nord, alors le pôle sud devra être placé sur l'autre point où ces mêmes droites se rencontrent, à l'image des méridiens sur la sphère qui se coupent tous aux deux pôles. Or, les droites ne se rencontrent

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

Il découpe ensuite sur le cercle *ABCD* à partir du point *C*, deux arcs égaux *CG* et *CH*, et mène les droites joignant le point *D* à chacun des deux points *G* et *H* (Fig. 4). Ces deux droites coupent *AC* respectivement en *I* et *K*. Il trace alors les cercles de centre *E* et passant respectivement par *I* et *K*, et affirme qu'ils sont "les correspondants de deux des cercles qui sont sur la sphère solide, de part et d'autre de l'équateur, à la même distance" (§ 1, p. 55, *l.* 23–24; trad. p. 82).

Ptolémée conclut en affirmant que l'écliptique est représenté par le cercle dont le centre est le milieu de *IM* et qui est tangent aux deux cercles précédents en *I* et en *M*, et que ce cercle coupe l'équateur *ABCD* en deux moitiés, aux points *B* et *D*.[25] La seule chose qu'il démontre alors, est cette dernière propriété.

Pour cela, il mène la droite *DM*, place le point *N* là où elle coupe le cercle *ABCD*, affirme que les arcs *AN* et *CH* sont égaux,[26] et en déduit que les points *N* et *G* sont diamétralement opposés sur l'équateur.[27] Il peut en conclure que le cercle de diamètre *IM* passe par *D*, du fait que l'angle *MDI* est droit. Par symétrie, ce même cercle passe également par le point *B*.

Revenons à la construction que donne Ptolémée des points *I* et *M*. Il est clair que l'on peut voir le point *D* de la Figure 4, à la place du point *S* de la Figure 3, et les points *G*, *H*, *N* à la place des points *Z*, *Z′*, *T*, respectivement. Mais peut-on pour autant en conclure qu'il superpose le plan du colure des solstices au plan de la figure? Rien, dans ce qu'il écrit, ne nous le permet. Dans le plan de la figure, qui représente le plan de l'équateur, il trace simplement une construction auxiliaire, les points *D*, *G* et *H*, disposés comme le sont les points *S*, *Z* et *Z′* dans le plan du colure des solstices, pour construire les points *I* et *M* en utilisant seulement la donnée essentielle, celle de la déclinaison des cercles parallèles à l'équateur, disposés symétriquement par rapport à lui.

---

qu'en un point, donc on en peut placer le pôle sud. C'est ainsi que Maslama comprend que "sa surface s'étend sans limite". Au § 16, le point *D* sera désigné par Ptolémée comme "le pôle caché" (§ 16, p. 76, *l.* 441; trad. p. 104), par opposition au pôle visible. Et ce n'est que lorsque le cercle *ABCD* représente le colure des solstices qu'il emploiera cette expression (voir *infra* p. 148).

[25] On trouve littéralement dans le texte: "l'écliptique qui est tracé à partir d'un centre qui découpe la droite *IM* en deux moitiés, de sorte à être tangent [aux] deux cercles au point *I* et au point *M*, divise le cercle *ABCD* en deux moitiés, je veux dire qu'il passe par le point *B* et par le point *D*" (§ 1, p. 55, *l.* 24 – p. 56, *l.* 26; trad. p. 83). Si l'on se fie au texte, on comprend que Ptolémée a en tête l'écliptique comme exemple de grand cercle incliné, mais que sa construction est générale. C'est en tout cas le sens des hypothèses de sa construction. Après la démonstration, il insiste sur le fait que cette construction est un modèle pour toutes les paires de cercles parallèles symétriques par rapport à l'équateur; puis il explique que si l'on donne aux arcs *CG* et *CH* la valeur de l'inclinaison de l'écliptique, 23°51′, alors on obtient, dans le plan, les tropiques et l'écliptique.

[26] Pour des raisons évidentes de symétrie, qu'il n'évoque pas.

[27] Puisque l'arc *CG* est égal à l'arc *CH*, donc égal à l'arc *AN*.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

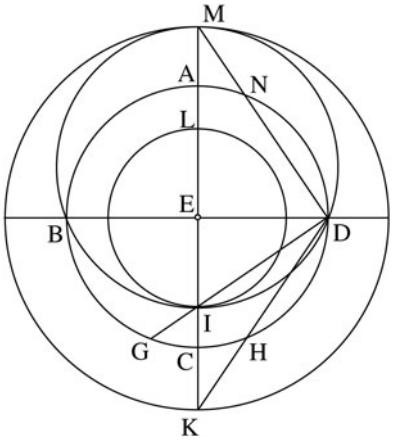


Fig. 4.

Cette démonstration est la toute première du traité. Elle revient à démontrer que, dans le plan, le cercle correspondant à tout grand cercle incliné de la sphère coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés, propriété observée sur la sphère. Au cours de sa construction, Ptolémée a employé un autre principe que ceux que nous avons déjà relevés, et qu'il n'a pas formulé: un grand cercle incliné de la sphère, tangent à deux cercles parallèles à l'équateur et disposés symétriquement par rapport à lui, est remplacé, dans le plan, par un cercle également tangent aux deux cercles qui remplacent les deux cercles parallèles. Pourquoi emploie-t-il ce principe? S'il avait seulement voulu tracer le cercle correspondant du grand cercle incliné, il lui aurait suffi de placer les points *I* et *M*, extrémités de son diamètre. Il avait les moyens de le faire à partir du point *D*, à condition qu'il conçoive de placer les points de la sphère isolément sur le plan.[28] Or, ce n'est pas ainsi qu'il procède, comme on l'a vu.[29] C'est comme si le point *G* n'était pas un point particulier du cercle parallèle septentrional, mais qu'il jouait le rôle d'un point quelconque de ce cercle, dont la seule donnée importante est la déclinaison. C'est

[28] Les seules fois où il place dans le plan des points isolés, cela concerne le pôle de l'équateur (§ 1, voir *supra*, pp. 143–4, note 24) et le pôle de l'écliptique. Le premier est le seul point de la sphère qui a pour déclinaison 90°, il peut donc être conçu comme un cercle parallèle réduit à un point. Le second, étudié au § 15, constitue la seule exception. Ptolémée emploie précisément la construction à partir du point *D*, comme on vient de le voir, pour les points *I* et *M* dans la première proposition démontrée. Cette étude précède le tracé des cercles parallèles à l'écliptique, dont il s'occupera dans les quatre paragraphes suivants, les derniers avant la conclusion du § 20.

[29] Il aurait commencé par placer les points *G* et *N* sur le cercle *ABCD*, de sorte que l'arc *CG* soit égal à l'arc *AN*, puis il aurait construit directement *I* et *M*.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

comme si l'auteur concevait avant tout le tracé dans le plan, du cercle d'égale déclinaison tout entier. De plus, la conservation de la tangence du cercle incliné avec les cercles parallèles, de la sphère au plan, principe qui relève de la même intuition que celle que nous avons évoquée précédemment à propos des méridiens et des parallèles, est aussi un principe qui assure à *IM* d'être le diamètre du cercle qu'il trace dans le plan. Ainsi, la manière dont il définit un cercle incliné par les déclinaisons extrêmes de ses points, c'est-à-dire les deux cercles parallèles tangents, associée au principe de la disposition des cercles parallèles dans le plan, prend tout son sens.

Deux questions demeurent au sujet de cette construction et de cette démonstration: Pourquoi le correspondant d'un grand cercle incliné de la sphère, comme l'écliptique, est-il un cercle? Pourquoi Ptolémée démontre-t-il que ce cercle coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés?

Raisonnons sur l'exemple de l'écliptique. Dans la sphère, ce cercle passe par les quatre points caractéristiques: les deux points équinoxiaux et les deux points solsticiaux. Donc on doit retrouver ce même fait dans le plan: la ligne qui remplace l'écliptique passe par les correspondants de ces quatre points.[30] Ou plus exactement, l'écliptique est remplacé par une ligne, dont *a priori* on ne connaît pas la nature; une ligne qui passe par les points *I* et *M* de manière à être tangente aux deux cercles correspondants, et qui passe par les points *B* et *D*, les points équinoxiaux. En démontrant que ces quatre points sont sur un cercle, ou plus exactement que le cercle de diamètre *IM*, passe par les points *B* et *D*, Ptolémée ne démontre pas que la ligne qui passe par *B*, *I*, *D* et *M* est nécessairement un cercle,[31] mais il s'assure qu'en prenant ce cercle pour remplacer l'écliptique dans le plan, il ne contredit pas le fait que ce qu'il trace dans le plan est conforme à ce que l'on constate sur la sphère. Ce cercle est

[30] Ptolémée écrit: "le cercle tracé sur le point *M*, le point *B*, le point *I* et le point *D*, qui est le cercle passant au milieu des signes (l'écliptique), est tangent aux deux tropiques, au point *I*, le solstice d'été, et au point *M*, le solstice d'hiver, et divise l'équateur en deux moitiés aux points *B* et *D*. Le point *B* est le point vernal et le point *D*, le point automnal" (§ 1, p. 56, *l.* 39–42; trad. p. 84).

[31] Si l'on considère que la ligne est une conique, on peut montrer que si *IM* est un axe pour cette conique, condition due au principe de tangence conservée, et qu'elle passe par les points *B* et *D*, alors elle est nécessairement un cercle. Mais rien dans le texte ne permet d'affirmer que c'est ce que Ptolémée a en tête et, en tout état de cause, il ne démontre pas que l'écliptique est remplacé par un cercle. Ptolémée développe le même raisonnement, à partir des mêmes principes, au § 16, lorsqu'il étudie les cercles parallèles à l'écliptique (voir *infra*, pp. 147–50). Le commentaire de C. Anagnostakis laisse à penser que Ptolémée démontre, au § 16, que le cercle se projette selon un cercle (*The Arabic Version of Ptolemy's Planisphaerium*, p. 133). Pour sa part, R. Lorch estime que cette démonstration peut être considérée comme une preuve symbolique du fait que le cercle de diamètre *IM* est la représentation du grand cercle de la sphère ("Ptolemy and Maslama on the transformation of circles into circles in stereographic projection", *Archive for History of Exact Sciences*, 49, n° 3 [1995]: 271–84, p. 273, et p. 277 pour le § 16).

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

effectivement le projeté de l'écliptique selon la projection stéréographique, mais l'aspect projectif n'apparaît jamais dans le raisonnement de Ptolémée. Il emploie la propriété selon laquelle l'écliptique, ou tout autre grand cercle de la sphère, coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés, dans le plan, comme un principe de cohérence. S'il avait eu la preuve ou la connaissance certaine, que l'écliptique est remplacé par un cercle, il n'aurait pas eu besoin de démontrer cela.

Il généralise ensuite cette propriété à deux grands cercles quelconques de la sphère, en démontrant que "tous les horizons, que l'on trace d'une manière semblable à celle par laquelle on a tracé l'écliptique, divisent non seulement l'équateur en deux moitiés, mais divisent également en puissance, l'écliptique en deux moitiés" (§ 2, p. 57, *l.* 51–52; trad. p. 84).[32]

Sa démonstration repose sur la caractérisation de deux points d'un grand cercle de la sphère, diamétralement opposés: ils sont à la fois sur un même méridien et sur deux cercles parallèles à l'équateur et symétriquement disposés par rapport à lui. En s'appuyant sur sa première proposition et sur les principes concernant les cercles parallèles et les méridiens que nous avons mis en évidence, Ptolémée montre que cette caractérisation s'applique à la situation dans le plan. Si un cercle du plan coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés, cela suffit à ce qu'il soit le correspondant d'un grand cercle de la sphère, et une droite passant par le centre E de l'équateur, coupera ce cercle en deux points qui seront sur des cercles parallèles symétriques par rapport à l'équateur. Les deux points où se coupent deux cercles du plan, correspondants de deux grands cercles de la sphère, sont sur une droite passant par E. L'auteur montre en fait la cohérence de son système de principes avec la situation sur la sphère, c'est ce qu'il entend par "être conforme à ce qui apparaît sur la sphère solide".

Au § 16, on retrouve le procédé que Ptolémée a employé au § 1, mais pour tracer, cette fois, un cercle Γ parallèle à l'écliptique. En effet, il considère:

[32] Les horizons sont les grands cercles de la sphère, dont l'écliptique est un cas particulier. Donc cet énoncé peut parfaitement s'appliquer à deux grands cercles quelconques. Mais ce n'est pas le souci de Ptolémée, dont le but reste de tracer sur le plan les cercles de la sphère qui sont utiles à l'astronome. Par ailleurs, les points auxquels un horizon coupe l'écliptique ne sont pas réellement diamétralement opposés dans le plan. C'est pourquoi il a recours à l'expression "en puissance", qui signifie pour lui que les points *correspondent* à des points diamétralement opposés sur la sphère solide. Cette proposition, qui occupe le § 2 et le § 3, repose sur le principe qu'une droite passant par le centre E dans le plan, remplace un méridien. Ainsi, il vérifie par ce principe, que toute droite passant par E, dans le plan, rencontre un cercle représentant un grand cercle de la sphère, en deux points représentant les extrémités d'un diamètre de celui-ci.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

1. les deux cercles parallèles à l'équateur et tangents à Γ,
2. les points d'intersection de Γ avec les deux colures, obtenant ainsi quatre points, dont il montre qu'ils sont sur un même cercle.[33]

On constate un changement de point de vue.[34] Cette fois, Ptolémée pose "le méridien qui passe par les deux pôles, le cercle *ABCD* autour du centre *E*.[35] Que l'axe soit *BED*. Imaginons le point *D* le pôle caché, le diamètre de l'équateur *AEC* et le diamètre de l'un des cercles parallèles à l'écliptique, la droite *GHI*" (§ 16, p. 76, *l.* 440–442; trad. p. 104).[36]

Ptolémée considère le diamètre de Γ dans le plan du colure des solstices, *GI*. Ces deux points sont les points de tangence avec les cercles parallèles à l'équateur, donc les points d'extrême déclinaison sur Γ. Il trace alors les cercles d'égale déclinaison pour les deux points *G* et *I*, qui sont dans le plan les cercles de centre *E*, passant respectivement par *M* et *N*. Il affirme que Γ est tracé dans le plan selon le cercle de diamètre *MN*, tangent aux deux cercles précédemment tracés. Mais il ne s'arrête pas là, il doit vérifier que ce cercle présente dans le plan la même propriété que sur la sphère, à savoir que Γ divise l'un des cercles parallèles à l'équateur en deux moitiés. Cela confirme, comme à la lecture du § 1, que Ptolémée n'a pas de preuve que Γ est remplacé par un cercle dans le plan. Au § 1, quand il a étudié l'écliptique, ce cercle parallèle était l'équateur lui-même. Dans le cas présent, au § 16, c'est le cercle parallèle à l'équateur que Γ rencontre dans le plan du colure des équinoxes. Les deux points de Γ qui se situent

[33] Le choix qu'il fait pour les deux colures n'est pas dû au hasard. Il est facile de placer ces deux méridiens dans le plan. Par ailleurs, à aucun endroit de son texte Ptolémée n'explique comment tracer un méridien en particulier, autre que l'un des colures. Il indique seulement les principes du tracé: un méridien est une droite passant par *E*. Ces cercles ne lui servent qu'à garantir que deux points sont diamétralement opposés sur un grand cercle.

[34] L'auteur débute son étude des cercles parallèles et perpendiculaires à l'écliptique, au paragraphe précédent. Il annonce clairement son intention au début du § 15: "Pour accomplir notre but, nous devons également montrer comment tracer les cercles qui sont disposés par rapport à l'écliptique comme le sont les cercles que nous avons déjà mentionnés, par rapport à l'équateur" (§ 15, p. 75, *l.* 424–425; trad. p. 103). Cette étude l'occupera jusqu'à la fin du texte. Dans ce § 15, il commence par expliquer comment tracer dans le plan le correspondant du pôle de l'écliptique, en gardant le même point de vue que dans ce qui précède, c'est-à-dire qu'il commence par poser le cercle *ABCD* comme l'équateur.

[35] C'est-à-dire le colure des solstices, qui passe à la fois par les pôles de l'équateur et par ceux de l'écliptique.

[36] À partir de ce paragraphe, et dans toute la suite du texte, Ptolémée pose le cercle *ABCD* pour le méridien de l'écliptique, autrement dit le colure des solstices (nous avons déjà signalé ce fait, voir *supra*, p. 7 et note 20). Ptolémée adopte le point de vue d'une projection orthographique dans le plan de ce méridien. Nous pensons qu'ici, le plan de l'équateur, ceux du cercle Γ et de tous les cercles parallèles à l'équateur sont considérés comme perpendiculaires au plan de la figure. Comme le sera le plan du méridien, colure des équinoxes, que Ptolémée introduira quelques lignes plus loin (cf. note suivante). Donc Ptolémée ne superpose pas ces plans. En tout état de cause, il ne le formule pas, et ne le conçoit pas géométriquement.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

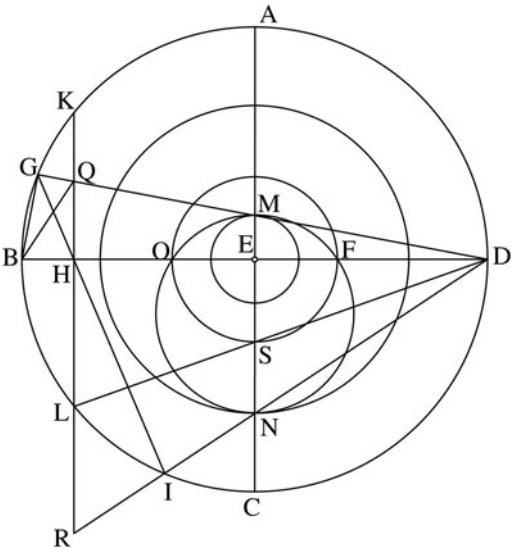


Fig. 5.

sur ce méridien ont la même déclinaison, et ce méridien, comme tous les méridiens, divise tous les cercles parallèles à l'équateur en deux moitiés. Le cercle parallèle à l'équateur a pour diamètre *KL*, droite qui passe par le point *H*, intersection de *GI* et de *BD*, parallèlement au diamètre *AC* de l'équateur (Fig. 5). Il écrit: "le cercle parallèle à l'écliptique, dont le diamètre est la droite *GI*, divise le cercle parallèle à l'équateur dont le diamètre est *LK*, en deux moitiés sur le méridien dont le diamètre est la droite *BD*" (§ 16, p. 76, *l.* 448–449; trad. p. 104).[37]

Le cercle de diamètre *KL*, est tracé dans le plan selon le cercle *SOF*, à l'aide de la droite *DSL*. Ptolémée démontre donc que le cercle de diamètre *MN* passe par les points *O* et *F*.[38] Il commence par établir

[37] Le méridien est considéré perpendiculairement au plan de la figure (cf. note précédente).

[38] Ces deux points sont à l'intersection du cercle *SOF*, de centre *E*, et de la droite *BD* qui passe par le centre *E*, donc ils sont évidemment diamétralement opposés sur le cercle. On retrouve la cohérence entre le principe selon lequel un cercle parallèle à l'équateur est remplacé par un cercle de centre *E*, et celui qui fait qu'un méridien est remplacé par une droite passant par ce même point *E*. On constate la mise en œuvre de ces deux principes dans les procédés que Ptolémée développe au § 1, pour tracer l'écliptique, et ici même au § 16, pour tracer les cercles parallèles à l'écliptique. La ressemblance entre ces deux procédés est frappante. La seule proposition que Ptolémée démontre dans les deux cas est que le cercle qu'il pose dans le plan, pour remplacer le cercle de la sphère, en le définissant à partir du diamètre formé par les deux points de tangence avec deux cercles parallèles à l'équateur, partage en deux moitiés un autre cercle parallèle à l'équateur et correctement choisi. Sa démonstration repose sur les propositions 21, 31 et 35 que l'on trouve au livre III des *Éléments* d'Euclide et que Ptolémée ne cite pas.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

que les points B, G, Q, H sont cocycliques,[39] d'où il déduit que $B\hat{Q}R = B\hat{G}I$. D'autre part $B\hat{G}I = B\hat{D}R$,[40] d'où $B\hat{Q}R = B\hat{D}R$, donc les points B, Q, D, R sont cocycliques. Ptolémée en déduit que $QH \times HR = BH \times HD$, puis que $QH \times HR = HL^2$.[41] Donc, par similitude des figures triangulaires $DQHLR$ et $DMESN$, il obtient $ME \times EN = ES^2$, ou encore $ME \times EN = FE \times EO$.[42] Cela prouve que les quatre points M, O, N et F sont sur le cercle de diamètre MN (Fig. 5).

Quelle place occupe ce texte du *Planisphère* dans l'histoire de la projection stéréographique? Pour étayer l'interprétation que l'on peut faire du texte, nous avons commenté les parties où Ptolémée développe sa méthode de représentation de la sphère sur un plan, car il s'agit plus d'une méthode que d'une théorie. Différentes interprétations ont été formulées pour comprendre le sens de ce texte, mais elles nous paraissent soit défendre exagérément l'idée que Ptolémée concevait la projection stéréographique, soit être insuffisamment développées.[43]

S'il est clair que la représentation d'une sphère dans un plan que Ptolémée élabore dans son *Planisphère*, coïncide avec celle que l'on obtient par une projection stéréographique, il est tout aussi clair, nous l'avons montré, que Ptolémée ne se situe jamais dans un contexte projectif, ni ne fait apparaître le moindre cône. Il adopte des principes qui lui permettent de tracer selon des cercles et des droites, les cercles de la sphère dont il a besoin pour résoudre les problèmes d'astronomie qui l'intéressent. Ce n'est pas seulement parce qu'on ne trouve aucun terme désignant cette projection, ni aucun objet s'y rapportant, que nous pouvons dire qu'il ne la conçoit pas. C'est surtout

[39] Dans le cercle $ABCD$, l'angle BGQ est droit, car BD est un diamètre, et d'autre part l'angle BHQ a été posé comme droit.

[40] Puisque les points B, G, D, I sont sur le cercle $ABCD$.

[41] En effet, $BH \times HD = HL^2$ parce que le point L est sur le cercle de diamètre BD, et que HL et BD sont perpendiculaires.

[42] Parce que les points S, O, F sont sur un même cercle de centre E.

[43] Pour C. Anagnostakis: "In the Planisphaerium Ptolemy describes the stereographic projection of the celestial sphere from its south pole onto the plane through the equator." (*The Arabic Version of Ptolemy's Planisphaerium*, p. 112.) R. Lorch écrit: "In the stereographic projection treated by Ptolemy in the *Planisphaerium*, the celestial sphere is mapped onto the plane of the equator by projection from the south pole." ("Ptolemy and Maslama on the transformation of circles into circles in stereographic projection", p. 271.) Dans l'article le plus récent, celui de N. Sidoli et J. L. Berggren, on peut lire: "Ptolemy's reader is assumed to have a good grasp of the principles of ancient spherical astronomy and [. . .] also assumed to already have some familiarity with the ancient geometry methods used for producing a plan diagram of the sphere that is mathematically equivalent to that produced by stereographic projection. Ptolemy, however, often proceeds in a way that is unexpected from the perspective of projective geometry. Hence, in reading this text, it is often more useful to situate his methods in the context of ancient solid geometry than in that of projective geometry as it was developed by medieval and early modern mathematicians. Hence in our commentary, we generally describe these aspects of Ptolemy's procedures in terms of conic theory, solid geometry and the methods of ancient analemma." ("The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere* ", p. 111.)

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

parce qu'il n'établit pas géométriquement la relation entre un cercle de la sphère et ce qui lui correspond dans le plan. C'est précisément parce qu'il ne conçoit pas cette relation, qu'il doit s'appuyer sur des propriétés que possèdent notamment les grands cercles de la sphère, et vérifier celles qui leur correspondent dans le plan. Ces propriétés, qui concernent notamment deux points diamétralement opposés d'un grand cercle de la sphère, deviennent évidentes lorsqu'on traduit mathématiquement que tous les points de la sphère se placent dans le plan de l'équateur à l'endroit où il est coupé par la droite qui joint chacun d'eux au pôle. Ce n'est pas ce qu'il fait lorsqu'il place l'un des points qui lui permet de tracer le correspondant d'un cercle parallèle. Même s'il a l'idée de joindre le point *D* à l'extrémité de l'arc de déclinaison, il n'en donne pas les raisons, ne l'explique pas, et ne s'intéresse qu'au cercle d'égale déclinaison ainsi défini. Il n'y a pas de principe général qui lui permettrait d'établir cette relation entre un point et son projeté.[44]

C'est pour ces raisons que nous pouvons dire qu'il n'y a pas de concept projectif dans l'ouvrage de Ptolémée. Les principes qu'il pose ou parfois qu'il sous-entend, sont des propriétés de la projection stéréographique, qui échappent à son étude en tant que telles. Ptolémée adopte le point du vue de l'astronome et non du géomètre, il

[44] Un seul passage du texte résiste à notre analyse. Au § 19, Ptolémée étudie le cercle parallèle à l'écliptique et passant par le point *D* qu'il a appelé le pôle caché (Fig. 6). Il affirme que c'est une droite, qu'il place sur la figure, et justifie: "Cela parce que toutes les droites qui sont menées par le point *D* et qui passent par ce cercle, sont dans un seul plan, qui est le plan du cercle, et l'intersection de ce plan et du plan de l'équateur est la droite *MLS*, car le plan du méridien qui contient également la droite *AC* est perpendiculaire à chacun de ces deux plans que nous avons mentionnés" (§ 19, p. 80, *l.* 501–505; trad. p. 108).

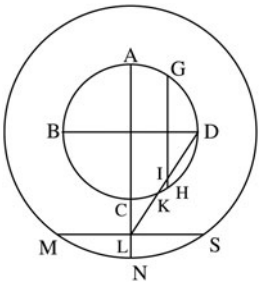


Fig. 6.

Le style de ce passage, qui se situe à la fin du texte, n'est pas cohérent avec tout ce qui précède. Pour la première fois, il envisage les droites qui passent par le pôle *D* et par le cercle. Mais alors, pourquoi Ptolémée ne procède-t-il pas ainsi au § 1 pour justifier le tracé des méridiens? La seule hypothèse que nous pouvons formuler pour le moment est une corruption tardive du texte, sans pour autant avoir d'autres éléments pour la soutenir.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

s'intéresse aux avantages que cette manière d'aplanir la sphère procure aux astronomes dans leurs calculs.

On trouve une formulation explicite de cette relation géométrique entre sphère et plan, définie mathématiquement, dans un traité de sept siècles postérieur au *Planisphère* de Ptolémée. Cette fois, pour représenter un cercle de la sphère sur un plan, le point de vue projectif ne fait aucun doute. Il est fondé sur la définition du cône qui a pour sommet le pôle de la sphère et pour base le cercle considéré sur la sphère, et assuré par le mouvement de la droite qui définit la surface conique.

II. *AL-KĀMIL* D'AL-FARGHĀNĪ

Le traité sur la construction de l'astrolabe écrit par al-Farghānī au IX^e^ siècle, *al-Kāmil*, est connu pour contenir la forme la plus ancienne qui nous soit parvenue d'une démonstration de la conservation de la forme des cercles par projection stéréographique.[45] Mais ce sont surtout les principes sur lesquels al-Farghānī construit son étude qui vont retenir, ici, notre attention. Dans l'introduction de son ouvrage, l'auteur fait état de la cohérence entre les constructions effectuées par les Anciens pour donner à l'astrolabe sa forme et ce qui peut être observé, mais il affirme qu'il n'existe aucune démonstration de son exactitude ni aucune preuve de la cause de cette exactitude. C'est pour y remédier, précise-t-il, qu'il a rédigé ce livre.[46]

Au deuxième chapitre de son livre, il montre comment construire tous les cercles de la sphère sur le plan de l'astrolabe, en précisant dès le début de ce chapitre que ces cercles "prennent la forme de

[45] Ce traité a été édité par Richard Lorch: Al-Farghānī, *On the Astrolabe*, Arabic Text Edited with Translation and Commentary by R. Lorch (Stuttgart, 2005), édition sur laquelle s'appuie notre commentaire. Son auteur, Aḥmad b. Muḥammad b. Kathīr al-Farghānī, est surtout connu pour avoir rédigé un ouvrage en 30 chapitres qui résume l'astronomie de Ptolémée (*Jawāmiʿ ʿilm al-nujūm wa-uṣūl al-ḥarakāt al-samāwiyya*). Il était astronome-mathématicien à Bagdad dans la première moitié du IX^e^ siècle. Il a également séjourné plusieurs années au Caire où, sur l'ordre du calife al-Mutawakkil, il dirigea la construction d'un Nilomètre qui fut achevée en 861. Selon R. Lorch, c'est au cours de son séjour au Caire qu'il rédigea son traité sur l'astrolabe, *al-Kāmil* (*ibid*., p. 4). Parmi les neuf copies manuscrites utilisées par l'éditeur, l'une porte le titre *L'Art complet de l'astrolabe méridional et de l'astrolabe septentrional et de leur justification par la géométrie et le calcul* (*al-Kāmil fī ṣanʿat al-asṭurlāb al-shimālī wa-al-janūbī wa-al-ʿilalihimā bi-al-handasa wa-al-ḥisāb* [*ibid*., pp. 388 et 389]) et une autre présente une variante de l'introduction dans laquelle l'auteur intitule simplement son traité *al-Kāmil* (*Le Complet* [*ibid.*, pp 380 et 381]). Ce titre est celui qu'ont utilisé les successeurs d'al-Farghānī, comme par exemple al-Bīrūnī, dans son ouvrage sur *La projection des constellations et l'aplanissement des sphères* (éd. A. Saʿīdān dans "Kitāb tasṭīḥ al-ṣuwar wa-tabṭīḥ al-kuwar li-Abī al-Rayḥān al-Bīrūnī", *Dirāsāt al-ʿulūm al-ṭabīʿiyya*, vol. 4, n° 1 et 2 [1974–1977]: 7–22, p. 13, et traduction anglaise par J. L. Berggren, "Al-Bīrūnī, on plane maps of the sphere", *Journal for the History of Arabic Sciences*, vol. 6, n° 1 et 2 [1982]: 47–112, p. 52).

[46] Al-Farghānī, *On the Astrolabe*, p. 24, *l.* 2 et 22–26.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

cercles dans le plan de l'astrolabe, exceptés les grands cercles qui se coupent dans la sphère céleste aux deux pôles,[47] et qui prennent la forme de droites".[48] Il commence par expliquer quelle partie de la sphère se retrouvera sur l'astrolabe, en supposant que la circonférence du tympan de celui-ci correspond à un cercle de la sphère, parallèle à l'équateur.[49] Alors, on retrouvera sur le tympan de l'astrolabe tout ce qui est situé, sur la sphère, entre ce cercle parallèle et le pôle nord. L'auteur ajoute que les cercles de la sphère, entièrement situés sur cette partie de la sphère, prennent la forme de cercles entiers sur le plan de l'astrolabe, et que les cercles de la sphère découpés par le cercle parallèle désigné sur la sphère, seront découpés dans le plan de l'astrolabe par le cercle qui délimite le tympan.

Pour démontrer cela, il représente géométriquement le cercle méridien *ABCD* de centre *E*, le pôle nord *D*, le pôle sud *B*, et le diamètre de l'équateur *AC*. Il se place dans le plan du méridien et ne fait pas intervenir de sphère dans ses démonstrations. Au passage, il définit géométriquement le plan de l'astrolabe: c'est le cercle de centre *D* et de rayon *DH*, tracé perpendiculairement au cercle *ABCD* (Fig. 7).[50]

Al-Farghānī démontre d'abord que les méridiens prennent la forme de droites qui passent toutes par le point *D* dans le plan de l'astrolabe, résultat qu'il avait annoncé précédemment. Pour cela, il emploie deux raisonnements différents pour construire le méridien *ABCD* dans le plan de l'astrolabe. Le premier de ces raisonnements repose sur le principe de la définition de la surface conique à partir du point *B* et du cercle *ABCD*. C'est donc le mouvement de la droite *BD*, dont le

[47] C'est ainsi qu'il caractérise géométriquement les méridiens.

[48] Al-Farghānī, *On the Astrolabe*, p. 40, *l.* 5–7. Nous avons traduit le verbe *tashakkala* employé par al-Farghānī, par *prendre la forme*. Celui-ci n'emploie pas d'expression qui désigne un déplacement, une transformation géométrique, comme ce sera le cas au siècle suivant, mais son intention est claire comme l'a déjà montré R. Rashed: "Les mathématiques de la terre", dans G. Marchetti, O. Rignani et V. Sorge (éd.), *Ratio et superstitio,* Essays in Honor of Graziella Federici Vescovini, Textes et études du Moyen Âge 24 (Louvain-la-Neuve, 2003), pp. 285–318 (notamment p. 299). Al-Farghānī emploie le même verbe pour parler des figures qui prennent la forme de cercles sur la sphère et celles qui leur sont associées par les surfaces coniques dans le plan de l'astrolabe, et qui prennent également la forme de cercles (ou de droites dans certains cas). Après lui, le verbe *saṭṭaḥa* désignera l'action de projeter, et le nom verbal *tasṭīḥ*, la projection. C'est ce mot qui donnera l'expression *ʿilm al-tasṭīḥ* pour désigner la nouvelle "science des projections" (Rashed, "Les mathématiques de la terre", pp. 287 et 293 *sqq*.).

[49] Ce passage, situé au début du chapitre 2, s'expliquera par la démonstration géométrique qui va suivre. Elle nous fera comprendre que c'est à partir des limites de la représentation sur le plan de l'astrolabe, la circonférence du tympan (la plaque sur laquelle on grave les cercles ou arcs de cercles), qu'il détermine le cercle de la sphère, parallèle à l'équateur, qui correspond à ces limites. Nous insistons sur le fait qu'al-Farghānī n'a pas de terminologie établie pour désigner la relation entre un cercle de la sphère et le cercle tracé sur l'astrolabe, son projeté, mais qu'il la conçoit clairement en la caractérisant.

[50] Il n'écrit pas que c'est le plan tangent à la sphère au pôle nord.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

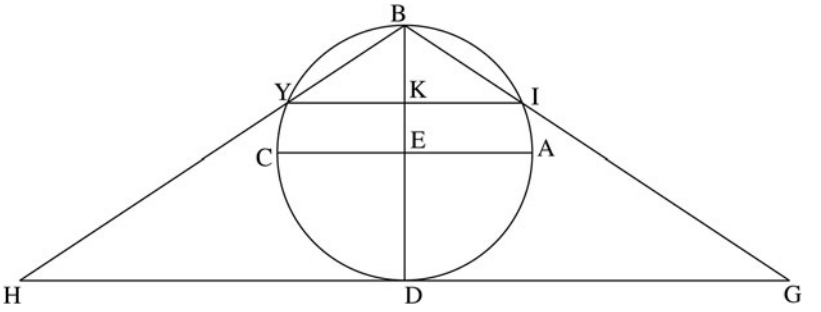


Fig. 7.

point *B* est fixe et dont le point *D* décrit le cercle *ABCD*, qui lui permet de conclure que le prolongement de cette droite jusqu'au plan de l'astrolabe décrit la droite *HG*.[51] Le second repose sur l'intersection du plan *ABCD* et du plan de l'astrolabe. Dans les deux cas, il obtient pour ligne méridienne la droite *GH*.

En menant les droites *BG* et *BH* à partir des extrémités du diamètre *GH* du tympan de l'astrolabe dont la circonférence est donnée, il détermine ensuite la droite *IY*, diamètre d'un cercle parallèle à l'équateur. Puis il démontre que si l'on prolonge la surface du cône de sommet *B* et de base le cercle de diamètre *IY* jusqu'au plan de l'astrolabe, alors cette surface coupe ce plan selon un cercle de centre *D*, qui n'est autre que le cercle qu'il s'est donné au départ pour délimiter le tympan. Son raisonnement repose à nouveau sur le mouvement de la droite *BG* suivant le contour du cercle de diamètre *IY*, le point *B* étant fixe, mouvement qui engendre une surface conique. Le cône inscrit dans la sphère, ayant pour sommet le pôle sud *B*, joue ici un rôle essentiel. C'est ce même cône, sur lequel repose la conceptualisation géométrique de la projection, que l'on retrouve dans les données de la proposition fondamentale qu'al-Farghānī énonce et démontre au chapitre 1 et que nous examinerons plus bas.

[51] Le cône de sommet *B* et de base *ABCD* est, ici, dégénéré, c'est pourquoi al-Farghānī n'emploie évidemment pas le mot "cône", ni "conique"; nous le faisons pour traduire son expression du mouvement de la droite qui tourne autour du cercle, à partir d'un point fixe. Ce principe, qui prendra tout son sens dans la suite du texte, est exactement celui sur lequel repose la définition de la surface conique que l'on trouve au tout début du livre I des *Coniques* d'Apollonius, ce dernier précisant bien évidemment que le cercle et le point fixe ne se trouvent pas dans un même plan (Apollonius de Perge *Coniques*, tome 1.1: *Livre I*, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par R. Rashed [Berlin, 2008], pp. 252–5; tome 1.2, édition et traduction du texte grec par M. Decorps-Foulquier et M. Federspiel [Berlin, 2008], pp. 6–7). Al-Farghānī ne cite pas les *Coniques* d'Apollonius, mais il est plus que probable qu'il ait connu ce texte dont la traduction était menée à Bagdad au même moment, comme R. Rashed l'affirme ("Les mathématiques de la terre", p. 294, et aussi Rashed et Abgrall, "Les traditions des coniques et le début de la recherche sur les projections", p. 514).

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

Il emploie exactement le même raisonnement pour montrer comment tracer l'écliptique dans le plan de l'astrolabe, à partir de la donnée de son inclinaison sur l'équateur qu'il reporte selon l'arc *AI*.

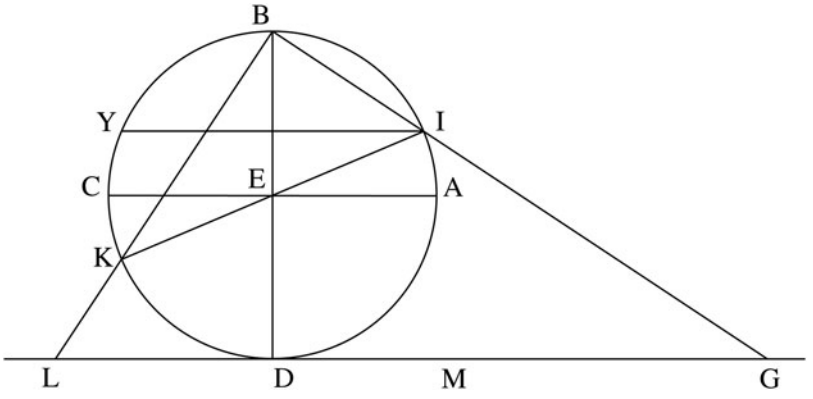


Fig. 8.

Il mène *IK* le diamètre de l'écliptique, puis les droites *BK* et *BI* qu'il prolonge jusqu'à la droite *GL*, et démontre que l'écliptique prend forme selon le cercle de diamètre *GL* sur le tympan, en introduisant le cône de sommet *B* et de base l'écliptique et en s'appuyant sur les principes du chapitre 1. Il ajoute que le centre de ce cercle, *M*, milieu de *GL*, n'est pas au centre *D* du tympan, car l'écliptique, sur la sphère, n'est pas parallèle au tympan (Fig. 8).[52]

Dans la suite du chapitre 2, al-Farghānī détermine géométriquement, dans le plan de l'astrolabe, le cercle de l'horizon d'un lieu de la Terre, caractérisé par sa latitude, puis les cercles parallèles à cet horizon. Il démontre que tous ces cercles ont leur centre sur la ligne méridienne; et après avoir placé sur cette ligne le point correspondant au zénith, pôle de l'horizon, il montre, par un raisonnement géométrique détaillé, que plus le cercle parallèle à l'horizon est éloigné du zénith, plus son centre sera éloigné du point du zénith sur le tympan. Il poursuit son étude géométrique en s'intéressant aux autres cercles qui apparaissent sur le tympan de l'astrolabe: les cercles azimuts pour un horizon et les cercles qui divisent inégalement les ascensions des signes du zodiaque. Nous insistons sur le fait que ce chapitre 2, consacré à la détermination de tous les cercles que l'on trace sur le plan de l'astrolabe, repose sur des démonstrations

[52] Ce résultat découle également des principes du chapitre 1. Dans sa démonstration, l'auteur ne renvoie pas explicitement au chapitre précédent.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

géométriques.[53] De plus, tout au long de ce chapitre, l'auteur utilise la propriété fondamentale selon laquelle un cercle de la sphère prend la forme d'un cercle (ou d'une droite) sur le plan de l'astrolabe. Cette propriété est précisément démontrée dans le premier chapitre de son ouvrage, où il expose, sous la forme d'un lemme et de deux théorèmes, des résultats de pure géométrie, sans aucune référence à l'astrolabe.[54]

Au chapitre 1, al-Farghānī démontre tout d'abord qu'étant donnés une corde quelconque *BH* d'un cercle *ABCD*, et les points *I* et *K*, intersections des droites *CB* et *CH* avec la droite *EG* tangente au cercle en *A*, diamétralement opposé à *C*, les triangles *CKI* et *CHB* sont semblables (Fig. 9).

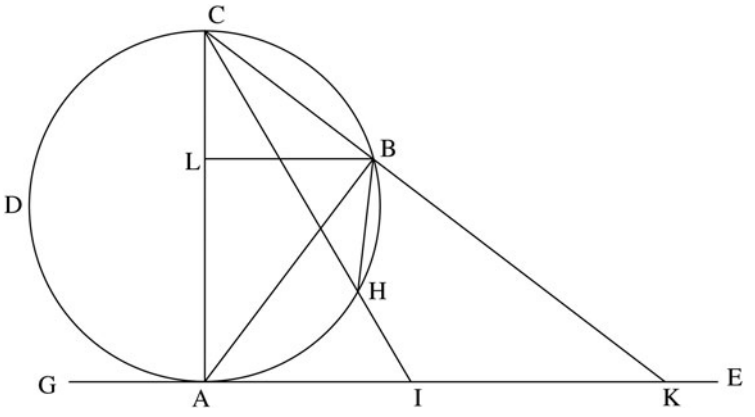


Fig. 9.

En effet, les triangles *ABL* et *LBC* sont semblables puisque *BL* est perpendiculaire à *AC*,[55] donc les angles *BAC* et *LBC* sont égaux. On en déduit que l'angle *AKC* est égal à l'angle *BAC*, lui-même égal à l'angle *BHC*. Possédant un angle commun en *C*, les deux triangles *CKI* et *CHB* sont donc semblables.

La deuxième proposition du premier chapitre concerne précisément la propriété fondamentale de la projection stéréographique. Étant donné un cône de sommet *A* et de base un cercle *BCD*, inscrit dans

[53] Il n'effectue pas le tracé de ces cercles ici, il y consacrera la suite de son ouvrage, en calculant la position des centres et les rayons des différents cercles. Al-Farghānī sépare sciemment l'étude géométrique de l'astrolabe du calcul permettant la construction effective.

[54] À l'exception près du titre du chapitre: *Introduction des propositions géométriques par lesquelles on déduit la cause de la forme de l'astrolabe* (Al-Farghānī, *On the Astrolabe*, p. 26).

[55] Al-Farghānī emploie pour cela un raisonnement semblable à celui d'Euclide dans la proposition VI, 8 des *Éléments*.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

une sphère *ABGHE*, si l'on trace le diamètre *AG* de la sphère et le plan tangent *IQY*, et si la surface du cône est prolongée jusqu'à ce plan, alors leur intersection sera le cercle *KLIN* (Fig. 10).

Pour démontrer ce résultat, al-Farghānī considère la ligne *KLIN*, intersection de la surface du cône et du plan. Il construit le milieu *M* du segment *IK* et trace la droite *ML* depuis un point quelconque *L* de cette ligne *KLIN*. Il veut prouver que $ML = KM$. Il considère le plan parallèle au cercle *BCD*, coupant la surface du cône et le plan *KLIN* en *L*. La ligne *SLO*, intersection de ce plan et du cône est un cercle.[56] La droite *SO*, diamètre du cercle *SLO*,[57] est l'intersection de ce cercle et du plan *AGI*; elle coupe la droite *KI* au point *F* et *LF* est perpendiculaire au plan *AGI*.[58] Alors les deux triangles *SFK* et *FIO* sont semblables.[59]

Donc $KF \times FI = SF \times FO$, mais $SF \times FO = LF^2$, puisque la droite *LF* est perpendiculaire à la droite *SO* et que *SO* est le diamètre du cercle *SLO*. Donc $KF \times FI = LF^2$. Donc il est clair que l'angle *KLI* est droit. Mais le diamètre *KI* a été coupé en deux moitiés au point *M* et on a mené du point *M* la droite *ML*, donc la droite *ML* est égale à chacune des deux droites *KM*, *MI*. Par ce même raisonnement, on montre que toute droite menée du point *M* à n'importe quel endroit de la ligne *KLIN* est égale à chacune des deux droites *KM*, *MI*. Donc la ligne *KLIN* est la circonférence d'un cercle de diamètre *KI* et de centre *M*.[60]

[56] Al-Farghānī renvoie au livre sur la sphère de Muḥammad ibn Mūsā, l'aîné des Banū Mūsā. L'ouvrage en question s'intitule *Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques*, et la proposition utilisée ici est la proposition 10 (R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle,* vol. I: *Fondateurs et commentateurs* [Londres, 1996], pp. 96–9).

[57] Sur la Figure 10, ce n'est pas le cas. Nous avons préféré reproduire la figure telle qu'elle se présente dans l'édition "avec son erreur". L'auteur représente les deux cercles *KLIN* et *SLO* dans le plan de la figure, c'est-à-dire le plan *AGI*. On pourrait penser qu'il procède à deux rabattements, le premier autour de (*KI*) et le second autour de (*SO*), ce qui aurait pour effet de dédoubler le point *L*. Ainsi, les deux cercles rabattus ne devraient pas se couper en *L*. En fait, la figure est une sorte de représentation en perspective dont les règles de déformation des cercles ne seraient pas suivies, elle n'est qu'un support de la réflexion (Al-Farghānī, *On the Astrolabe*, p. 31). Nous donnons ensuite une représentation en perspective (Fig. 11).

[58] En effet, la droite *LF* est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan *AGI*, les plans des deux cercles *KLIN* et *SLO*.

[59] En appliquant le résultat de la première proposition, il montre que l'angle *ASO* est égal à l'angle *GIA*, puisqu'ils sont tous deux égaux à l'angle *ADB*. Mais l'angle *KFS* est égal à l'angle *IFO*, et il reste l'angle *IOF* égal à l'angle *SKF*, donc les deux triangles *SFK* et *FIO* sont semblables.

[60] Le rapprochement entre cette démonstration et la proposition I, 5 des *Coniques*, qui sera la référence explicite pour les successeurs d'al-Farghānī (pseudo-Ibn Sinān, al-Qūhī, voir *infra*, pp. 162–3, note 71), s'impose. L'auteur, dont la proposition peut apparaître comme un cas d'application de la proposition I, 5 d'Apollonius à un cône inscrit dans une sphère, reprend le même cheminement que ce dernier. Cela confirme qu'il a eu connaissance du traité d'Apollonius, au moment où Muḥammad ibn Mūsā s'occupait, avec ses frères, de sa traduction (R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

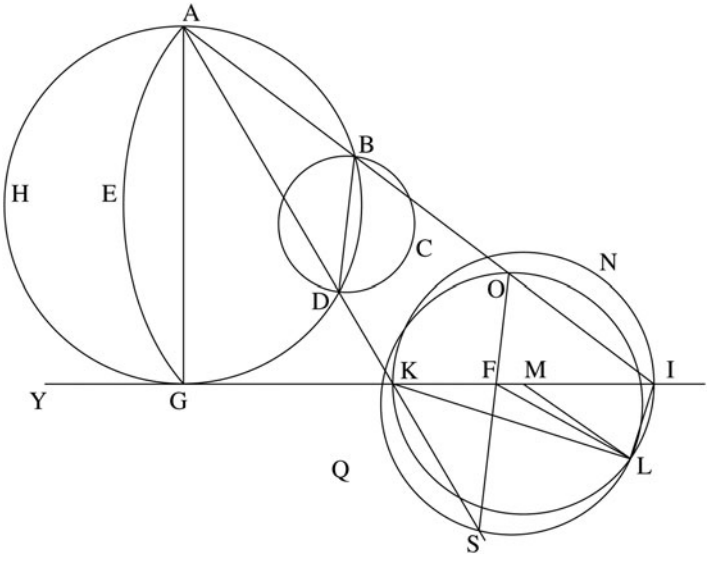


Fig. 10.

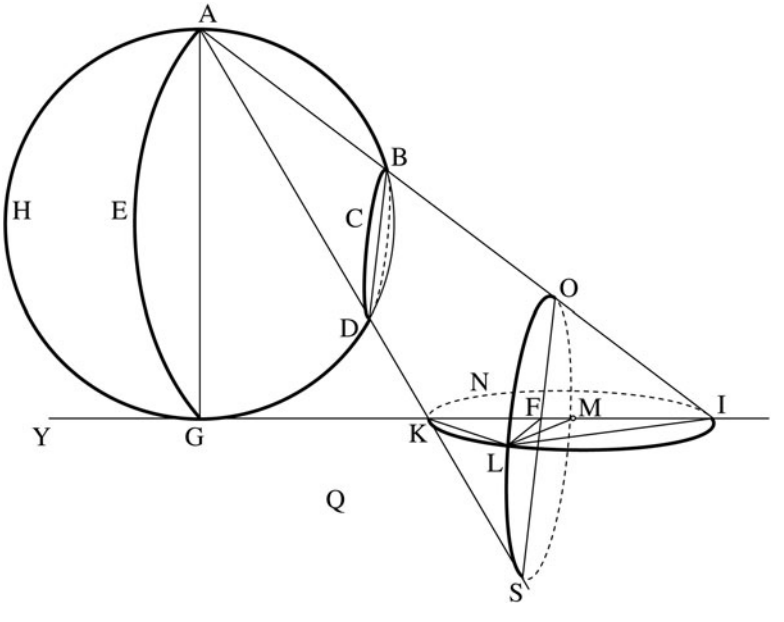


Fig. 11.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

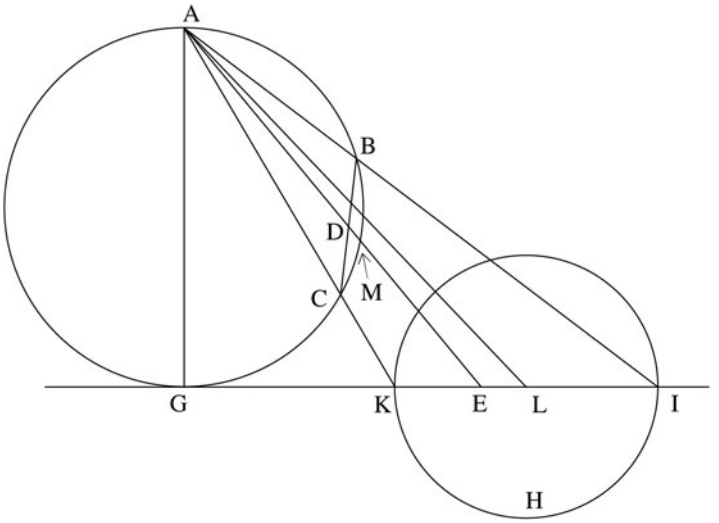


Fig. 12.

Pour clore ce chapitre, al-Farghānī démontre que le sommet du cône, le centre de sa base et le centre de l'intersection avec le plan tangent à la sphère, ne sont pas alignés. Il le fait en précisant la position du centre de ce dernier cercle. Si l'on appelle *D* le centre du cercle de diamètre *BC*, base du cône, le centre du cercle de diamètre *KI*, que l'on obtient dans le plan tangent, est le point *L* tel que l'angle *LAI* est égal à l'angle *DAC* (Fig. 12).[61]

Al-Farghānī a volontairement isolé et démontré au tout début de son traité, les propositions géométriques sur lesquelles repose son étude de la construction des cercles tracés sur l'astrolabe. Comme il le précise, c'est la première fois que l'on démontre cette propriété fondamentale des cercles. Les objets qu'il utilise relèvent du domaine des coniques,[62] mais il se place dans un contexte clairement projectif, caractérisé par l'usage qu'il fait de la définition d'une surface conique, telle qu'on la trouve dans l'ouvrage d'Apollonius.[63] L'introduction du

[Londres, 2000], pp. 1–2, 12–13, ainsi que: Apollonius de Perge, *Coniques*, t. 1.1, pp. 25–30; voir également *supra*, p. 154, note 51).

[61] Il montre que les triangles *ALI* et *ADC* sont semblables, et reprend le premier résultat de ce chapitre, à savoir que les triangles *AKI* et *ABC* sont semblables. Puisque *DC* est la moitié de *BC*, alors *LI* est la moitié de *KI*, donc *L* est le centre du cercle *KHI*. Or la droite *AD* rencontre la droite *GI* en *E*, et les points *E* et *L* sont distincts car l'arc *CM* est plus petit que l'arc *MB*.

[62] Dans le commentaire qui précède, nous avons en particulier souligné l'importance du cône inscrit dans la sphère, qui lui sert à traduire les problèmes du chapitre 2 dans les termes de la proposition fondamentale du chapitre 1.

[63] L'impact que le traité des *Coniques* d'Apollonius a pu avoir sur le travail d'al-Farghānī ne fait pas de doute. Il est également raisonnable de supposer qu'il était impliqué dans les

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

cône et l'usage qu'il fait du mouvement de la droite qui définit la surface conique, marquent nettement la rupture avec la méthode de Ptolémée que nous avons commentée plus haut. Les principes employés et les objets mathématiques introduits pour établir la relation entre sphère et plan, diffèrent totalement.[64] Même s'il n'introduit pas de nouveaux termes propres à fonder un nouveau chapitre sur les projections, la manière dont il sépare nettement les deux domaines de la géométrie et de l'astronomie mathématique, en appliquant la première à la seconde, marque l'apparition d'une nouvelle théorie en tant que telle, construite solidement sur ses bases.[65] Cette nouvelle théorie sera amplement développée au siècle suivant.

III. *LE TRAITÉ SUR L'ASTROLABE* D'AL-QŪHĪ ET SON COMMENTAIRE PAR IBN SAHL

On trouve la première théorie générale de la projection locale de la sphère, dans un traité qu'Abū Sahl al-Qūhī a rédigé au cours de la seconde moitié du X^e^ siècle et intitulé: *Sur l'art de l'astrolabe par la démonstration*. Cette ouvrage, composé en deux livres, a pour objet la projection de la sphère, et rompt avec toutes les études

réflexions que la réception de l'ouvrage a suscitées au sein de la Maison de la Sagesse au milieu du IX^e^ siècle (Rashed et Abgrall, "Les traditions des coniques et le début de la recherche sur les projections", pp. 512–17, les idées de cette partie sont reprises de l'article de R. Rashed, "Les mathématiques de la terre").

[64] En revanche, la comparaison attentive des deux textes révèle une similitude frappante de leurs structures et des questions traitées. Même si le texte d'al-Farghānī est beaucoup plus homogène et mieux organisé, donc plus simple à comprendre, que celui du *Planisphère*, il suit un plan très proche de celui-ci. Après avoir posé les principes géométriques, al-Farghānī délimite le tympan sur lequel on doit tracer les cercles de la sphère, en déterminant le cercle extérieur, comme le fait Ptolémée. Il place les méridiens et les cercles parallèles à l'équateur, puis l'écliptique. Pour ce dernier, il reporte l'arc de déclinaison sur le cercle du méridien (voir *supra*, p. 155). On a vu l'importance de ce procédé chez Ptolémée (voir *supra*, p. 144). Au chapitre 3, al-Farghānī calcule les rayons des cercles parallèles à l'équateur, puis le rayon de l'écliptique et la position de son centre par le calcul de la distance qui le sépare du centre de l'équateur, questions que Ptolémée a traitées dans son livre (§ 4 à 6), puis ceux des cercles parallèles à l'horizon d'un lieu de latitude 30° (Ptolémée choisit la latitude de Rhodes, 36°). Ainsi de suite, les calculs des ascensions des signes et des lignes d'heures. Ce dernier problème n'apparaît pas dans la version que nous avons lue du *Planisphère*, mais O. Neugebauer suppose que cette version est incomplète, car Ptolémée a effectivement étudié cette question d'après un témoignage de Philopon (*A History of Ancient Mathematical Astronomy*, vol. II, pp. 871–2). Bien sûr tous ces problèmes étaient classiques dans le domaine des études sur l'astrolabe, mais la question des sources d'al-Farghānī se pose clairement et n'a pas encore été traitée, à notre connaissance.

[65] Comme nous l'avons dit (voir *supra*, p. 153, notes 48 et 49), al-Farghānī ne parle pas de projection, n'emploie pas le mot qui sera reconnu ensuite, *al-tasṭīḥ*. Mais l'usage systématique qu'il fait du mouvement d'une droite passant par un point fixe et décrivant la circonférence d'un cercle pour engendrer une surface conique, marque sa volonté de traiter géométriquement et rigoureusement la projection qui devient ici un concept, même s'il ne peut pas encore la nommer, même si elle n'est pas encore constituée comme objet.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

antérieures consacrées à l'astrolabe. Si son auteur ne s'intéresse pas à l'histoire des recherches sur l'astrolabe, s'il ne cite aucun des auteurs d'ouvrages sur ce sujet, c'est parce que son projet est bien différent. S'il présente en introduction les principes de l'instrument, son étude ne porte pas sur l'astrolabe en tant qu'instrument d'astronomie. Dans cet ouvrage, complété de manière décisive par le commentaire qu'en a rédigé Ibn Sahl à la même époque,[66] la projection stéréographique apparaît comme un cas particulier d'une théorie plus générale de la projection de la sphère qu'al-Qūhī expose au premier chapitre de son traité, en introduisant tous les types de projections coniques et cylindriques, sur tous les types de surfaces compatibles avec le mouvement de l'astrolabe:

> La sphère se projette sur des surfaces de genres différents à partir de positions diverses, mais l'une des deux surfaces ne se meut sur l'autre par le mouvement de la sphère que si elle est une des surfaces coniques ou cylindriques ou une de leurs analogues – qui ont un axe et dont l'axe est celui de la sphère – ou si elle est une surface plane à laquelle l'axe de la sphère est perpendiculaire. Dans le cas des surfaces coniques ou cylindriques, les projections des cercles de la sphère sont des sections communes à des surfaces, l'une conique et l'autre cylindrique, ou à deux surfaces coniques ou à deux surfaces cylindriques, car la projection de la sphère se sépare en deux: l'une cylindrique et l'autre conique.[67]

Auparavant, al-Qūhī a expliqué que l'astrolabe est formé de deux surfaces, l'une fixe, le tympan, et l'autre mobile, l'araignée, sur laquelle on place l'écliptique et les astres que l'on peut observer. Le mouvement de l'une sur l'autre représente le mouvement de rotation de la sphère céleste vue par un observateur. Pour que la projection soit compatible avec l'instrument, il faut que les deux surfaces sur lesquelles on projette la sphère, puisse tourner l'une sur l'autre. Cette condition porte à la fois sur la nature des surfaces, comme on vient de le voir, mais aussi sur la nature de la projection. Elle amène l'auteur à ne conserver que certaines projections: les projections cylindriques d'axe parallèle à celui de la sphère, ou coniques dont le sommet est sur l'axe. Al-Qūhī précise la nature des projetés des cercles de la sphère pour les projections retenues. "Si la projection de la sphère est cylindrique d'axe parallèle à celui de la sphère, ou conique dont le sommet est sur l'axe, sans être sur un pôle de la sphère, alors [. . .] les cercles de la sphère, autres que les cercles auxquels l'axe de la sphère est

[66] L'édition, la traduction et le commentaire de ces deux textes ont été publiés par R. Rashed, dans *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, pp. CIII–CXXII, pp. 65–82 et pp. 190–230, et repris avec une traduction anglaise au chapitre VI: Conical and Cylindrical Projections, and Astrolabes, de *Geometry and Dioptrics*, pp. 849–973; on trouvera un commentaire complémentaire dans P. Abgrall, "La géométrie de l'astrolabe au X^e siècle", *Arabic Sciences and Philosophy*, 10.1 (2000): 29–76.

[67] Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, p. 191.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

perpendiculaire, ne se projettent pas [...] comme des cercles mais comme des sections de cône";[68] cela si la surface sur laquelle se fait la projection est un plan.[69] Il poursuit plus loin:

> si la projection est conique dont le sommet est sur un pôle de la sphère et que la projection se fait sur un plan auquel l'axe de la sphère est perpendiculaire, [...] les cercles de la sphère sur cette surface ne seront pas des sections coniques, mais bien des cercles ou des droites si la projection est à partir des cercles qui passent par ce même pôle.[70]

Ainsi, la projection stéréographique est définie comme un cas particulier des projections coniques de la sphère, celle qui conserve la forme des cercles de la sphère. Toute la suite de l'ouvrage sera consacrée à l'étude complète de cette transformation.

La première proposition que l'auteur démontre concerne la propriété fondamentale de la projection stéréographique qu'il vient d'énoncer et qui occupe, comme dans l'ouvrage d'al-Farghānī, la première place.

Il considère un cercle passant par l'axe *AD* de la sphère, le cercle *ABCD*, et veut projeter sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe, le cercle de diamètre *BC* et dont le pôle est sur le cercle *ABCD*. Il définit alors le cône de sommet *A* et de base le cercle de diamètre *BC*, et montre que l'intersection du cône avec le plan *P*, perpendiculaire à l'axe *AD* mais placé où l'on veut, est le cercle de diamètre *EG* (Fig. 13).

Sa démonstration repose sur la proposition I, 5 des *Coniques* d'Apollonius,[71] qu'al-Qūhī cite explicitement. Celui-ci montre la

[68] *Ibid.*, p. 192.

[69] Toute la partie que nous venons de décrire sera amplement commentée par Ibn Sahl, qui donnera notamment une classification de toutes les projections possibles, sous la forme d'un arbre (Abgrall, "La géométrie de l'astrolabe au X^{e} siècle", pp. 74–5).

[70] R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^{e} siècle*, pp. 192–3.

[71] *Les Coniques*, I, 5 (Apollonius de Perge *Coniques*, t. 1.1, texte arabe par R. Rashed, pp. 270–5; t. 1.2, texte grec par M. Decorps-Foulquier et M. Federspiel, pp. 20–5). On trouve la même référence à Apollonius, dans un autre texte consacré à l'astrolabe et attribué à Ibn Sinān. Ibrāhīm ibn Sinān, mort en 946, est le petit-fils de Thābit ibn Qurra (voir sa notice biographique et son autobiographie dans R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān, Logique et géométrie au X^{e} siècle* [Leyde, 2000], pp. 1–19). A. Saidan a publié en arabe ce texte intitulé: *Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ilā Abī Yūsuf al-Ḥasan ibn Isrā'īl fī al-asṭurlāb*, titre que l'on peut traduire par: *Épître d'Ibrāhīm ibn Sinān à Abū Yūsuf al-Ḥasan ibn Isrā'īl - Sur l'astrolabe*, dans *Rasā'il Ibn Sinān* (Koweit, 1983), pp. 309–17. La question de l'authenticité de ce texte se pose car il n'est signalé par aucun biobibliographe ancien (Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. I, p. 677). Ce texte, que l'on ne peut situer avec certitude, contient une citation du début du *Planisphère* de Ptolémée (*Rasā'il Ibn Sinān*, p. 312). Si l'on compare ce passage à celui du texte de Ptolémée tel qu'édité par N. Sidoli et J. L. Berggren ("The Arabic version of Ptolemy's *Planisphere*", p. 55), les différences sont nombreuses, et il est difficile de conclure. Certaines phrases sont identiques, d'autres ont le même sens, mais écrites différemment et ordonnées différemment, laissant supposer qu'il pourrait s'agir d'une autre version du même texte. P. Kunitzsch explique ces différences par le fait que l'auteur cite Ptolémée

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

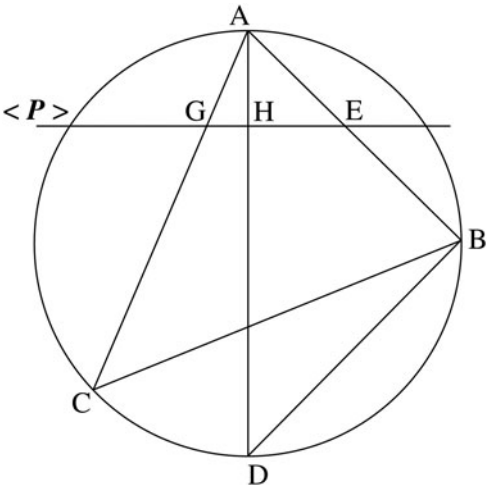


Fig. 13.

similitude des triangles *AGE* et *ABC*, en commençant par les triangles rectangles *AEH* et *ADB*. Puisque ces deux derniers ont un angle commun en *A*, ils sont semblables, donc les angles *AEH* et *ADB* sont égaux. Or l'angle *ACB* est égal à l'angle *ADB*, donc les angles *AEG* et *ACB* sont égaux. Puisque par ailleurs les triangles *AGE* et *ABC* ont un angle commun en *A*, ils sont semblables. Ensuite, al-Qūhī montre que la configuration des plans est la même que dans la proposition des *Coniques*: le plan du triangle *ABC*, le triangle passant par l'axe du cône, est perpendiculaire au plan de sa base et au plan sécant, *P*. Cela lui permet d'appliquer le résultat de la proposition d'Apollonius. Donc le projeté du cercle de diamètre *BC* sur la sphère est le cercle de diamètre *EG* dans le plan *P*. On retrouve dans cette démonstration les mêmes arguments que dans celle d'al-Farghānī, mais elle est exposée de manière beaucoup plus concise et elle est surtout plus générale notamment dans l'emploi d'un plan de projection quelconque.

de mémoire ("The role of al-Andalus in the transmission of Ptolemy's *Planisphaerium* and *Almagest*", p. 152). L'auteur de ce texte donne également les noms de Pappus, qui a rédigé un commentaire au *Planisphère* (*ibid.*, p. 152), et al-Farghānī. Il démontre la propriété selon laquelle les cercles de la sphère sont projetés selon des cercles sur un plan perpendiculaire à l'axe de la sphère, ici tangent à la sphère comme dans l'ouvrage d'al-Farghānī, et renvoie explicitement au livre I des *Coniques* d'Apollonius (Saidan, *Rasā'il Ibn Sinān*, p. 312). En fait, sa démonstration est moins générale que celle d'al-Qūhī, car il la rédige dans le cas de l'écliptique, qu'il généralise ensuite en se contentant d'affirmer que ce qui vient d'être fait pour l'écliptique, peut s'appliquer aux autres cercles.

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

Il consacre ensuite le chapitre 2 de son traité, à la définition de: "la terminologie nécessaire pour construire l'astrolabe".[72] En particulier, il définit le terme "homologue" (*naẓīr*) que l'on a déjà rencontré dans la version arabe du *Planisphère* de Ptolémée.[73] Mais ici, ce mot acquiert un sens mathématique précis qui désigne un cercle ou un point de la sphère par rapport à son projeté.[74] Par ailleurs, le mot projeté, ou "projection" (*tasṭīḥ*), prend également un sens mathématique, par l'usage systématique que l'auteur fera de lui. Ainsi la relation entre un élément de la sphère et son image dans le plan, est désignée par deux termes différents, employés systématiquement dans les mêmes situations, avec un sens précis, qui permettent de distinguer deux sens réciproques dans cette relation. Ce fait est tout à fait nouveau, et ne se trouve dans aucun autre texte consulté jusqu'à maintenant.

La suite de son étude est purement géométrique. Il termine le livre I de son traité par l'étude du tracé des cercles parallèles et des cercles perpendiculaires d'un horizon, c'est-à-dire au tracé des *muqanṭarāt* et des azimuts.

Mais ce qui fait de cet ouvrage un témoin incontournable de l'histoire de la projection stéréographique, en dehors des faits que nous venons d'analyser, apparaît au livre II, dans lequel la projection stéréographique devient un objet mathématique à part entière. Al-Qūhī étudie la projection en tant que transformation géométrique, devenue aujourd'hui une inversion.[75] C'est même une étude "réciproque" de la projection, en quelque sorte, qui est entreprise.

Les problèmes du second livre sont destinés à retrouver les éléments qui définissent la sphère projetée, son centre et son rayon, à partir de la donnée du plan et de trois éléments particuliers qu'il va considérer de manière systématique parmi les données possibles de l'ensemble sphère-plan. C'est ainsi dans les trois chapitres conservés: le 1, le 2 et le 6, et on peut supposer qu'il en était de même dans les chapitres perdus.[76] La structure des chapitres 1 et 2 est absolument similaire. Tous les deux comportent six problèmes dont al-Qūhī rédige la synthèse.

[72] Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, p. 194.
[73] Cf. *supra*, p. 140.
[74] Al-Qūhī définit au début du chapitre: "les cercles, les lignes et les points qui sont sur la sphère, sont appelés les homologues (*naẓā'ir*) des cercles, lignes et points qui sont sur cette surface [de l'astrolabe], les uns par rapport aux autres." (p. 194.) On peut relever qu'il emploie ce terme "dans le sens inverse" de Ptolémée (voir *supra*, pp. 140–1, n. 17 et 18), l'objet de la sphère est l'homologue de son projeté sur le plan. Notons tout de même une exception, car une seule fois, il désigne par homologues les projetés de trois points (Abgrall, "La géométrie de l'astrolabe au X^e siècle", p. 40, note 114).
[75] Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, p. CXIII et *Geometry and Dioptrics*, p. 860.
[76] Le livre II présente une importante lacune qui nous prive des chapitres 3, 4 et 5 (Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, p. CXXXVIII et *Geometry and Dioptrics*, p. 861).

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

Donnons pour exemple le chapitre 1 du second livre, où sont regroupés les problèmes pour lesquels l'auteur se donne un point image dans le plan de l'astrolabe et la distance angulaire de son homologue au pôle de la sphère.[77] La donnée de la distance angulaire de cet homologue au pôle de la sphère, revient à donner sa latitude, donc à le situer sur un cercle parallèle à l'équateur de la sphère. La troisième donnée est alors prise, successivement au cours des six problèmes, parmi les suivantes:

1. le pôle de la sphère,
2. le centre de la sphère, qui est aussi celui de l'astrolabe,
3. le rayon de la sphère,
4. la distance, sur le plan de l'astrolabe, du pôle à un point dont l'homologue est à une distance angulaire connue de ce pôle,
5. la distance, sur le plan de l'astrolabe, du centre de la sphère à un point dont l'homologue est à une distance angulaire connue du pôle de la sphère,
6. un autre point image et la distance angulaire de son homologue au pôle de la sphère.[78]

Bien que cet ouvrage se présente comme traitant de la construction de l'astrolabe, al-Qūhī étudie en fait la structure mathématique sous-jacente à l'instrument, c'est-à-dire la projection stéréographique, sur son plan équatorial, d'une sphère définie par son centre et son rayon. Sous la plume d'al-Qūhī et d'Ibn Sahl, la projection stéréographique est devenue l'objet à part entière d'une théorie mathématique, et la question de savoir si ces auteurs conçoivent une telle projection ne se pose pas. Par l'étude qu'il en fait dans le second livre de son traité, al-Qūhī la place même au rang des transformations géométriques.

Ce travail s'inscrit dans un ensemble de recherches portant sur les projections d'une part, et sur les transformations géométriques, d'autre part, recherches qui ont été entreprises un siècle auparavant, et qui connaissent une expansion importante à cette époque comme en témoignent notamment certains ouvrages écrits par al-Bīrūnī au XI^{e} siècle.[79] Dans le traité qu'il rédigea à la même période, ou un peu après, al-Ṣaghānī étudie les projections coniques dont le pôle décrit l'axe de la sphère, sans jamais occuper la place de l'un des

[77] On peut comprendre ici le sens que l'auteur a donné au mot *homologue* (voir *supra*, p. 164 et note 74).

[78] Voir le détail de l'analyse de tous ces problèmes dans Abgrall, "La géométrie de l'astrolabe au X^{e} siècle", pp. 46–71.

[79] Dans ces ouvrages intitulés: *La projection plane des figures <des constellations> et des sphères* et *De toutes les méthodes possibles pour la construction de l'astrolabe*, al-Bīrūnī fait état des projections connues à son époque (Rashed et Abgrall, "Les traditions des coniques et le début de la recherche sur les projections", pp. 490–3).

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press

pôles de cette sphère.[80] La projection cylindrique qu'al-Qūhī et Ibn Sahl étudient dans leur théorie générale et nomment ici pour la première fois, bien qu'al-Bīrūnī en revendiquera plus tard l'invention, était déjà présente dans le traité de Thābit ibn Qurra *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale*.[81] Et c'est d'ailleurs précisément pour établir une relation entre un cercle et une ellipse, ou entre deux figures semblables, que Thābit a introduit une telle projection. C'est le contexte scientifique dans lequel il travaillait, sous l'égide des Banū Mūsā, qui l'a conduit à employer des transformations ponctuelles, déjà connues ou nouvelles.[82] Cette étude des transformations n'a cessé de se développer par la suite, avec les travaux d'Ibrāhīm Ibn Sinān, d'al-Khāzin, d'al-Qūhī, d'al-Sijzī, entre autres, et Ibn al-Haytham, au début du XI^{e} siècle, cherchera à caractériser ces nouveaux objets géométriques, et portera une attention toute particulière au mouvement et à la place que celui-ci doit occuper en géométrie.[83]

[80] *Ibid.*, pp. 526–33.

[81] Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. I, pp. 458–673; en particulier p. 458, le commentaire de la proposition 7 p. 463 et celui de la proposition 10 pp. 464–5.

[82] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle,* vol. IV: *Méthodes géométriques, transformations pontuelles et philosophie des mathématiques* (Londres, 2002), pp. 1–4.

[83] *Ibid.*, pp. 4–11 (particulièrement p. 5), pp. 14–24 (étude de l'homothétie comme transformation ponctuelle), et pp. 393–583 (le commentaire, l'édition et la traduction de son ouvrage *Sur les connus*, et plus particulièrement l'introduction d'Ibn al-Haytham, pp. 444–88).

https://doi.org/10.1017/S0957423914000125 Published online by Cambridge University Press