Mathematika 64 (2018) 343–379 © 2018 University College London
doi:10.1112/S0025579317000547

SUR LES PLUS GRANDS FACTEURS PREMIERS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS

ZHIWEI WANG (NANCY)

Abstract. Let $P^+(n)$ denote the largest prime factor of the integer n and $P_y^+(n)$ denote the largest prime factor p of n which satisfies $p \leqslant y$. In this paper, first we show that the triple consecutive integers with the two patterns $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$ and $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$ have a positive proportion respectively. More generally, with the same methods we can prove that for any $J \in \mathbb{Z}$, $J \geqslant 3$, the J-tuple consecutive integers with the two patterns $P^+(n+j_0) = \min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)$ and $P^+(n+j_0) = \max_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)$ also have a positive proportion, respectively. Second, for $y = x^\theta$ with $0 < \theta \leqslant 1$ we show that there exists a positive proportion of integers n such that $P_y^+(n) < P_y^+(n+1)$. Specifically, we can prove that the proportion of integers n such that $P^+(n) < P^+(n+1)$ is larger than 0.1356, which improves the previous result "0.1063" of the author.

Table des matières

1 Introduction **344**
1.1 Les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs . . 344
1.2 Les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs . . 345
1.3 Les plus grands facteurs premiers de plusieurs entiers consécutifs 347
1.4 Application : distance entre les entiers friables 348
2 Deux lemmes de cribles **349**
2.1 Borne supérieure du crible linéaire 349
2.2 Entiers sans facteur premier dans un intervalle donné 350
2.3 Entiers friables 351
3 Deux théorèmes de type Bombieri–Vinogradov **352**
3.1 Théorème de type Bombieri–Vinogradov pour $S(x; y, z)$ 352
3.2 Théorème de type Bombieri–Vinogradov avec une fonction bien factorisable 355
4 Démonstration du Théorème 1 : cas des n tels que $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$ **358**
5 Démonstration du Théorème 1 : cas des n tels que $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$ **361**
6 Démonstration du Théorème 3 **364**
7 Démonstration du Théorème 4 **365**
8 Démonstration du Théorème 2 avec $0 < \alpha \leqslant 1/2$ **367**

Received 7 April 2017, published online 5 April 2018.
MSC (2010): 11-XX, 11K65, 11KXX (primary).
L'auteur est partiellement soutenu par une bourse de "China Scholarship Council".

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

9 Démonstration du Théorème 2 avec $1/2 < \alpha \leqslant 1$ **368**
9.1 Point de départ 368
9.2 Estimation de la somme $\mathscr{S}_A$ 368
9.3 Estimation de la somme $\mathscr{S}_B$ 369
9.4 Estimation de la somme $\mathscr{S}_C$ 374
10 Démonstration du Corollaire 1 **376**
11 Démonstration du Corollaire 2 **377**
12 Démonstration du Corollaire 3 **378**
References **378**

§1. *Introduction.* Les entiers naturels ont deux structures fondamentales : additive et multiplicative. En général, les propriétés multiplicatives d'un entier et celles de sa perturbation additive sont indépendantes. Les nombres premiers de Fermat et les nombres premiers jumeaux sont deux exemples typiques. Dans cet article, nous nous intéressons aux facteurs premiers des entiers consécutifs. Désignons par $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique $n \geqslant 1$ avec la convention que $P^+(1) = 1$. En tenant compte de la raison mentionnée ci dessus, il est naturel d'escompter que $P^+(n) < P^+(n+1)$ pour un entier sur deux et plus généralement :

HYPOTHÈSE A. *Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé. Alors pour toute permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, on a*

$$\mathrm{Prob}[P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \cdots < P^+(n+a_k)] = \frac{1}{k!},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \cdots < P^+(n+a_k)}} 1 \to \frac{1}{k!} \tag{1.1}$$

pour $x \to \infty$.

Cette conjecture est formulée par De Koninck et Doyon [6] dans le cadre de leur article sur la distance entre les entiers friables. Sans doute, une telle conjecture est très difficile à démontrer. Même dans le cas le plus simple, i.e. $k = 2$, cette conjecture reste encore ouverte. Ce cas est un des "unconventional problems in number theory" d'Erdős (voir par exemple [8] ou [21]).

1.1. *Les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs.* En 1978, Erdős et Pomerance observent dans leur article [9] que les deux configurations

$$P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1) \tag{1.2}$$

ou

$$P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \tag{1.3}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

ont lieu pour une infinité d'entiers n, et conjecturent qu'elles se produisent pour une proportion positive d'entiers. Par ailleurs, ils démontrent l'existence d'une infinité d'entiers n satisfaisant

$$P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1) \tag{1.4}$$

en considérant des entiers n de la forme $n = p^{k_0}$ avec k_0 judicieusement choisi. Finalement, ils remarquent que "On the other hand we cannot find infinitely many n for which

$$P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1), \tag{1.5}$$

but perhaps we overlook a simple proof." En 2001, Balog [1] démontre leur conjecture et il obtient

$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| \gg x^{1/2}$$

pour $x \to \infty$.

Dans cet article, nous montrons qu'il existe une proportion positive d'entiers n tels que (1.2) et (1.3) sont vraies.

Notre résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. *Pour $x \to \infty$, on a*

$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 1{,}063 \times 10^{-7} x \tag{1.6}$$

et

$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| > 8{,}84 \times 10^{-4} x. \tag{1.7}$$

L'idée de la preuve est de considérer pour (1.6) des entiers n friables et pour (1.7) des entiers de la forme mp, où p est un nombre premier de taille assez grande. On introduit ensuite un système de poids bien adapté et on utilise des théorèmes de type Bombieri–Vinogradov pour les entiers friables et pour les entiers avec un grand facteur premier.

1.2. *Les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs.* Dans ce sous-paragraphe, nous considérons les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs. Dans ce cas, la conjecture (1.1) peut être simplifiée de la manière suivante :

$$|\{n \leqslant x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \tfrac{1}{2} x. \tag{1.8}$$

En 1978, Erdős et Pomerance [9] démontrent qu'il existe une proportion positive d'entiers n avec $P^+(n) < P^+(n+1)$. Plus précisément, ils obtiennent

$$|\{n \leqslant x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 0{,}0099x \quad (x \to \infty). \tag{1.9}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

En 2005, La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum [4] améliorent la constante 0,0099 en 0,05544. De plus, dans leur article ils indiquent que 0,05544 peut être remplacée par 0,05866, grâce à une observation de Fouvry. Récemment, nous [25] avons réussi à généraliser ce problème dans les petits intervalles. En particulier, nous avons amélioré la constante 0,05866 en 0,1063.

Rivat [19] propose une autre voie pour approcher (1.8). Pour $2 \leqslant y \leqslant x$, notons $P_y^+(n)$, le plus grand facteur premier de n inférieur à y, $P_y^+(n) = \max\{p|n : p \leqslant y\}$, avec la convention $P_y^+(n) = 1$ si le plus petit facteur premier de n est strictement supérieur à y.

Pour quels y, avons-nous la formule

$$|\{n \leqslant x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \sim \tfrac{1}{2}x\,? \tag{1.10}$$

En posant

$$f_y(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P_y^+(n+1) > P_y^+(n), \\ -1 & \text{si } P_y^+(n+1) < P_y^+(n). \end{cases}$$

Rivat montre que

$$\left| \sum_{1 \leqslant an+b \leqslant x} f_y(an+b) \right| \ll_{a,b} x \exp\left(-\frac{\log x}{10 \log y}\right)$$

est valable pour $(a, b(b+1)) = 1$ et

$$x \geqslant 3 \quad \text{et} \quad 3 \leqslant y \leqslant \exp\left(\frac{\log x}{100 \log_2 x}\right). \tag{1.11}$$

Cela implique que la formule asymptotique (1.10) a lieu uniformément dans le domaine (1.11). Puisque (1.8) est équivalente à (1.10) avec $y = x$, il serait intéressant d'étendre le domaine de y dans (1.11) ci-dessus à $y = x^\alpha$ où $0 < \alpha \leqslant 1$ est une constante.

Nous n'avons pas réussi à obtenir une telle extension de (1.11). Notre théorème fournit cependant une minoration du membre de gauche de (1.10) quand $y = x^\alpha$.

THÉORÈME 2. *Soit $y = x^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1]$. Il existe $C(\alpha) > 0$ tel que*

$$|\{n \leqslant x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \geqslant C(\alpha)x \tag{1.12}$$

pour $x \to \infty$.

Notre démonstration fournit des expressions explicites de $C(\alpha)$ admissibles. On renvoie le lecteur à (8.6) et (9.24) pour une définition précise de $C(\alpha)$ respectivement dans les intervalles $]0, 1/2]$ et $]1/2, 1]$. Le suivant est trois exemples de valeurs de $C(\alpha)$ admissibles :

$$C\left(\tfrac{1}{3}\right) > 0,0506, \qquad C\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,0914, \qquad C\left(\tfrac{2}{3}\right) > 0,0948.$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Lorsque α tend vers 0, notre résultat devient moins intéressant, en effet,

$$\lim_{\alpha\to 0} C(\alpha) \to 0,$$

ce qui est contraire à l'intuition. Cela est dû au système de poids que nous utilisons qui est certainement très perfectible pour des petites valeurs de α.

Dans cet article nous souhaitons donner un premier résultat valable pour tout $\alpha \in]0, 1]$. Nous espérons dans un prochain travail améliorer les valeurs de $C(\alpha)$ pour α proche de 0.

Pour $\alpha = 1$, le Théorème 2 fournit une amélioration de la proportion 0,1063 obtenue dans [**25**]. Nous montrons ainsi que $P^+(n) < P^+(n+1)$ (ou $P^+(n) > P^+(n+1)$) a lieu pour au moins 2 entiers sur 15, plus précisément on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Pour $x \to \infty$, on a*

$$|\{n \leqslant x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 0{,}1356x. \tag{1.13}$$

La minoration ci-dessus est aussi vraie pour la configuration $P^+(n) > P^+(n+1)$.

Signalons que la constante 0,1356 peut être remplacée par 0,411 sous l'hypothèse d'Elliott-Halberstam et l'hypothèse d'Elliott-Halberstam pour des entiers friables (avec "$q \leqslant x^{1-\varepsilon}$" à la place de "$q \leqslant x^{1/2}/(\log x)^B$" dans (3.4) du Lemme 3.2 ci-dessous).

1.3. *Les plus grands facteurs premiers de plusieurs entiers consécutifs.* De Koninck et Doyon [**6**] ont remarqué que sous l'Hypothèse A on a

$$\left|\left\{n \leqslant x : P^+(n+j_0) = \min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)\right\}\right| \sim J^{-1}x$$

pour $x \to \infty$. Notre méthode permet d'obtenir une proportion positive inconditionnelle.

THÉORÈME 3. *Soient $J \geqslant 3$ un entier et $j_0 \in \{0, \dots, J-1\}$. Alors on a*

$$\left|\left\{n \leqslant x : P^+(n+j_0) = \min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)\right\}\right| \geqslant \{C_3(J) + o(1)\}x \tag{1.14}$$

pour $x \to \infty$, où

$$C_3(J) := \max_{0<\alpha<1/(2(J-1))} \rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha \log \frac{1}{2\alpha(J-1)}\right)^{J-1} > 0. \tag{1.15}$$

Nous avons un résultat similaire pour le max à la place de min.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4. *Soient $J \geqslant 3$ un entier et $j_0 \in \{0, \dots, J-1\}$. Alors on a*

$$\left|\left\{n \leqslant x : P^+(n+j_0) = \max_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)\right\}\right| \geqslant \{C_4(J) + o(1)\}x \quad (1.16)$$

pour $x \to \infty$, où

$$C_4(J) := \max_{\substack{(2J-2)/(2J-1)<\alpha<1\\ 1-\alpha\leqslant\beta<\gamma<\alpha/(2(J-1))}} \left(\beta \log \frac{\gamma}{\beta}\right)^{J-1} \log \frac{1}{\alpha} > 0. \quad (1.17)$$

1.4. *Application : distance entre les entiers friables.* Pour mesurer la distance entre les entiers friables, De Koninck et Doyon [6] ont introduit la fonction suivante :

$$\delta(n) := \min_{\substack{m\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}\\ P^+(m)\leqslant P^+(n)}} |m-n| \quad (1.18)$$

et ont montré sous l'Hypothèse A la formule asymptotique

$$\sum_{n\leqslant x} \delta(n)^{-1} \sim (4\log 2 - 2)x$$

pour $x \to \infty$. De plus, le Théorème 10 de [6] entraîne la minoration inconditionnelle

$$\sum_{n\leqslant x} \delta(n)^{-1} > \frac{2}{3}x + o(x) \quad (1.19)$$

pour $x \to \infty$.

Nous pouvons obtenir grâce au Théorème 1, une majoration inconditionnelle.

COROLLAIRE 2. *Pour $x \to \infty$, on a*

$$\sum_{n\leqslant x} \delta(n)^{-1} < (1 - 5{,}315 \times 10^{-8})x. \quad (1.20)$$

On remarque qu'on peut très légèrement améliorer ce résultat (voir (11.1)) en appliquant le Théorème 3 à la place du Théorème 1.

Par analogie à $\delta(n)$, nous proposons étudier la zone de $P(n)$-friabilité autour de n

$$\delta_*(n) := \min_{\substack{m\in\mathbb{N}^*\setminus\{n\}\\ P^+(m)\geqslant P^+(n)}} |n-m|.$$

En adaptant la démonstration du Théorème 10 de [6], on peut facilement montrer que pour $x \to \infty$

$$\sum_{n\leqslant x} \delta_*(n)^{-1} > \left\{\frac{2}{3} + o(1)\right\}x. \quad (1.21)$$

De façon similaire à la démonstration du Corollaire 2, on peut obtenir une majoration pour $\delta_*(n)$ en utilisant l'inégalité (1.7) du Théorème 1.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 2*. *Pour $x \to \infty$, on a*

$$\sum_{n\leqslant x} \delta_*(n)^{-1} < (1 - 4{,}42 \times 10^{-4})x.$$

Balog [1] a remarqué pour $x \to \infty$:

$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| \leqslant \tfrac{1}{2}x,$$
$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| \leqslant \tfrac{1}{2}x.$$

On peut obtenir respectivement une majoration des autres cas de figure pour les triplets d'entiers consécutifs en utilisant les minorations (1.19) et (1.21), ou en combinant le Théorème 1 avec le Corollaire 1.

COROLLAIRE 3. *Pour $x \to \infty$, on a*

$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)\}| < (0{,}8644 - 8{,}84 \times 10^{-4})x,$$
$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| < (0{,}8644 - 8{,}84 \times 10^{-4})x.$$

Dans le paragraphe 2 de cet article, on rappelle la majoration du crible linéaire obtenue par Iwaniec et des résultats de Hildebrand, Fouvry et Tenenbaum sur les entiers friables ainsi que sur les entiers sans facteur premier dans un intervalle donné.

Le paragraphe 3 porte sur divers théorèmes de type Bombieri–Vinogradov. Nous obtenons notamment pour la suite des entiers avec un grand facteur premier un niveau de distribution en $x^{4/7-\varepsilon}$ lorsque la moyenne est prise avec un poids bien factorisable. C'est une "légère" généralisation du théorème de Bombieri–Friedlander–Iwaniec qui pourra peut-être servir dans d'autres contextes.

Les paragraphes suivants sont dévolus aux preuves des différents résultats annoncés dans cette introduction.

Remarque. Peu après la présentation des ces travaux en mai 2017 lors de la conférence "Prime Numbers and Automatic Sequences" au CIRM à Marseille, Joni Teräväinen [23] m'a annoncé qu'il avait une autre preuve de la densité inférieure strictement positive des ensembles étudiés au Théorème 1. Sa démonstration ne fournit pas de minoration explicite des densités inférieures mais présente une approche différente et intéressante sur ce problème. De plus, sa méthode entraîne directement la proportion positive de la configuration $P^+(n) < P^+(n+1) < P^+(n+2)n^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, mais il semble difficile d'enlever le facteur n^ε.

§2. *Deux lemmes de cribles.*

2.1. *Borne supérieure du crible linéaire.* Dans ce paragraphe nous rappelons un résultat d'Iwaniec sur le crible linéaire. Nous énonçons ici seulement la majoration car seule celle-ci sera utilisée dans cet article.

Soient $\mathcal{A}$ une suite finie d'entiers, $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers, $z \geqslant 2$ un nombre réel, d un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

appartiennent à $\mathcal{P}$. Notons

$$\mathcal{A}_d := \{a \in \mathcal{A} : d \mid a\}, \qquad P_{\mathcal{P}}(z) := \prod_{p<z,\, p\in\mathcal{P}} p.$$

On souhaite évaluer

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) := |\{a \in \mathcal{A} : (a, P_{\mathcal{P}}(z)) = 1\}|.$$

On suppose que $|\mathcal{A}_d|$ vérifie une formule de la forme

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}, d) \quad \text{pour } d \mid P_{\mathcal{P}}(z),$$

où X est une approximation de $|\mathcal{A}|$ indépendante de d, w une fonction multiplicative vérifiant $0 < w(p) < p$ pour $p \in \mathcal{P}$, $w(d)d^{-1}X$ un terme principal et $r(\mathcal{A}, d)$ un terme d'erreur que l'on espère petit en moyenne sur d. De plus, on définit

$$V(z) := \prod_{p<z,\, p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right).$$

On a ainsi [16]

LEMME 2.1. *On suppose qu'il existe une constante $K \geqslant 2$ telle que*

$$\prod_{u\leqslant p<v} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} \leqslant \frac{\log v}{\log u}\left(1 + \frac{K}{\log u}\right)$$

pour tout $v > u \geqslant 2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $D^{1/2} \geqslant z \geqslant 2$, on a

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \leqslant XV(z)\left\{F\left(\frac{\log D}{\log z}\right) + E\right\} + \sum_{\ell<\exp(8/\varepsilon^3)} \sum_{d\mid P_{\mathcal{P}}(z)} \lambda_\ell^+(d) r(\mathcal{A}, d),$$

où $F(s) = 2\mathrm{e}^\gamma s^{-1}$ $(0 < s \leqslant 3)$, γ est une constante d'Euler, $\lambda_\ell^+(d)$ désigne un coefficient bien factorisable de niveau D et d'ordre 1. Le terme d'erreur E satisfait

$$E = O(\varepsilon + \varepsilon^{-8}\mathrm{e}^K (\log D)^{-1/3}).$$

Les $\lambda_\ell^+(d)$ sont les poids de Rosser–Iwaniec. On pourra trouver une définition précise dans [16]. Ici nous indiquons simplement que $|\lambda_\ell^+(d)| \leqslant 1$. La notion de fonction bien factorisable est définie au début du paragraphe 3.2.

2.2. *Entiers sans facteur premier dans un intervalle donné.* Soit

$$P(y, z) := \prod_{z<p\leqslant y} p. \tag{2.1}$$

On désigne pour $z < y \leqslant x$

$$S(x; y, z) := \{n \leqslant x : (n, P(y, z)) = 1\} \tag{2.2}$$

l'ensemble des entiers sans facteur premier dans l'intervalle $]z, y]$ et n'excédant pas x. On note le cardinal

$$\Psi_0(x;\ y, z) := |S(x; y, z)|.$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Alors $\Psi_0(x; y, z)$ est évaluée par le lemme suivant (voir [20, Exercice 299] ou [22] pour la correction).

LEMME 2.2. *On a*

$$\Psi_0(x; y, z) = \vartheta_0(\lambda, u)x\{1 + O(1/\log z)\}$$

uniformément pour $y \geqslant z \geqslant 2$ *et* $x \geqslant yz$, *où*

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \qquad \lambda := \frac{\log z}{\log y}$$

et

$$\vartheta_0(\lambda, u) := \rho(u/\lambda) + \int_0^u \rho(t/\lambda)\omega(u-t)\,dt \tag{2.3}$$

avec la convention $\vartheta_0(0, u) = 0$. *La fonction de Buchstab* $\omega(u)$ *est définie comme la solution continue du système*

$$\begin{cases} u\omega(u) = 1 & \text{si } 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ (u\omega(u))' = \omega(u-1) & \text{si } u > 2. \end{cases}$$

De plus, nous prolongeons $\omega(u)$ *par* 0 *pour* $u < 1$. *La fonction de Dickman* $\rho(u)$ *est définie par l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences*

$$\begin{cases} \rho(u) = 1 & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{si } u > 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.3. *Entiers friables.* Posons

$$S(x, y) := \{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\}, \qquad \Psi(x, y) := |S(x, y)| \tag{2.5}$$

et

$$\Psi(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n \equiv a \pmod q}} 1, \qquad \Psi_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ (n,q)=1}} 1. \tag{2.6}$$

Les deux lemmes respectivement suivants, dus à Hildebrand [15, Theorem 1] et à Fouvry et Tenenbaum [12, Théorème 1], serviront dans la démonstration du Théorème 1.

LEMME 2.3. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Alors on a*

$$\Psi(x, y) = x\rho(u)\left\{1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\}$$

uniformément pour

$$x \geqslant x_0(\varepsilon), \qquad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{H_ε}$$

où $u = \log x/\log y$ *et* $\rho(u)$ *est définie par (2.4).*

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

LEMME 2.4. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors on a*

$$\Psi_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q}\Psi(x, y)\left\{1 + O\left(\frac{\log_2(qy)\log_2 x}{\log y}\right)\right\}$$

uniformément pour

$$x \geqslant x_0(\varepsilon), \qquad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x \tag{H_ε}$$

et

$$\log_2(q+2) \leqslant \left(\frac{\log y}{\log(u+1)}\right)^{1-\varepsilon}. \tag{Q_ε}$$

Pour l'évaluation de la fonction $\Psi_q(x, y)$, on peut aussi voir les travaux de La Bretèche et Tenenbaum [**5**, Corollary 2.2] avec un domaine plus large de y.

§3. *Deux théorèmes de type Bombieri–Vinogradov.* Dans cette section, nous démontrons deux théorèmes de type Bombieri–Vinogradov que l'on utilisera dans la démonstration du Théorème 2.

3.1. *Théorème de type Bombieri–Vinogradov pour $S(x; y, z)$.* Soit $S(x; y, z)$ l'ensemble défini comme dans (2.2). Notre théorème de type Bombieri–Vinogradov pour $S(x; y, z)$ est le suivant.

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $A > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $B = B(A) > 0$ telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{t \leqslant x} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod q}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ (n,q)=1}} 1 \right| \ll_{A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

uniformement pour

$$2 \leqslant z \leqslant y \leqslant x \quad \text{et} \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{3.1}$$

où $\varphi(q)$ est la fonction d'Euler.

Pour démontrer cette proposition, rappelons d'abord un résultat général de Motoshashi [**17**]. Soit f une fonction arithmétique vérifiant les propriétés suivantes :

($\mathscr{A}$) $f(n) \ll \tau(n)^C$, où $\tau(n)$ désigne la fonction diviseur et C est une constante.

($\mathscr{B}$) Si le conducteur d'un caractère de Dirichlet non principal χ est $O((\log x)^D)$, alors

$$\sum_{n \leqslant x} f(n)\chi(n) \ll x(\log x)^{-3D} \quad (x \geqslant 2),$$

où D est une constante positive.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

($\mathscr{C}$) Soit

$$E_f(y;q,a) := \sum_{\substack{n\leqslant y\\ n\equiv a \pmod q}} f(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n\leqslant y\\ (n,q)=1}} f(n),$$

alors pour tout $A > 0$, il existe une constante $B = B(A) > 0$ telle que

$$\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{y\leqslant x} \max_{(a,q)=1} |E_f(y;q,a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \quad (x \geqslant 2).$$

Les constantes A, B, C, D ne dépendent que la fonction f.

Le résultat suivant est dû à Motohashi [17, Theorem 1].

LEMME 3.1. *Soient f et g deux fonctions arithmétiques vérifiant les propriétés ($\mathscr{A}$), ($\mathscr{B}$) et ($\mathscr{C}$). Alors la convolution multiplicative $f * g$ vérifie aussi ($\mathscr{A}$), ($\mathscr{B}$) et ($\mathscr{C}$).*

De manière analogue à $P^+(n)$, désignons par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier d'un entier $n \geqslant 1$ avec la convention $P^-(1) = \infty$. Posons

$$\widetilde{S}(x,y) := \{n \leqslant x : P^-(n) > y\}, \qquad \Phi(x,y) := |\widetilde{S}(x,y)| \tag{3.2}$$

et

$$\Phi(x,y;a,q) := \sum_{\substack{n\in\widetilde{S}(x,y)\\ n\equiv a \pmod q}} 1, \qquad \Phi_q(x,y) := \sum_{\substack{n\in\widetilde{S}(x,y)\\ (n,q)=1}} 1. \tag{3.3}$$

Nous utilisons des théorèmes de type Bombieri–Vinogradov pour les entiers criblés et pour les entiers friables.

LEMME 3.2. *Pour tout $A > 0$, il existe une constante $B = B(A) > 0$ telle que l'on ait*

$$\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{z\leqslant x} \max_{(a,q)=1} \left|\Psi(z,y;a,q) - \frac{\Psi_q(z,y)}{\varphi(q)}\right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \tag{3.4}$$

$$\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{z\leqslant x} \max_{(a,q)=1} \left|\Phi(z,y;a,q) - \frac{\Phi_q(z,y)}{\varphi(q)}\right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \tag{3.5}$$

uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$.

La formule (3.5) a été démontrée par Wolke [26], qui dans le même article annonce une formule équivalente pour les friables. La formule (3.4) a été démontrée par Fouvry et Tenenbaum [12]. On trouvera dans l'article [13] de Fouvry–Tenenbaum (voir également les travaux récents de Drappeau [7]) une formule avec une majoration en $\Psi(x,y)(\log x)^{-A}$ à la place de $x(\log x)^{-A}$ lorsque $y > \exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\}$ et dans l'article [14] d'Harper une formule avec une majoration de niveau $\Psi(x,y)^{1/2}(\log x)^{-B}$, en $\Psi(x,y)(\log x)^{-A}$ à la place

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

de $x(\log x)^{-A}$ lorsque $y > (\log x)^K$, K est une constante fixée. Cependant, dans nos preuves, l'inégalité (3.4) sera suffisante. En particulier, nous exploitons l'uniformité en "$\max_{z\leqslant x}$" dans (3.4) et qui n'apparaît pas dans [**13**].

Nous somme maintenant prêts pour la preuve de la Proposition 3.1.

Démonstration. Soient λ la fonction caractéristique de l'ensemble $S(x; y, z)$, c'est-à-dire,

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \in S(x; y, z), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons deux fonctions arithmétiques v_z et u_y par

$$v_z(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P^+(n) \leqslant z, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad u_y(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P^-(n) > y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors v_z et u_y sont multiplicatives et on a

$$\lambda = v_z * u_y. \tag{3.6}$$

En fait, si $n \notin S(x; y, z)$, il existe un premier p tel que $p \mid n$ et $z \leqslant p < y$. D'où

$$v_z * u_y(n) = \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ p\mid d_1 \text{ ou } p\mid d_2}} v_z(d_1)u_y(d_2) = 0 = \lambda(n).$$

Si $n \in S(x; y, z)$, alors cet entier peut être écrit de manière unique sous la forme

$$n = n_1 n_2, \qquad P^+(n_1) \leqslant z, \qquad P^-(n_2) > y.$$

Ainsi

$$v_z * u_y(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} v_z(d_1)u_y(d_2) = v_z(n_1)u_y(n_2) = 1 = \lambda(n).$$

Donc pour démontrer le résultat souhaité, grâce au Lemme 3.1, il suffit de vérifier que les deux fonctions v_z et u_y possèdent les propriétés $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{B})$ et $(\mathscr{C})$.

La première est triviale.

Soient $D > 0$, $1 < q \leqslant (\log x)^D$ et c_0, c_1, c_2 des constantes strictement positives, alors pour tout caractère de Dirichlet χ non principal modulo q, on a, d'après le Théorème 4 de [**12**]

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n)\leqslant z}} \chi(n) \ll \Psi(x, z)\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log z}} \ll x(\log x)^{-3D}$$

sous la condition

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\{c_0(\log_2 x)^2\} \leqslant z \leqslant x.$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

De plus, si $2 \leqslant z < \exp\{c_0(\log_2 x)^2\}$, le Théorème III.5.1 de [20] implique trivialement que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)\leqslant z}} \chi(n) \ll \Psi(x,z) \ll x\mathrm{e}^{-(\log x)/(2\log z)} \ll x(\log x)^{-3D}.$$

Cela montre que v_z possède la propriété $(\mathscr{B})$ pour $2 \leqslant z \leqslant x$. De manière similaire, par le résultat de [27, Theorem 1], u_y satisfait $(\mathscr{B})$ pour $\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x^{1/2}$. Si $y > x^{1/2}$, m est premier et on sait que $u_y(m)$ satisfait $(\mathscr{B})$ (voir [20]). Donc u_y satisfait $(\mathscr{B})$ pour

$$\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x.$$

On en déduit ensuite que v_z et u_y satisfont $(\mathscr{C})$ en utilisant (3.4) et (3.5) du Lemme 3.2 respectivement. Finalement, à l'aide du Lemme 3.1 on déduit que $\lambda = v_z * u_y$ satisfait des propriétés $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{B})$ et $(\mathscr{C})$ sous la condition

$$2 \leqslant z \leqslant y \leqslant x, \qquad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x.$$

La Proposition 3.1 est ainsi démontrée. □

3.2. *Théorème de type Bombieri–Vinogradov avec une fonction bien factorisable.* Pour un entier positif k, on définit $\tau_k(n)$ par

$$\tau_k(n) = \sum_{n=n_1n_2\cdots n_k} 1.$$

Une fonction arithmétique $\lambda(q)$ est dite de niveau Q et d'ordre k si

$$\lambda(q) = 0 \quad (q > Q) \quad \text{et} \quad |\lambda(q)| \leqslant \tau_k(q) \quad (q \leqslant Q).$$

On dit que λ est bien factorisable de niveau Q si pour toute décomposition $Q = Q_1Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \geqslant 1$, il existe deux fonctions arithmétiques λ_1, λ_2 de niveaux Q_1, Q_2 et d'ordre k telles que

$$\lambda = \lambda_1 * \lambda_2.$$

Pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $(a,q) = 1$, on définit

$$\pi(x;\ell,a,q) := \sum_{\substack{\ell p\leqslant x\\ \ell p\equiv a \pmod q}} 1, \tag{3.7}$$

pour $\ell = 1$, on retrouve $\pi(x;a,q)$ la fonction de compte des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Le théorème de Bombieri–Vinogradov assure que $\pi(x;a,q)$ est proche de $\mathrm{li}(x)/\varphi(q)$ en moyenne pour $q \leqslant x^{1/2} = (\log x)^A$. Fouvry et Iwaniec [11] puis Fouvry [10] montrent que la borne $q \leqslant x^{1/2}/(\log x)^A$ peut être remplacée par

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

$x^{\theta-\varepsilon}$ (avec $\theta = 9/17$ dans [11] puis $\theta = 17/32$ dans [10]), si on insère un poids bien factorisable. C'est la première fois que la barrière $q \leqslant x^{1/2} = (\log x)^A$ est franchie. Bombieri, Friedlander et Iwaniec [3] obtiennent ensuite un tel résultat avec une borne $q \leqslant x^{4/7-\varepsilon}$. Nous présentons ici une légère généralisation du résultat de [3].

PROPOSITION 3.2. *Soient $a \in \mathbb{Z}^*$, $A > 0$ et $\varepsilon > 0$. Alors pour toute fonction bien factorisable $\lambda(q)$ de niveau Q, la majoration suivante*

$$\sum_{(a,q)=1} \lambda(q) \sum_{\substack{L_1 \leqslant \ell \leqslant L_2 \\ (\ell,q)=1}} \left(\pi(x;\ell,a,q) - \frac{\mathrm{li}(x/\ell)}{\varphi(q)} \right) \ll_{a,A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

ait lieu pour

$$Q = x^{4/7-\varepsilon}, \quad 1 \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant x^{1-\varepsilon}.$$

La constante implicite dépend au plus de a, A et ε.

Démonstration. On remplace d'abord $\pi(t)$ par $\sum_{m \leqslant t} \Lambda(m)$ en utilisant une intégration par parties. Puis en observant que la contribution des n tels que $(n, qP(z)) \neq 1$ est négligeable, on vérifie qu'il suffit de montrer

$$\sum_{(a,q)=1} \lambda(q) \sum_{\substack{L_1 \leqslant \ell \leqslant L_2 \\ (\ell,q)=1}} \left(\sum_{\substack{\ell n \leqslant x \\ \ell n \equiv a \pmod q \\ (n,P(z))=1}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\ell n \leqslant x \\ (n,qP(z))=1}} \Lambda(n) \right)$$
$$\ll_{a,A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A} \tag{3.8}$$

avec $z = \exp(\log x / \log_2 x)$.

Puisque la démonstration est très proche de celle de [3, Theorem 10], nous indiquons les points essentiels et les différences entre les deux démonstrations. Pour cela, on introduit

$$\begin{aligned} &\Delta(L \mid M_1, \dots, M_j \mid N_1, \dots, N_j; q, a) \\ &:= \sum^*_{\substack{\ell m_1 \cdots m_j n_1 \cdots n_j \equiv a \pmod q \\ \ell \in \mathscr{L}, m_i \in \mathscr{M}_i, n_i \in \mathscr{N}_i}} \mu(m_1) \cdots \mu(m_j) \\ &\quad - \frac{1}{\varphi(q)} \sum^*_{\substack{(\ell m_1 \cdots m_j n_1 \cdots n_j, q)=1 \\ \ell \in \mathscr{L}, m_i \in \mathscr{M}_i, n_i \in \mathscr{N}_i}} \mu(m_1) \cdots \mu(m_j), \end{aligned}$$

où $\sum^*$ désigne que la somme est restreinte à des entiers $m_1, \dots, m_j, n_1, \dots, n_j$ sans facteur premier $< z$, et $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}_i$, $\mathscr{N}_i$ sont les intervalles suivants

$$\mathscr{L} := [(1-\Delta)L, L[, \qquad \mathscr{M}_i := [(1-\Delta)M_i, M_i[, \qquad N_i = [(1-\Delta)N_i, N_i[$$

avec

$$LM_1 \cdots M_j N_1 \cdots N_j = x, \qquad \max(M_1, \dots, M_j) < x^{1/7}$$

et $\Delta = (\log x)^{-A_1}$ (A_1 est une constante assez grande dépendant de A).

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Dans la démonstration de [3, Theorem 10], on remplace, pour $j \leqslant J = 7$,

$$\mathscr{E}(M_1, \dots, M_j \mid N_1, \dots, N_j) := \sum_{\substack{q_1 \sim Q \\ (a, q_1 q_2) = 1}} \sum_{q_2 \sim R} \gamma_{q_1} \delta_{q_2} \Delta(M_1, \dots, M_j \mid N_1, \dots, N_j; q_1 q_2, a)$$

par

$$\mathscr{E}(L \mid M_1, \dots, M_j \mid N_1, \dots, N_j) := \sum_{\substack{q_1 \sim Q \\ (a, q_1 q_2) = 1}} \sum_{q_2 \sim R} \gamma_{q_1} \delta_{q_2} \Delta(L \mid M_1, \dots, M_j \mid N_1, \dots, N_j; q_1 q_2, a).$$

On va montrer que

$$\mathscr{E}(L \mid M_1, \dots, M_j \mid N_1, \dots, N_j) \ll x(\log x)^{-A_2} \tag{3.9}$$

pour tout A_2. Notons

$$L = x^{\nu_0}, \qquad M_i = x^{\mu_i}, \qquad N_i = x^{\nu_i}$$

avec

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \mu_j \leqslant \cdots \leqslant \mu_1 \leqslant \tfrac{1}{7}, \qquad 0 \leqslant \nu_j \leqslant \cdots \leqslant \nu_1, \qquad 0 \leqslant \nu_0 < 1 - \varepsilon, \\ \mu_1 + \cdots + \mu_j + \nu_1 + \cdots + \nu_j + \nu_0 = 1. \end{gathered} \tag{3.10}$$

On utilise ensuite un argument combinatoire similaire à [3, Theorem 10]. La différence est qu'on ne peut pas appliquer [3, Theorem 1] et [3, Theorem 2] à $L = x^{\nu_0}$, car on n'a pas toujours $(\ell, P(z)) = 1$ lorsque $\ell \in \mathscr{L}$. Pour surmonter cette difficulté, nous observons tout d'abord que, si $\nu_0 \geqslant \frac{3}{7}$, on peut appliquer le théorème 5 de [3] avec

$$M = L = x^{\nu_0} \geqslant x^{3/7}, \qquad \max(Q, R) \leqslant x^{2/7 - 2\varepsilon}$$

pour obtenir (3.9). Sinon, c'est-à-dire, dans le cas où $\nu_0 < \frac{3}{7}$, on utilise le théorème 1 ou 2 de [3] avec

$$R = x^{-\varepsilon} N, \qquad Q \leqslant x^{4/7 - 4\varepsilon} N^{-1}$$

selon

$$x^{2/7 - \varepsilon} < N < x^{3/7 + \varepsilon} \tag{3.11}$$

ou

$$x^{1/7 - \varepsilon} < N < x^{2/7 + \varepsilon}. \tag{3.12}$$

Si (3.10) a une somme partielle λ de $\mu_1, \dots, \mu_j, \nu_1, \dots, \nu_j$ avec

$$\tfrac{1}{7} \leqslant \lambda \leqslant \tfrac{3}{7}, \tag{3.13}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

on complète la preuve d'après (3.11) ou (3.12). Sinon, on peut supposer qu'il n'y a pas de somme partielle de $\mu_1, \dots, \mu_j, \nu_1, \dots, \nu_j$ de (3.10) dans (3.11) ou (3.12). Ainsi, toutes les μ_i et ν_i avec $\nu_i \leqslant \frac{1}{7}$ donnent un produit η avec

$$\eta < \tfrac{1}{7},$$

d'où l'on peut déduire que

$$\eta + \nu_0 < \tfrac{4}{7}.$$

On a ainsi $\nu_1 \geqslant \frac{3}{7}$. En utilisant [**3**, Theorem 5*] avec

$$M = N_1 = x^{\nu_1} \geqslant x^{3/7}, \qquad \max(Q, R) \leqslant x^{2/7-2\varepsilon},$$

nous terminons la démonstration de la Proposition 3.2. □

Le lemme suivant, dû à Pan *et al* [**18**], sera aussi utile dans la démonstration du Théorème 2.

LEMME 3.3. *Soient* $\alpha \in]0, 1[$ *et* $f(\ell)$ *une fonction arithmétique vérifiant* $|f(\ell)| \leqslant 1$. *Alors pour tout* $A > 0$, *il existe une constante* $B = B(A) > 0$ *telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leqslant x} \left| \sum_{\substack{L_1 < \ell \leqslant L_2 \\ (\ell,q)=1}} f(\ell) \left(\pi(y; \ell, a, q) - \frac{\mathrm{li}(y/\ell)}{\varphi(q)} \right) \right| \ll_{\alpha,A} \frac{x}{(\log x)^A}$$

uniformément pour

$$Q = x^{1/2}/(\log x)^B, \qquad (\log x)^{2B} \leqslant L_1 \leqslant L_2 \leqslant x^{\alpha},$$

où la constante implicite ne dépend que de α *et* A.

§4. *Démonstration du Théorème 1 : cas des n tels que* $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$. Soit $y = x^{\alpha}$ où $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ est un paramètre à choisir plus tard. Il est clair que

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 \geqslant \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ (n \pm 1,\ P(x,y)) > 1}} 1, \tag{4.1}$$

où $S(x, y)$ et $P(x, y)$ sont définis respectivement par (2.5) et (2.1).

Pour $n \leqslant x$ et $z < y$, on a

$$\omega(n; y, z) := \sum_{\substack{z < p \leqslant y \\ p \mid n}} 1 \leqslant \frac{\log x}{\log z}, \tag{4.2}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

d'où

$$\left(\frac{\log x}{\log z}\right)^{-1}\omega(n;\,y,\,z)\begin{cases}\leqslant 1 & \text{si } (n,\,P(z,\,y))>1,\\ =0 & \text{sinon.}\end{cases}\tag{4.3}$$

Ainsi on peut détecter les conditions $(n\pm 1,\,P(x,\,y))>1$ dans la formule (4.1) par (4.3) :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)}} 1 &\geqslant \sum_{n\in S(x,y)}\frac{\omega(n-1;x,y)}{(\log x/\log y)}\cdot\frac{\omega(n+1;x,y)}{(\log x/\log y)}\\ &\geqslant \alpha^2\sum_{\substack{y<p_1\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B\\ p_1\neq p_2}}\ \sum_{\substack{y<p_2\leqslant x\\ n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p_1)\\ n\equiv -1\,(\mathrm{mod}\ p_2)}}\ \sum_{n\in S(x,y)} 1\end{aligned}\tag{4.4}$$

où B est une constante convenable. Pour la somme intérieure du membre de droite, on utilise le théorème des restes chinois. Il existe un entier $a(p_1,\,p_2)$ dépendant de $p_1,\,p_2$ tel que les congruences $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p_1)$, $n\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p_2)$ soient équivalents à $n\equiv a(p_1,\,p_2)\ (\mathrm{mod}\ p_1p_2)$. Pour des commodités d'écriture, on écrit $a=a(p_1,\,p_2)$ dans la suite. On en déduit donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)}} 1 &\geqslant \alpha^2\sum_{\substack{y<p_1\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B\\ p_1\neq p_2}}\ \sum_{\substack{y<p_2\leqslant x\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\ p_1p_2)}}\ \sum_{n\in S(x,y)} 1\\ &=\alpha^2(\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2),\end{aligned}\tag{4.5}$$

où (avec la notation (2.6))

$$\mathcal{S}_1:=\sum_{\substack{y<p_1\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B\\ p_1\neq p_2}}\ \sum_{\substack{y<p_2\leqslant x}}\frac{\Psi_{p_1p_2}(x,\,y)}{\varphi(p_1p_2)},$$

$$\mathcal{S}_2:=\sum_{\substack{y<p_1\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B\\ p_1\neq p_2}}\ \sum_{\substack{y<p_2\leqslant x}}\left(\Psi(x,\,y;\,a,\,p_1p_2)-\frac{\Psi_{p_1p_2}(x,\,y)}{\varphi(p_1p_2)}\right).$$

Pour $\mathcal{S}_2$, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz on obtient

$$\mathcal{S}_2\leqslant\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\tau(q)\left|\Psi(x,\,y;\,a,\,q)-\frac{\Psi_q(x,\,y)}{\varphi(q)}\right|\leqslant(\mathcal{S}_{21}\mathcal{S}_{22})^{1/2},$$

où

$$\mathcal{S}_{21}:=\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\left|\Psi(x,\,y;\,a,\,q)-\frac{\Psi_q(x,\,y)}{\varphi(q)}\right|,$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

$$\mathcal{S}_{22} := \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B\\ \Omega(q)\leqslant 2}} \tau(q)^2\left|\Psi(x,y;a,q)-\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\right|.$$

Ici $\Omega(n)$ est la fonction dénombrant le nombre total des facteurs premiers de n comptés avec leur ordre de multiplicité.

Pour $\mathcal{S}_{22}$ on utilise une majoration triviale :

$$\Psi(x,y;a,q)+\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)} \ll \frac{x}{q}+1,$$

et pour $\mathcal{S}_{21}$ on applique le Lemme 3.2. Cela donne

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &\ll \left(\frac{x}{(\log x)^A}\right)^{1/2}\left\{\sum_{q\leqslant x^{1/2}}\tau(q)^2\left(\frac{x}{q}+1\right)\right\}^{1/2}\\ &\ll \frac{x}{(\log x)^{A/2-3}}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dans $\mathcal{S}_1$ on peut retirer la condition $p_1\neq p_2$ au prix d'une erreur inférieure à :

$$\sum_{y<p\leqslant x^{1/4}}\frac{\Psi_{p^2}(x,y)}{\varphi(p^2)} \ll \sum_{y<p\leqslant x^{1/4}}\frac{\Psi(x,y)}{p^2} \ll \frac{x^{1-\alpha}}{\log x}.$$

On évalue ensuite $\mathcal{S}_1$ à l'aide du Lemme 2.4 sur les entiers friables.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \sum_{\substack{y<p_1\leqslant x\\ p_1p_2\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}}\sum_{y<p_2\leqslant x}\frac{\Psi_{p_1p_2}(x,y)}{\varphi(p_1p_2)}+o(x)\\ &= x\rho\left(\frac{\log x}{\log y}\right)\sum_{y<p_1\leqslant x^{1/2}/y(\log x)^B}\frac{1}{p_1}\sum_{y<p_2\leqslant x^{1/2}/p_1(\log x)^B}\frac{1}{p_2}+o(x)\\ &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{y<p_1\leqslant x^{1/2}/y(\log x)^B}\frac{1}{p_1}\log\left(\frac{\frac12\log x-\log p_1}{\log y}\right)+o(x),\end{aligned}$$

où on a appliqué la formule suivante

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\log_2 x+c_1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

avec $c_1\approx 0{,}261497$ la constante de Meissel–Mertens. Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\int_y^{x^{1/2}/(y(\log x)^B)}\log\left(\frac{\frac12\log x-\log t}{\log y}\right)d\sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p}+o(x)\\ &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\int_y^{x^{1/2}/(y(\log x)^B)}\log\left(\frac{\frac12-(\log t)/(\log x)}{\alpha}\right)\frac{dt}{t\log t}+o(x)\\ &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\alpha\int_1^{1/(2\alpha)-1}\frac{\log t}{\frac12-\alpha t}\,dt+o(x).\end{aligned} \tag{4.7}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

En reportant (4.7) et (4.6) dans (4.5), on déduit que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)}} 1 \geqslant \left\{\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^3\int_1^{1/(2\alpha)-1}\frac{\log t}{\frac{1}{2}-\alpha t}\,dt+o(1)\right\}x. \quad (4.8)$$

À l'aide de *Mathematica 9.0*, on peut trouver la constante $1{,}063\times 10^{-7}$ avec $\alpha\approx\frac{1}{4{,}6}$. La preuve du Théorème 1 est complète.

§5. *Démonstration du Théorème 1 : cas des n tels que* $P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1)$. Soient α,β,γ tels que

$$\tfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1, \qquad 1-\alpha\leqslant\beta<\gamma<\tfrac{1}{3} \quad (5.1)$$

trois paramètres à choisir plus tard. Étant donnés un entier m et deux nombres premiers distincts p_1 et p_2 vérifiant

$$1\leqslant m\leqslant x^{1-\alpha}, \qquad x^\beta<p_1,p_2\leqslant x^\gamma, \quad (5.2)$$

on considère le système d'équations de congruences :

$$mp-1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ p_1), \qquad mp+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ p_2). \quad (5.3)$$

On remarque que les conditions (5.1) et (5.2) garantissent que $(p_1p_2,m)=1$ et $(m,p)\to mp$ est injectif. D'après le théorème chinois, il existe $b<p_1p_2$ (dépendant de m) tel que

$$p\equiv b\,(\mathrm{mod}\ p_1p_2). \quad (5.4)$$

Pour ces m et $p>x^\alpha$, on peut donc déduire que

$$P^+(mp-1)\leqslant\max\{p_1,x/p_1\}\leqslant\max\{x^{1/3},x^{1-\beta}\}\leqslant x^\alpha<p.$$

De même,

$$P^+(mp+1)\leqslant\max\{p_2,x/p_2\}<p.$$

Ce qui implique

$$P^+(mp-1)<P^+(mp)>P^+(mp+1).$$

Ainsi, en reprenant les poids $\omega(n;y,z)$ définis par (4.2), on a d'après (4.3),

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1)\\ x^\alpha<P^+(n)\leqslant x}} 1$$
$$\geqslant \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{x^\alpha<p\leqslant x/m} \frac{\omega(mp-1;x^\gamma,x^\beta)}{(\log x/\log x^\beta)}\cdot\frac{\omega(mp+1;x^\gamma,x^\beta)}{(\log x/\log x^\beta)}$$
$$=\beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{x^\alpha<p\leqslant x/m} \sum_{\substack{x^\beta<p_1\leqslant x^\gamma\\ mp-1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_1)}} \sum_{\substack{x^\beta<p_2\leqslant x^\gamma\\ mp+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_2)}} 1$$
$$=\beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta<p_1,p_2\leqslant x^\gamma\\ p_1\neq p_2}} \sum_{\substack{x^\alpha<p\leqslant x/m\\ mp-1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_1)\\ mp+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_2)}} 1.$$

D'après (5.3) et (5.4), on a donc

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1)\\ x^\alpha<P^+(n)\leqslant x}} 1 \geqslant \beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta<p_1,p_2\leqslant x^\gamma\\ p_1\neq p_2}} \sum_{\substack{x^\alpha<p\leqslant x/m\\ p\equiv b \,(\mathrm{mod}\ p_1p_2)}} 1$$
$$=\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2, \tag{5.5}$$

où

$$\mathbb{S}_1:=\beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta<p_1,p_2\leqslant x^\gamma\\ p_1\neq p_2}} \frac{\pi(x/m)-\pi(x^\alpha)}{\varphi(p_1p_2)},$$
$$\mathbb{S}_2:=\beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta<p_1,p_2\leqslant x^\gamma\\ p_1\neq p_2}} \left\{\left(\pi(x/m;b,p_1p_2)-\frac{\pi(x/m)}{\varphi(p_1p_2)}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\pi(x^\alpha;b,p_1p_2)-\frac{\pi(x^\alpha)}{\varphi(p_1p_2)}\right)\right\}.$$

On majore $\mathbb{S}_2$ en utilisant le théorème de Bombieri–Vinogradov [**2**, **24**] qui est le cas du Lemme 3.3 avec $l=1$. On impose une condition sur γ et α :

$$2\gamma<\frac{\alpha}{2}. \tag{5.6}$$

En effet, on peut étendre la condition (5.6) à $2\gamma<\frac{1}{2}$ en utilisant le théorème de Bombieri–Vinogradov pour la convolution $\Lambda * \mathbb{1}_{[1,x^{1-\alpha}]}$, où

$$\mathbb{1}_{[1,x^{1-\alpha}]}(n)=\begin{cases}1 & \text{si } 1\leqslant n\leqslant x^{1-\alpha},\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

grâce à une remarque du rapporteur. Un même argument est aussi valable pour la condition (7.1) ci-dessous. On ne poursuit pas ici un gain quantitatif, car il est petit. On en déduit, en combinant les conditions (5.1) et (5.6)

$$\frac{4}{5}<\alpha<1, \qquad 1-\alpha<\beta<\gamma<\frac{\alpha}{4}. \tag{5.7}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

En procédant de manière similaire à l'estimation de $\mathcal{S}_2$ dans (4.6), c'est-à-dire, à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz et le théorème de Bombieri–Vinogradov, on obtient pour tout $A > 0$

$$\mathbb{S}_2 \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{5.8}$$

Puis pour $\mathbb{S}_1$, on utilise le théorème des nombres premiers :

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_1 &= \beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \left(\pi\left(\frac{x}{m}\right) - \pi(x^\alpha)\right) \sum_{\substack{x^\beta < p_1, p_2 \leqslant x^\gamma \\ p_1\neq p_2}} \sum \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} \\
&= \beta^2 \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \frac{x+o(x)}{m\log(x/m)} \sum_{x^\beta < p_1, p_2 \leqslant x^\gamma} \sum \frac{1}{p_1 p_2} + O\left(\frac{x^{1-\beta}}{\log x} + \sum_{m\leqslant x^{1-\alpha}} \frac{x^\alpha}{\log x}\right) \\
&= x\left(\beta \log\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \int_1^{x^{1-\alpha}} \frac{dt}{t(\log x - \log t)} + o(x) \\
&= x\left(\beta \log\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \log\frac{1}{\alpha} + o(x).
\end{aligned}$$

À l'aide de *Mathematica 9.0*, on obtient

$$\widetilde{s_1} := \max_{\substack{\frac{4}{5}<\alpha<1 \\ 1-\alpha<\beta<\gamma<\alpha/4}} \left(\beta \log\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \log\frac{1}{\alpha} = \left(\beta' \log\frac{\gamma'}{\beta'}\right)^2 \log\frac{1}{\alpha'} > 7\times 10^{-4} \tag{5.9}$$

avec

$$\alpha' \approx 0{,}895, \qquad \beta' \approx 0{,}105, \qquad \gamma' \approx 0{,}22375.$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1) \\ x^{0{,}895}<P^+(n)\leqslant x}} 1 > 7\times 10^{-4} x. \tag{5.10}$$

De manière similaire, on peut montrer que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1) \\ x^{0{,}858}<P^+(n)\leqslant x^{0{,}895}}} 1 > 1{,}44\times 10^{-4} x \tag{5.11}$$

et

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1) \\ x^{0{,}835}<P^+(n)\leqslant x^{0{,}858}}} 1 > 4\times 10^{-5} x. \tag{5.12}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

En combinant les minorantions (5.10), (5.11) et (5.12), on obtient finalement l'estimation

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)<P^+(n)>P^+(n+1)\\ x^{0,835}<P^+(n)\leqslant x}} 1 > 8{,}84\times 10^{-4}x.$$

Ce qui implique le résultat.

§6. *Démonstration du Théorème 3.* Sans perte de la généralité, on peut supposer que $j_0 = 0$, c'est-à-dire,

$$P^+(n) = \min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j).$$

Soient $y := x^\alpha$ avec

$$0 < \alpha < \frac{1}{2(J-1)}.$$

La méthode est analogue à la preuve de (1.6). On considère les entiers y-friables n tels que $P^+(n+j) > y$:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)=\min_{0\leqslant j\leqslant J-1}P^+(n+j)}} 1 &\geqslant \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ (n+j,P(x,y))>1\\ \text{for all } 1\leqslant j\leqslant J-1}} 1\\ &\geqslant \sum_{n\in S(x,y)} \frac{\omega(n+1;x,y)}{(\log x/\log y)}\cdots\frac{\omega(n+J-1;x,y)}{(\log x/\log y)}\\ &\geqslant \alpha^{J-1}\sum_{y<p_1\leqslant Y}\cdots\sum_{\substack{y<p_{J-1}\leqslant Y\\ p_i\neq p_j\ (i\neq j)}}\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ n\equiv -j\ (\mathrm{mod}\ p_j)\\ j=1,2,\ldots,J-1}} 1,\end{aligned}$$

où $Y := (x^{1/2}/(\log x)^B)^{1/(J-1)}$.

D'après le théorème des restes chinois, il existe un entier a tel que les congruences de la somme intérieur du membre de droite s'écrivent sous la forme $n \equiv a(\mathrm{mod}\ p_1\cdots p_{J-1})$ car $p_1,\ldots,p_{J-1}$ sont premiers entre eux. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)=\min_{0\leqslant j\leqslant J-1}P^+(n+j)}} 1 &\geqslant \alpha^{J-1}\sum_{y<p_1\leqslant Y}\cdots\sum_{\substack{y<p_{J-1}\leqslant Y\\ p_i\neq p_j\ (i\neq j)}}\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\ p_1\cdots p_{J-1})}} 1\\ &= \alpha^{J-1}(\mathcal{S}_3+\mathcal{S}_4),\end{aligned} \tag{6.1}$$

où

$$\mathcal{S}_3 := \sum_{y<p_1\leqslant Y}\cdots\sum_{\substack{y<p_{J-1}\leqslant Y\\ p_i\neq p_j\ (i\neq j)}}\frac{\Psi_{p_1\cdots p_{J-1}}(x,y)}{\varphi(p_1\cdots p_{J-1})},$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

$$\mathcal{S}_4 := \sum_{\substack{y<p_1\leqslant Y\\ p_i\neq p_j\ (i\neq j)}} \cdots \sum_{y<p_{J-1}\leqslant Y} \left(\Psi(x,y;a,p_1\cdots p_{J-1}) - \frac{\Psi_{p_1\cdots p_{J-1}}(x,y)}{\varphi(p_1\cdots p_{J-1})}\right).$$

La somme $\mathcal{S}_4$ se majore de la même façon que $\mathcal{S}_2$, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et le Lemme 3.2 :

$$\mathcal{S}_4 \ll x(\log x)^{-A}. \tag{6.2}$$

Pour $\mathcal{S}_3$, la condition $p_i \neq p_j$ $(i \neq j)$ peut être supprimée, car la contribution des puissances de nombres premiers est négligeable (puisque tous les $p_j > y$). On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_3 &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \sum_{y_1<p_1\leqslant Y_1} \frac{1}{p_1} \cdots \sum_{y_1<p_{J-1}\leqslant Y_1} \frac{1}{p_{J-1}} + o(x)\\ &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\log\frac{1}{2\alpha(J-1)}\right)^{J-1} + o(x).\end{aligned} \tag{6.3}$$

On peut donc déduire que, par (6.1) (6.2) et (6.3)

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)=\min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)}} 1 \geqslant \{f(J,\alpha)x + o(1)\}x$$

où

$$f(J,\alpha) := \rho(\alpha^{-1})(-\alpha\log(2\alpha(J-1)))^{J-1}.$$

La fonction $\alpha \mapsto f(J,\alpha)$ est continue et strictement positive sur $]0, 1/(2(J-1))[$ et

$$\lim_{\alpha\to 0^+} f(J,\alpha) = 0, \qquad \lim_{\alpha\to(2(J-1))^{-1}-} f(J,\alpha) = 0.$$

Il existe donc un $\alpha_0 \in]0, 1/(2(J-1))[$ tel que

$$C_3(J) := \max_{0<\alpha<1/(2(J-1))} f(J,\alpha) = f(J,\alpha_0) > 0.$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.

§7. *Démonstration du Théorème 4.* Comme (1.6) du Théorème 1 et le Théorème 3, la démonstration du Théorème 4 suit le même fil que celle de (1.7) du Théorème 1.

Pour $J \in \mathbb{Z}$, $J \geqslant 3$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $j_0 = 0$, i.e.

$$P^+(n) = \max_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j).$$

Soient α, β, γ tels que

$$\frac{2J-2}{2J-1} < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad 1-\alpha \leqslant \beta < \gamma < \frac{\alpha}{2(J-1)} \tag{7.1}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

trois paramètres à choisir plus tard. Étant donnés un entier m et $J-1$ nombres premiers distincts $p_1, \dots, p_{J-1}$ vérifiant

$$1 \leqslant m \leqslant x^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad x^{\beta} < p_1, p_2, \dots, p_{J-1} \leqslant x^{\gamma}, \tag{7.2}$$

on considère le système d'équations de congruences :

$$\begin{aligned} mp + 1 &\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_1), \\ mp + 2 &\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_2), \\ &\vdots \\ mp + J - 1 &\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p_{J-1}). \end{aligned} \tag{7.3}$$

En remarquant que la condition (7.1) garantit que $p_j \nmid m$ pour $1 \leqslant j \leqslant J-1$, par le théorème chinois et (7.3), il existe $b < p_1 p_2 \cdots p_{J-1}$ tel que (7.3) soit équivalent à

$$p \equiv b \,(\mathrm{mod}\ p_1 p_2 \cdots p_{J-1}).$$

Pour ces m et $p > x^{\alpha}$, il est facile de voir que

$$P^+(mp) = \max_{0 \leqslant j \leqslant J-1} P^+(mp + j).$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^+(n) = \max_{0 \leqslant j \leqslant J-1} P^+(n+j)}} 1 \\ &\geqslant \sum_{m \leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{x^{\alpha} < p \leqslant x/m} \prod_{1 \leqslant j \leqslant J-1} \frac{\omega(mp + j; x^{\gamma}, x^{\beta})}{(\log x / \log x^{\beta})} \\ &= \beta^{J-1} \sum_{m \leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^{\beta} < p_1, \dots, p_{J-1} \leqslant x^{\gamma} \\ p_1, \dots, p_{J-1} \text{ sont distincts}}} \cdots \sum_{\substack{x^{\alpha} < p \leqslant x/m \\ p \equiv b \,(\mathrm{mod}\ p_1 p_2 \cdots p_{J-1})}} 1. \end{aligned}$$

Comme pour (6.3), la condition que $p_1, \dots, p_{J-1}$ soient distincts peut être supprimée puisque tous les $p_j > x^{\beta}$. En remarquant que $p_1 \cdots p_{J-1} \leqslant x^{\alpha/2}$, on peut appliquer le théorème de Bombieri–Vinogradov (voir le Lemme 3.3 ci-dessus)

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^+(n) = \max_{0 \leqslant j \leqslant J-1} P^+(n+j)}} 1 \\ &\geqslant \beta^{J-1} \sum_{m \leqslant x^{1-\alpha}} \sum_{x^{\beta} < p_1, \dots, p_{J-1} \leqslant x^{\gamma}} \cdots \sum \frac{\pi(x/m) - \pi(x^{\alpha})}{\varphi(p_1 p_2 \cdots p_{J-1})} + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right) \\ &= x \left(\beta \log \frac{\gamma}{\beta}\right)^{J-1} \log \frac{1}{\alpha} + o(x). \end{aligned} \tag{7.4}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Il est clair que la fonction continue $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\beta \log(\gamma/\beta))^{J-1} \log(1/\alpha)$ est strictement positive et on peut prendre

$$C_4(J) := \max_{(\alpha,\beta,\gamma) \text{ vérifient (7.1)}} \left(\beta \log \frac{\gamma}{\beta}\right)^{J-1} \log \frac{1}{\alpha} > 0,$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 4.

§8. *Démonstration du Théorème 2 avec* $0 < \alpha \leqslant 1/2$. Soient $y = x^\alpha$ et $z = x^\beta$ avec $0 < \beta < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Comme précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P_y^+(n)<P_y^+(n+1)}} 1 &\geqslant \sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n+1,P(y,z))>1}} 1\\ &\geqslant \sum_{n\in S(x;y,z)} \frac{\omega(n+1;y,z)}{(\log x/\log z)}\\ &= \beta \sum_{z<p\leqslant y} \sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ n\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)}} 1\\ &= \beta(S_1 + S_2), \end{aligned} \tag{8.1}$$

où

$$S_1 := \sum_{z<p\leqslant y} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n,p)=1}} 1$$

$$S_2 := \sum_{z<p\leqslant y} \left(\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ n\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n,p)=1}} 1 \right).$$

Pour S_1, en appliquant le Lemme 2.2 avec $u = 1/\alpha$ et $\lambda = \beta/\alpha$, on obtient pour $\alpha + \beta \leqslant 1$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{z<p\leqslant y} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{n\in S(x;y,z)} 1\\ &= \sum_{z<p\leqslant y} \frac{1}{p-1} \cdot x\vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\}\\ &= x\vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + o(x). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Pour S_2, si $y \leqslant x^{1/2}/(\log x)^B$, où $B = B(A)$ est une grande constante, on a en appliquant la Proposition 3.1

$$S_2 \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{8.3}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

De plus, si $x^{1/2}/(\log x)^B < y \leqslant x^{1/2}$, une estimation triviale permet d'obtenir

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{x^{1/2}/(\log x)^B < p \leqslant x^{1/2}} \Bigg| \sum_{\substack{n \in S(x;y,z) \\ n \equiv -1 \pmod p}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in S(x;y,z) \\ (n,p)=1}} 1 \Bigg| + \frac{x}{(\log x)^A} \\ &\ll x \sum_{x^{1/2}/(\log x)^B < p \leqslant x^{1/2}} \frac{1}{p} + \frac{x}{(\log x)^A} \\ &\ll \frac{x \log_2 x}{\log x}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

En reportant (8.2), (8.3) et (8.4) dans (8.1), on obtient pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geqslant C(\alpha)x + o(x), \tag{8.5}$$

où $C(\alpha)$ est définie par

$$C(\alpha) := \max_{0<\beta<\alpha} \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)\beta \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > 0 \quad (0 < \alpha \leqslant 1/2) \tag{8.6}$$

et ϑ_0 est définie par (2.3). Ce qui achève la démonstration du Théorème 2 avec $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

§9. *Démonstration du Théorème 2 avec* $1/2 < \alpha \leqslant 1$.

9.1. *Point de départ.* Pour $y = x^\alpha$ avec $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ et $1 - \alpha \leqslant c \leqslant \frac{1}{2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &= \sum_{\substack{n \leqslant x \\ y \geqslant P^+(n+1) > x^{1-c}}} 1 \\ &\quad - \sum_{\substack{n \leqslant x \\ y \geqslant P^+(n) > P^+(n+1) > x^{1-c}}} 1 + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1) \leqslant x^{1-c}}} 1 \\ &=: \mathscr{S}_A - \mathscr{S}_B + \mathscr{S}_C. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Il reste à maintenant minorer $\mathscr{S}_A$, $\mathscr{S}_C$ et majorer $\mathscr{S}_B$.

9.2. *Estimation de la somme* $\mathscr{S}_A$. Pour $\mathscr{S}_A$, d'après le Lemme 2.3, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_A &= x\left\{\rho\left(\frac{\log x}{\log y}\right) - \rho\left(\frac{\log x}{\log x^{1-c}}\right)\right\} + o(x) \\ &= x\left\{\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{1}{1-c}\right)\right\} + o(x) \\ &= x \log\left(\frac{\alpha}{1-c}\right) + o(x) \end{aligned} \tag{9.2}$$

pour $\frac{1}{2} \leqslant 1 - c \leqslant \alpha \leqslant 1$, où on a utilisé le fait que $\rho(u) = 1 - \log u$ $(1 \leqslant u \leqslant 2)$.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

9.3. *Estimation de la somme $\mathscr{S}_B$.* Pour $\mathscr{S}_B$, on utilise le crible de Rosser–Iwaniec comme l'auteur l'a fait dans [25]. On observe tout d'abord que, $\mathscr{S}_B$ compte le nombre des entiers n tels que $n = ap = bp' - 1$, avec $x^{1-c} < p' < p \leqslant y$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_B &\leqslant |\{n \leqslant x : n = ap = bp' - 1, x^{1-\alpha} < a < b \leqslant x^c\}| + o(x)\\ &\leqslant \sum_{x^{1-\alpha} < b \leqslant x^c} |\{n \in \mathscr{A}(b) : n \text{ est premier}\}| + o(x),\end{aligned}$$

où

$$\mathscr{A}(b) := \left\{\frac{ap+1}{b} : ap \leqslant x, x^{1-\alpha} < a < b, ap + 1 \equiv 0 \pmod b\right\}.$$

On prend $\mathcal{P} = \{p : p \text{ est premier}\}$, et on déduit que, pour $b \leqslant x^c$ et $d \mid P(z) := \prod_{p<z} p$, où z sera explicité plus tard,

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}_d(b)| &= \left|\left\{\frac{ap+1}{b} : ap \leqslant x, x^{1-\alpha} < a < b, ap + 1 \equiv 0 \pmod{bd}\right\}\right|\\ &= \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b\\ (a,bd)=1}} \frac{\operatorname{li}(x/a)}{\varphi(bd)} + \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b\\ (a,bd)=1}} E(x/a; -\overline{a}, bd), \qquad (9.3)\end{aligned}$$

où

$$E(x; a, q) := \pi(x; a, q) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(q)}, \qquad a\overline{a} \equiv 1 \pmod{bd}.$$

Pour la première somme du membre de droite de (9.3), en utilisant le théorème des nombres premiers et la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b\\ (a,bd)=1}} \frac{\operatorname{li}(x/a)}{\varphi(bd)}\\ &= \frac{1}{\varphi(bd)} \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b\\ (a,bd)=1}} \frac{x}{a \log(x/a)} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}\\ &= \{1 + o(1)\}\frac{x}{\varphi(bd)} \sum_{x^{1-\alpha} < a < b} \frac{1}{a \log(x/a)} \sum_{q \mid (a,bd)} \mu(q)\\ &= \{1 + o(1)\}\frac{x}{\varphi(bd)} \sum_{q \mid bd} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{x^{1-\alpha} < aq < b} \frac{1}{a \log(x/aq)}\\ &= \{1 + o(1)\}\frac{x}{\varphi(bd)} \sum_{q \mid bd} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{\max\{1, x^{1-\alpha}/q\} < a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)}. \qquad (9.4)\end{aligned}$$

Désignons par $\mathscr{S}(bd)$ la double somme de droite. Pour le cas $\alpha > 1 - (9 \log\log x)/\log x$, i.e. α proche de 1, on a $x^{1-\alpha} < (\log x)^9$ et on découpe la

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

somme sur q dans (9.4) en trois parties :

$$\mathscr{S}(bd) = \mathscr{S}_1(bd) + \mathscr{S}_2(bd) + O\Big(\frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\Big), \tag{9.5}$$

où

$$\mathscr{S}_1(bd) := \sum_{q|bd, q\leqslant x^{1-\alpha}} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{x^{1-\alpha}/q<a<b/q} \frac{1}{a\log(x/aq)},$$
$$\mathscr{S}_2(bd) := \sum_{q|bd, x^{1-\alpha}<q\leqslant(\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{1<a<b/q} \frac{1}{a\log(x/aq)},$$

et nous avons déjà utilisé l'estimation triviale :

$$\sum_{q|bd, q>(\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{1<a<b/q} \frac{1}{a\log(x/aq)} \ll \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}.$$

Pour $\mathscr{S}_1(bd)$ et $\mathscr{S}_2(bd)$, on utilise une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_1(bd) &= \sum_{\substack{q|bd\\ q\leqslant x^{1-\alpha}}} \frac{\mu(q)}{q}\Big\{\int_{x^{1-\alpha}/q}^{b/q} \frac{dt}{t\log(x/tq)} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\\ &= \sum_{\substack{q|bd\\ q\leqslant x^{1-\alpha}}} \frac{\mu(q)}{q}\log\Big(\frac{\alpha\log x}{\log(x/b)}\Big) + O\Big(\frac{\log\log x}{\log x}\Big)\end{aligned} \tag{9.6}$$

compte tenu de la condition $x^{1-\alpha} < (\log x)^9$. On a ensuite pour $\mathscr{S}_2(bd)$

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_2(bd) &= \sum_{\substack{q|bd\\ x^{1-\alpha}<q\leqslant(\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q}\Big\{\int_1^{b/q} \frac{dt}{t\log(x/tq)} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\\ &= \sum_{\substack{q|bd\\ x^{1-\alpha}<q\leqslant(\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q}\Big\{\log\Big(\frac{\alpha\log(x/q)}{\log(x/b)}\Big) + \log\Big(\frac{1}{\alpha}\Big) + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}\\ &= \sum_{\substack{q|bd\\ x^{1-\alpha}<q\leqslant(\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q}\Big\{\log\Big(\frac{\alpha\log x}{\log(x/b)}\Big) + O\Big(\frac{\log\log x}{\log x}\Big)\Big\}\\ &= \sum_{\substack{q|bd\\ x^{1-\alpha}<q\leqslant(\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q}\log\Big(\frac{\alpha\log x}{\log(x/b)}\Big) + O\Big(\frac{(\log\log x)^2}{\log x}\Big).\end{aligned} \tag{9.7}$$

En reportant (9.6) et (9.7) dans (9.5), on obtient pour $\alpha > 1-(9\log\log x)/\log x$

$$\mathscr{S}(bd) = \sum_{\substack{q|bd\\ q\leqslant(\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q}\log\Big(\frac{\alpha\log x}{\log(x/b)}\Big) + O\Big(\frac{(\log\log x)^2}{\log x} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\Big)$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

$$= \sum_{q\mid bd} \frac{\mu(q)}{q} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log x} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right)$$
$$= \frac{\varphi(bd)}{bd} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log x} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right). \tag{9.8}$$

De façon similaire, on a la même estimation pour $\alpha \leqslant 1 - (9\log\log x)/\log x$. Ainsi, la formule (9.4) est estimée par

$$\sum_{\substack{x^{1-\alpha}<a<b\\(a,bd)=1}} \frac{\mathrm{li}(x/a)}{\varphi(bd)} = \{1+o(1)\}\frac{x}{\varphi(bd)}\mathscr{S}(bd)$$
$$= \frac{x}{bd}\left\{\log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + o(1)\right\} + O\left(\frac{x\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9}\right). \tag{9.9}$$

Compte tenu de (9.3) et (9.9), on en déduit que

$$|\mathscr{A}_d(b)| = \frac{w(d)}{d}X + r(\mathscr{A}(b), d)$$

avec

$$w(d) = 1, \qquad X = \frac{x}{b}\left\{\log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + o(1)\right\},$$
$$r(\mathscr{A}(b), d) = \sum_{\substack{x^{1-\alpha}<a<b\\(a,bd)=1}} E(x/a; -\overline{a}, bd) + O\left(\frac{x\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9}\right).$$

On peut donc appliquer le Lemme 2.1 avec $D = z^2 = x^{4/7-\varepsilon}/b$ et obtenir

$$S(\mathscr{A}(b); \mathcal{P}, z) \leqslant \{1+o(1)\}\frac{2X}{\log(x^{4/7-\varepsilon}/b)} + \sum_{\ell<L}\sum_{d<D, d\mid P(z)} \lambda_\ell^+(d)\, r(\mathscr{A}(b), d),$$

où $L := \exp(8/\varepsilon^3)$ et on a utilisé la formule de Mertens

$$V(z) = \prod_{p<z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{2\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log(x^{4/7-\varepsilon}/b)}\{1+o(1)\}.$$

Compte tenu de l'évaluation

$$|\{n \in \mathscr{A}(b) : n \text{ est premier}\}| \leqslant S(\mathscr{A}(b); \mathcal{P}, z) + z,$$

on obtient

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

$$\mathscr{S}_B \leqslant \sum_{x^{1-\alpha}<b\leqslant x^c} (S(\mathscr{A}(b);\mathcal{P},z)+z)$$
$$\leqslant \{1+o(1)\}\mathscr{S}_{B1}+\mathscr{S}_{B2}+\mathscr{S}_{B3}+O(x(\log x)^{-1}), \tag{9.10}$$

où

$$\mathscr{S}_{B1} := \sum_{x^{1-\alpha}<b\leqslant x^c} \frac{2x}{b\log(x^{4/7-\varepsilon}/b)} \log\left(\frac{\alpha\log x}{\log(x/b)}\right),$$
$$\mathscr{S}_{B2} := \sum_{\ell<L} \sum_{x^{1-\alpha}<b\leqslant x^c} \sum_{\substack{d<D\\ d\mid P(z)}} \lambda_\ell^+(d) \sum_{\substack{x^{1-\alpha}<a<b\\ (a,bd)=1}} E(x/a;-\overline{a},bd),$$
$$\mathscr{S}_{B3} := \sum_{\ell<L} \sum_{x^{1-\alpha}<b\leqslant x^c} \sum_{\substack{d<D\\ d\mid P(z)}} \lambda_\ell^+(d)\cdot O\left(\frac{x\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9}\right).$$

Pour évaluer $\mathscr{S}_{B3}$, on utilise l'estimation standard $\sum_{m\leqslant x}\tau(m)^2/\varphi(m) \ll (\log x)^4$ et on obtient

$$\mathscr{S}_{B3} \ll \frac{x}{(\log x)^9} \sum_{m\leqslant x^{4/7}} \frac{\tau(m)^2}{\varphi(m)} \ll \frac{x}{(\log x)^5} \tag{9.11}$$

qui est admissible.

Nous allons majorer $\mathscr{S}_{B2}$ à l'aide de la Proposition 3.2. Pour cela, écrivons d'abord,

$$\mathscr{S}_{B2} = \sum_{\ell<L}\sum_{\mathcal{B}}\sum_{\mathcal{B}/2<b\leqslant\mathcal{B}}\sum_{\substack{d<D\\ d\mid P(z)}} \lambda_\ell^+(d)\left\{\sum_{\substack{x^{1-\alpha}<a<b\\ (a,bd)=1}}\left(\pi(x;a,-1,bd)-\frac{\mathrm{li}(x/a)}{\varphi(bd)}\right)\right\}.$$

De plus, on impose une condition sur c

$$c\leqslant 2/7-\varepsilon$$

telle que

$$x^c < D = x^{4/7-\varepsilon}/b.$$

Désignons la fonction λ_ℓ par

$$\lambda_\ell(q) := \sum_{\substack{\mathcal{B}/2<b\leqslant\mathcal{B}\\ bd=q}} \sum_{d<D,\, d\mid P(z)} \mathbb{1}_{]\mathcal{B}/2,\mathcal{B}]}(b)\,\lambda_\ell^+(d), \tag{9.12}$$

où

$$\mathbb{1}_{]\mathcal{B}/2,\mathcal{B}]}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{B}/2 < b \leqslant \mathcal{B},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Pour utiliser la Proposition 3.2, il faut démontrer que $\lambda_\ell(q)$ est bien factorisable de niveau $Q = \mathcal{B}D$. Pour toute décomposition $x^{4/7-\varepsilon} = \mathcal{B}D = Q_1Q_2$, Q_1, $Q_2 \geqslant 1$, compte tenu de $\mathcal{B} \leqslant D$, il existe un $i \in \{1, 2\}$ tel que $Q_i \leqslant x^{2/7-\varepsilon} \leqslant D$. Sans perte de la généralité, on peut supposer que $Q_1 \leqslant D$. Puisque λ_ℓ^+ est une fonction bien factorisable de niveau D, il existe deux fonctions arithmétiques λ_1^+ de niveau Q_1 et λ_2^+ de niveau D/Q_1 telles que

$$\lambda_\ell^+ = \lambda_1^+ * \lambda_2^+.$$

Ainsi, on peut trouver deux fonctions arithmétiques λ_1^+ de niveau Q_1 et $\lambda_2^+ * \mathbb{1}_{]\mathcal{B}/2,\mathcal{B}]}$ de niveau $Q_2 = (D/Q_1) \cdot \mathcal{B}$ telles que

$$\lambda = \lambda_1^+ * (\lambda_2^+ * \mathbb{1}_{]\mathcal{B}/2,\mathcal{B}]}).$$

Cela montre que λ est une fonction bien factorisable de niveau $\mathcal{B}D = x^{4/7-\varepsilon}$. En appliquant la Proposition 3.2 avec $\lambda(q)$ définie par (9.12) et $(L_1, L_2, a, \ell) = (x^{1-\alpha}, b, -1, a)$, on obtient

$$\sum_{\mathcal{B}/2<b\leqslant\mathcal{B}} \sum_{\substack{d<D\\ d|P(z)}} \lambda_\ell^+(d) \left\{ \sum_{\substack{x^{1-\alpha}<a<b\\ (a,bd)=1}} \left(\pi(x; a, -1, bd) - \frac{\mathrm{li}(x/a)}{\varphi(q)}\right)\right\} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

D'où

$$\mathscr{S}_{B2} \ll \frac{x}{\log x}. \tag{9.13}$$

Pour $\mathscr{S}_{B1}$, en utilisant une intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{B1} &= 2x\{1 + o(1)\} \int_{x^{1-\alpha}}^{x^c} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/t)}\right) \frac{dt}{t \log(x^{4/7-\varepsilon}/t)} \\ &= x\left\{2 \int_{1-\alpha}^{c} \log\left(\frac{\alpha}{1-t}\right) \frac{dt}{4/7-t} + o_{c,\varepsilon,\alpha}(1)\right\}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

En reportant (9.13) et (9.14) dans (9.10), on arrive à l'inégalité

$$\mathscr{S}_B \leqslant x\left\{2 \int_{1-\alpha}^{c} \log\left(\frac{\alpha}{1-t}\right) \frac{dt}{4/7-t} + o_{c,\varepsilon,\alpha}(1)\right\} \tag{9.15}$$

avec

$$0 < c \leqslant \tfrac{2}{7} - \varepsilon, \qquad 1 - c \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

De manière similaire, en utilisant le Lemme 3.3 à la place de la Proposition 3.2, on peut montrer

$$\mathscr{S}_B \leqslant x\left\{2 \int_{1-\alpha}^{c} \log\left(\frac{\alpha}{1-t}\right) \frac{dt}{1/2-t} + o_{c,\varepsilon,\alpha}(1)\right\} \tag{9.16}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

avec

$$\tfrac{2}{7} - \varepsilon < c < \tfrac{1}{2}, \qquad 1 - c \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

9.4. *Estimation de la somme $\mathscr{S}_C$.* En vue de traiter $\mathscr{S}_C$, on a tout d'abord pour B assez grand

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_C := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P_y^+(n)<P_y^+(n+1)\leqslant x^{1-c}}} 1 &\geqslant \sum_{\substack{n\in S(x;y,x^\delta)\\ (n+1,\,P(x^{1-c},x^\delta))>1}} 1\\ &\geqslant \sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ (n+1,\,P(x^{1/2}/(\log x)^B,x^\delta))>1}} 1\end{aligned}$$

où $\frac{1}{2} \leqslant 1 - c < \alpha \leqslant 1$, δ est un paramètre satisfaisant $c \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}$. On rappelle la définition de $\omega(n+1;\, y,\, y_1)$ dans (4.2) et obtient

$$\omega(n+1;\, x^{1/2}/(\log x)^B,\, x^\delta) \leqslant \frac{\log x}{\log x^\delta} = \frac{1}{\delta},$$

d'où

$$\delta\omega(n+1;\, x^{1/2}/(\log x)^B,\, x^\delta) \begin{cases} \leqslant 1 & \text{si } \Big(n+1,\, \displaystyle\prod_{x^\delta < p \leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} p\Big) > 1,\\ = 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{9.17}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_C &\geqslant \delta \sum_{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)} \omega(n+1;\, x^{1/2}/(\log x)^B,\, x^\delta)\\ &= \delta \sum_{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)} \sum_{\substack{p\mid n+1\\ x^\delta < p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}} 1\\ &= \delta \sum_{x^\delta < p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ n\equiv -1 \pmod p}} 1\\ &= \delta(\mathscr{S}_{C1} + \mathscr{S}_{C2}),\end{aligned} \tag{9.18}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{C1} &:= \sum_{x^\delta < p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ (n,p)=1}} 1,\\ \mathscr{S}_{C2} &:= \sum_{x^\delta < p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B} \Big(\sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ n\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ (n,p)=1}} 1\Big).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Pour évaluer $\mathscr{S}_{C2}$, on déduit de la Proposition 3.1 que

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{C2} &\ll \sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\Bigg|\sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ n\equiv -1 \pmod q}} 1-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\in S(x;x^\alpha,x^\delta)\\ (n,q)=1}} 1\Bigg|\\ &\ll x(\log x)^{-A} \end{aligned} \tag{9.19}$$

pour tout $A>0$.

Il reste à évaluer $\mathscr{S}_{C1}$. On utilise le Lemme 2.2 sur les entiers sans facteur premier dans un intervalle donné.

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{C1} &= \sum_{x^\delta<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\frac{1}{p-1}\cdot\Psi_0(x;x^\alpha,x^\delta)\\ &= x\vartheta_0\Big(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\Big)\log\frac{1}{2\delta}+o(x).\end{aligned} \tag{9.20}$$

D'après (9.18), (9.19) et (9.20), on a ainsi pour $c\leqslant\delta\leqslant 1/2$

$$\mathscr{S}_C \geqslant x\vartheta_0\Big(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\Big)\delta\log\frac{1}{2\delta}+o(x). \tag{9.21}$$

En reportant (9.2), (9.15), (9.16) et (9.21) dans (9.1), on obtient finalement pour $\frac12<\alpha\leqslant 1$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P_y^+(n)<P_y^+(n+1)}} 1 \geqslant g(\alpha;c,\delta)x+o(x)$$

où $g(\alpha;c,\delta)$ est définie par

$$g(\alpha;c,\delta):=\log\Big(\frac{\alpha}{1-c}\Big)-2\int_{1-\alpha}^{c}\log\Big(\frac{\alpha}{1-t}\Big)\frac{dt}{\nu(c)-t}+\vartheta_0\Big(\frac{\delta}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\Big)\delta\log\frac{1}{2\delta} \tag{9.22}$$

et

$$\nu(c):=\begin{cases}\frac47 & \text{si } 0<c\leqslant\frac27-\varepsilon,\\ \frac12 & \text{si } \frac27-\varepsilon<c<\frac12.\end{cases} \tag{9.23}$$

Il est clair que $g(\alpha;c,\delta)>0$ pour $1/2<\alpha\leqslant 1$. On peut vérifier de la même manière que lors de la preuve du Théorème 3, qu'il existe des c_0, δ_0 satisfaisant les conditions ci-dessus telles que pour $\frac12<\alpha\leqslant 1$

$$C(\alpha):=\max_{\frac12\leqslant 1-c<\alpha}\ \max_{c\leqslant\delta\leqslant\frac12} g(\alpha;c,\delta)=g(\alpha;c_0,\delta_0)>0\quad(1/2<\alpha\leqslant 1), \tag{9.24}$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 2 avec $1/2<\alpha\leqslant 1$.

On a pu prendre ici le niveau $\nu(c)=4/7$ avec $c\leqslant 2/7-\varepsilon$ dans la somme $\mathscr{S}_B$ de (9.1) et on peut donner une minoration de $\mathscr{S}_C$, tandis que dans [**25**] le niveau était $1/2$ et le terme $\mathscr{S}_C$ minoré par 0. C'est pourquoi on peut améliorer le résultat de [**25**] et obtenir le Corollaire 1 suivant. Ces deux changements sont à l'origine de l'amélioration du résultat de [**25**], donnée dans le Corollaire 1.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

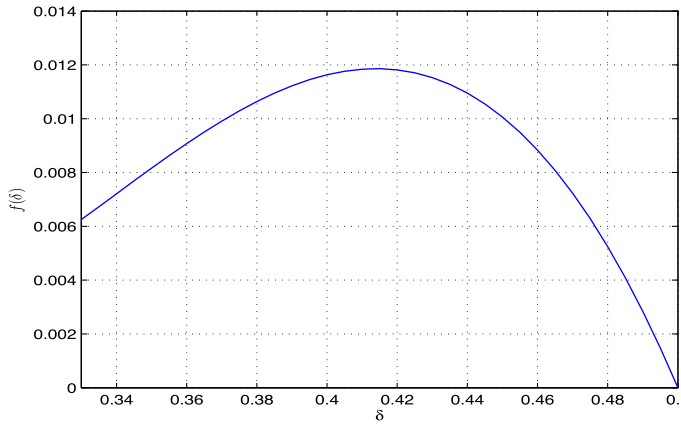


Figure 1: Graphe de $\delta \to f(\delta)$ sur $[1/3, 1/2]$.

§10. *Démonstration du Corollaire 1.* En prenant $\alpha = 1$ (c'est-à-dire, $y = x$) dans le Théorème 2 et en remarquant que $\omega(u) = 0$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1$, on obtient

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 \geqslant \{h(c) + f(\delta) + o(1)\}x, \tag{10.1}$$

où

$$h(c) := \log\left(\frac{1}{1-c}\right) - 2\int_0^c \log\left(\frac{1}{1-t}\right)\frac{dt}{4/7 - t} \quad \left(0 < c \leqslant \frac{2}{7} - \varepsilon\right),$$
$$f(\delta) := \rho(\delta^{-1})\delta \log(2\delta)^{-1} \quad \left(c \leqslant \delta \leqslant \tfrac{1}{2}\right).$$

Pour $h(c)$, on fait un calcul similaire à [25]. On a par *Mathematica 9.0*

$$\max_{0 < c \leqslant \frac{2}{7} - \varepsilon} h(c) > 0{,}1238 \tag{10.2}$$

avec $c \approx 0{,}2056$.

Ainsi, il reste à trouver $\delta_0 \in [0{,}2056,\ 0{,}5[$ tel que $f(\delta_0)$ soit proche de la valeur maximale de $f(\delta)$. Au premier abord, on peut calculer facilement que

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad f'(\delta) > 0 \quad \left(\delta \leqslant \tfrac{1}{3}\right).$$

δ_0 est ainsi dans l'intervalle $(1/3,\ 1/2)$ et on a

$$f(\delta) = \left(1 - \log\frac{1}{\delta} + \int_1^{1/\delta - 1} \frac{\log t}{t+1}\, dt\right)\delta \log\frac{1}{2\delta} \quad \left(\frac{1}{3} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

Le graphe de $f(\delta)$ sur $[1/3,\ 1/2]$ est illustré à la Figure 1.

À l'aide de *Mathematica 9.0* on peut calculer que

$$\max_{0{,}2056 \leqslant \delta \leqslant 0{,}5} f(\delta) = f(\delta_0) > 0{,}0118 \tag{10.3}$$

avec $\delta_0 \approx 0{,}414$.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Compte tenu de (10.1), (10.2) et (10.3) on obtient finalement pour $x \to \infty$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)<P^+(n+1)}} 1 > 0{,}1238x + 0{,}0118x = 0{,}1356x.$$

Cela achève la démonstration du Corollaire 1.

§11. *Démonstration du Corollaire 2.* En remarquant que

$$P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1) \Rightarrow \delta(n) \geqslant 2,$$

le Théorème 1 nous permet de déduire que

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\delta(n)^{-1} &= \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \text{“}P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)\text{” n'a pas lieu}}} \delta(n)^{-1}\\ &\quad + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)}} \delta(n)^{-1}\\ &\leqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \text{“}P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)\text{” n'a pas lieu}}} 1 + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)}} \frac{1}{2}\\ &= x - \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n-1)>P^+(n)<P^+(n+1)}} \frac{1}{2}\\ &\leqslant (1 - 5{,}315\times 10^{-8})x.\end{aligned}$$

On peut obtenir une meilleur majoration en utilisant le Théorème 3. Pour $j \geqslant 1$, on note C_j l'ensemble des *creux* d'ordre j :

$$C_j := C_j(x) = \{n \leqslant x : P^+(n) < P^+(n+k) \text{ pour tous } 1 \leqslant |k| \leqslant j\},$$

et pour C_0, on prend $C_0 = (C_1)^c$, le complémentaire de C_1. Alors on a pour tout entier $J \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\delta(n)^{-1} &= \sum_{n\in C_0}\delta(n)^{-1} + \sum_{n\in C_1}\delta(n)^{-1}\\ &= \sum_{n\in C_0}\delta(n)^{-1} + \sum_{n\in C_1\setminus C_2}\delta(n)^{-1} + \sum_{n\in C_2}\delta(n)^{-1}\\ &= \sum_{n\in C_0}\delta(n)^{-1} + \sum_{j=2}^{J}\sum_{n\in C_{j-1}\setminus C_j}\delta(n)^{-1} + \sum_{n\in C_J}\delta(n)^{-1}\\ &\leqslant \sum_{n\notin C_1} 1 + \sum_{j=2}^{J}\frac{1}{j}(|C_{j-1}| - |C_j|) + \frac{C_J}{J+1}\\ &\leqslant x - \sum_{j=1}^{J}|C_j|\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

Puis, on applique la minoration de $|C_j|$, $j \geqslant 2$ du Théorème 3 et la minoration de $|C_1|$ du Théorème 1, on obtient

$$\sum_{n\leqslant x}\delta(n)^{-1} \leqslant x\left\{1-5{,}315\times 10^{-8}-\sum_{j=2}^{J}C_3(j)\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\right\}, \qquad (11.1)$$

où $C_3(j)$ est une constante strictement positive définie par (1.15). On peut donc obtenir une meilleure majoration pour $\delta(n)$. Mais le gain est minime, on ne calcule pas ici la valeur numérique.

La démonstration du Corollaire 2* est analogue. De plus, en utilisant le Théorème 4, on peut aussi obtenir un meilleur résultat pour $\delta_*(n)$ comme (11.1) ci-dessus. On omet ici les détails.

§12. *Démonstration du Corollaire 3.* On note pour $x \to \infty$

$$\begin{aligned}
a_1(x) &:= |\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}|,\\
a_2(x) &:= |\{n \leqslant x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}|,\\
a_3(x) &:= |\{n \leqslant x : P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)\}|,\\
a_4(x) &:= |\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}|,
\end{aligned}$$

où $0 \leqslant a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x) \leqslant [x]$, $a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+a_4(x) = [x]$.

On a tout d'abord, d'après (1.13) du Corollaire 1

$$\begin{aligned}
[x]-(a_2(x)+a_3(x)) &= a_1(x)+a_4(x) > 0{,}1356x,\\
[x]-(a_2(x)+a_4(x)) &= a_1(x)+a_3(x) > 0{,}1356x.
\end{aligned}$$

La minoration de $a_2(x)$ dans (1.7) du Théorème 1 permet d'obtenir

$$a_3(x) < (0{,}8644-8{,}84\times 10^{-4})x, \qquad a_4(x) < (0{,}8644-8{,}84\times 10^{-4})x.$$

Ce qui termine la démonstration du Corollaire 3.

Remerciements. Ce travail a été réalisé sous la direction de mes directeurs de thèse Cécile Dartyge et Jie Wu. Je les remercie vivement pour les nombreuses suggestions cruciales qu'ils ont proposées dans l'élaboration de ce travail. De plus, je souhaite adresser mon extrême gratitude au rapporteur anonyme pour sa relecture attentive et pour ses remarques qui ont permis d'améliorer ce manuscrit.

References

1. A. Balog, On triplets with descending largest prime factors. *Studia Sci. Math. Hungar.* **38** (2001), 45–50.
2. E. Bombieri, On the large sieve. *Mathematika* **12** (1965), 201–225.
3. E. Bombieri, J. B. Friedlander and H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli. *Acta Math.* **156** (1986), 203–251.
4. R. de la Bretèche, C. Pomerance and G. Tenenbaum, Products of ratios of consecutive integers. *Ramanujan J.* **9** (2005), 131–138.

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press

5. R. De La Bretèche and G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables. *Ramanujan J.* **9**(1) (2005), 139–202.
6. J. M. De Koninck and N. Doyon, On the distance between smooth numbers. *Integers* **11** (2011), 647–669.
7. S. Drappeau, Théorèmes de type Fouvry–Iwaniec pour les entiers friables. *Compos. Math.* **151**(5) (2015), 828–862.
8. P. Erdős, Some unconventional problems in number theory. *Astérisque* **61** (1979), 73–82.
9. P. Erdős and C. Pomerance, On the largest prime factors of n and $n + 1$. *Aequationes Math.* **17**(2–3) (1978), 311–321.
10. E. Fouvry, Autour du théorème de Bombieri–Vinogradov. *Acta Math.* **152**(1) (1984), 219–244.
11. E. Fouvry and H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions. *Acta Arith.* **42**(2) (1983), 197–218.
12. E. Fouvry and G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **63**(3) (1991), 449–494.
13. E. Fouvry and G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **72**(3) (1996), 481–514.
14. A. J. Harper, Bombieri–Vinogradov and Barban–Davenport–Halberstam type theorems for smooth numbers. *Preprint*, 2012, arXiv:1208.5992.
15. A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
16. H. Iwaniec, A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.* **37** (1980), 307–320.
17. Y. Motohashi, An induction principle for the generalization of bombieri's prime number theorem. *Proc. Japan Acad.* **52**(6) (1976), 273–275.
18. C. D. Pan, X. Q. Ding and Y. Wang, On the representation of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime. *Sci. Sin.* **18**(5) (1975), 599–610.
19. J. Rivat, On pseudo-random properties of $P(n)$ and $P(n + 1)$. *Period. Math. Hungar.* **43** (2001), 121–136.
20. G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3rd edn. (*Collection Échelles*), Édition Belin (2008).
21. G. Tenenbaum, Some of Erdős' unconventional problems in number theory, thirty-four years later. In *Erdős Centennial* (*Bolyai Society Mathematical Studies* **25**), János Bolyai Mathematical Society (Budapest, 2013), 651–681.
22. G. Tenenbaum and J. Wu, *Théorie analytique et probabiliste des nombres, 307 exercices corrigés* (*Cours Spécialiés* **2**), Société Mathématique de France (Paris, 1996).
23. J. Teräväinen, A note on binary correlations of multiplicative functions. Preprint, 2017, arXiv:1710.01195.
24. A. I. Vinogradov, The density hypothesis for dirichet l-series. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **29** (1965), 903–934.
25. Z. W. Wang, On the largest prime factors of consecutive integers in short intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.* **145**(8) (2017), 3211–3220.
26. D. Wolke, Über die mittlere verteilung der werte zahlentheoretischer funktionen auf restklassen. II. *Math. Ann.* **204**(2) (1973), 145–153.
27. T. Z. Xuan, Integers free of small prime factors in arithmetic progressions. *Nagoya Math. J.* **157** (2000), 103–127.

Zhiwei Wang (Nancy),
Institut Élie Cartan de Lorraine,
Université de Lorraine,
UMR 7502,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy,
France
E-mail: zhiwei.wang@univ-lorraine.fr

https://doi.org/10.1112/S0025579317000547 Published online by Cambridge University Press