Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2002), **22**, 525–534
DOI: 10.1017/S0143385702000251
© *2002 Cambridge University Press*
Printed in the United Kingdom

Champs de vecteurs analytiques et champs de gradients

JEAN-MARIE LION†, ROBERT MOUSSU‡ et FERNANDO SANZ§

† *IRMAR, Université de Rennes I, 35042 Rennes cedex, France*
(e-mail: lion@maths.univ-rennes1.fr)
‡ *Laboratoire de Topologie, Université de Bourgogne, BP47870,*
21078 Dijon cedex, France
(e-mail: rmoussu@u-bourgogne.fr)
§ *Departement de Algebre, Geometrie y Topologie, Université de Valladolid,*
47005 Valladolid, España
(e-mail: fsanz@agt.uva.es)

(*Received* 29 *September* 1999 *and accepted in revised form* 24 *October* 2000)

Abstract. A theorem of Łojasiewicz asserts that any relatively compact solution of a real analytic gradient vector field has finite length. We show here a generalization of this result for relatively compact solutions of an analytic vector field X with a smooth invariant hypersurface, transversally hyperbolic for X, where the restriction of the field is a gradient. This solves some instances of R. Thom's Gradient Conjecture. Furthermore, if the dimension of the ambient space is three, these solutions do not oscillate (in the sense that they cut an analytic set only finitely many times) ; this can also be applied to some gradient vector fields.

Soit X un champ de vecteurs analytique sur une variété riemannienne N, soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t > 0$ une courbe intégrale de X relativement compacte. Lorsque X est le gradient d'une fonction analytique H pour une certaine métrique riemannienne Q sur N, Łojasiewicz [**5**] a montré à partir de sa célèbre inégalité que la courbe γ a une longueur finie. Un des buts de ce travail est de prouver que ce résultat reste vrai pour certains prolongements de X à $M = \mathbb{R} \times N$. Plus précisément on a le théorème suivant :

THÉORÈME. *Soit X un champ de vecteurs analytique sur une variété M munie d'une métrique riemannienne Q et soit N une hypersurface analytique lisse de M invariante par X tels que :*

(1) *N est un attracteur transversalement hyperbolique pour X,*
(2) *la restriction de X à N est le gradient d'une fonction analytique H sur N pour la structure riemannienne induite par Q sur N.*

Alors, si $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t > 0$ est une courbe intégrale de X relativement compacte dont l'ensemble ω-limite $\omega(\gamma)$ est contenu dans N, la longueur de γ pour Q est finie.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

En particulier, sous les hypothèses précédentes, l'ensemble ω-limite $\omega(\gamma)$ de γ est réduit à un point. Ce dernier résultat corrige la preuve incomplète du théorème 2 de [**6**] sur la conjecture du gradient de R. Thom. En dimension trois, on a un résultat beaucoup plus précis.

COROLLAIRE. *Supposons que M soit une variété de dimension trois et que M, N, X, γ vérifient les hypothèses du théorème précédent. Alors, γ est non oscillante ; c'est-à-dire que si N' est une hypersurface analytique de M qui ne contient pas γ alors, pour t assez grand, $\gamma(t)$ n'appartient pas à N'.*

Ce corollaire montre que la conjecture forte du gradient [**9**] est vraie en dimension 3 dans certains cas. La preuve du théorème repose essentiellement sur deux arguments : l'inégalité classique de Łojasiewicz reliant une fonction analytique à la norme de son gradient et sur la propriété générale suivante des temps d'intersection d'une courbe intégrale avec une hypersurface.

PROPOSITION. *Soient F une fonction analytique sur une variété M, X un champ de vecteurs analytique sur M et soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t > 0$ une courbe intégrale de X relativement compacte et oscillante par rapport à l'hypersurface $F^{-1}(0)$; c'est-à-dire que $(F \circ \gamma)^{-1}(0)$ est une suite croissante $\{t_n \mid t_n < t_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Alors il existe des constantes C, C' avec $C > 0$ telles que $t_n > Cn + C'$ pour $n \in \mathbb{N}$. De plus, si γ est contenu dans un compact fixé K, on peut choisir C, C' indépendants de γ, c'est-à-dire dépendants seulement de F, X, K.*

La preuve de cette proposition doit beaucoup à D. Novikov et S. Yakovenko. En effet, elle reprend les deux arguments principaux (théorème de Rolle itéré–noetherianité) de la démonstration d'un résultat de leur article [**8**]. De plus, c'est S. Yakovenko qui nous a convaincu que ces deux arguments suffisent pour prouver cette proposition.

1. *Preuve de la proposition*

Elle repose tout d'abord sur le lemme suivant que l'on trouve déjà sous une forme légèrement différente dans [**8**].

LEMME. *Soient $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^d non identiquement nulle tels que*

$$|f^{(d)}(t)| \leq \lambda \sum_{k=0}^{d-1} |f^{(k)}(t)|. \qquad (*)$$

Alors, sur tout intervalle de longueur $1/(1+\lambda)$, f a au plus $d-1$ zéros et si $f^{-1}(0) = \{t_n \mid t_n < t_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ il existe C, C' avec $C > 0$ tels que $t_n > Cn + C'$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Preuve du lemme. Si $f^{(d)}$ est identiquement nulle, les conclusions du lemme sont vraies puisque $f^{-1}(0)$ est fini. Raisonnons par l'absurde pour prouver la première assertion : supposons que f possède au moins d zéros sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ de longueur $T = 1/(1+\lambda)$. D'après le théorème de Rolle, les fonctions $f^{(k)}$, pour $k = 0, 1, \ldots, d-1$, possèdent au moins un zéro sur I. On en déduit que pour $k = 0, 1, \ldots, d-1$ on a :

$$\|f^{(k)}\|_I \leq T \|f^{(k+1)}\|_I \quad \text{avec} \quad \|f^{(k)}\|_I = \sup\{|f^{(k)}(t)| / t \in I\}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

En itérant cette majoration on obtient :

$$\|f^{(d-i)}\|_I \leq T^i \|f^{(d)}\|_I \quad \text{si } 1 \leq i \leq d,$$
$$\lambda \sum_{i=1}^{d} |f^{(d-i)}(t)| \leq \left(\lambda \sum_{i=1}^{d} T^i\right) \|f^{(d)}\|_I < \|f^{(d)}\|_I.$$

Cette dernière égalité est incompatible avec l'hypothèse (∗). Ainsi f a au plus $(d-1)$ zéros sur I. Supposons $f^{-1}(0)$ infini et soit $f^{-1}(0) = \{t_n \mid t_n < t_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Puisque f a au plus $d-1$ zéros sur chaque intervalle $I_p = [pT, (p+1)T[$ pour $p \in \mathbb{N}$, si t_n appartient à I_p on a $n < d(p+1)$ et ainsi

$$n < dp + d \leq d\frac{t_n}{T} + d,$$
$$(n-d)\frac{T}{d} < t_n.$$

□

Preuve. Nous reprenons les notations de l'énoncé de la proposition (voir l'introduction). Nous fixons un compact K, nous choisissons $\gamma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow M$ une courbe intégrale de X contenue dans K et nous supposons que γ est oscillante par rapport à $F^{-1}(0)$, c'est-à-dire que

$$F \circ \gamma^{-1}(0) = \{t_n \mid t_n < t_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Posons, pour $k = 1, 2, \ldots$, $F_0 = F$, $F_1 = L_X F_0$, $F_{k+1} = L_X F_k$. Pour a appartenant à K, notons $\mathcal{O}(a)$ l'anneau des germes en a de fonctions analytiques sur M. Puisque $\mathcal{O}(a)$ est noethérien, il existe un entier d_a tel que l'idéal de $\mathcal{O}(a)$ engendré par les F_k soit engendré par $F_0, F_1, \ldots, F_{d_a-1}$. Il existe un voisinage compact K_a de a et des fonctions analytiques $\mu_{a,k}$ sur K_a pour $k = 0, 1, \ldots, d_a - 1$ tels que

$$F_{d_a}(x) = \sum_{k=0}^{d_a-1} \mu_{a,k}(x) F_k(x) \quad \text{pour } x \in K_a.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ tels que la réunion des intérieurs de $K_{a_1}, K_{a_2}, \ldots, K_{a_p}$ recouvre K. Pour alléger les notations posons :

$$K_i = K_{a_i}, \quad \mu_{a_i,k} = \mu_{i,k}, \quad d_{a_i} = d_i, \quad d = \sup\{d_i \mid 1 \leq i \leq p\}.$$

Fixons l'indice i. Appliquons la dérivation L_X à l'égalité

$$F_{d_i}(x) = \sum_{k=0}^{d_i-1} \mu_{i,k}(x) F_k(x),$$
$$F_{d_i+1}(x) = \sum_{k=0}^{d_i-1} L_X \mu_{i,k}(x) F_k(x) + \mu_{i,k}(x) F_{k+1}(x),$$
$$F_{d_i+1}(x) = \sum_{k=0}^{d_i-1} \Big(L_X \mu_{i,k}(x) + \mu_{i,k-1}(x)\Big) F_k(x) + \mu_{i,d_i-1}(x) F_{d_i}(x).$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

Par induction, en appliquant $d - d_i$ fois la dérivation L_X à la décomposition de F_{d_i} sur les F_k, on montre ainsi l'existence de fonctions analytiques $\lambda_{i,k}$ sur K_i tels que

$$F_d(x) = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_{i,k}(x) F_k(x) \quad \text{si } x \in K_i.$$

Si λ est un majorant strict des $\lambda_{i,k}(x)$ pour $x \in K_i$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq k \leq d-1$, on a pour x appartenant à K :

$$|F_d(x)| \leq \lambda \sum_{k=0}^{d-1} |F_k(x)|.$$

Posons $f(t) = F \circ \gamma(t)$ pour $t > 0$. Par définition de L_X on a

$$f^{(k)}(t) = F_k(\gamma(t)) \quad \text{pour } k \geq 0.$$

L'inégalité précédente restreinte à γ s'écrit

$$|f^{(d)}(t)| \leq \lambda \sum_{k=0}^{d-1} |f^{(k)}(t)|,$$

ce qui prouve la proposition d'après le lemme précédent. □

2. *Preuve du théorème*

Cette preuve est longue et nous la décomposons en trois étapes : formulation du problème dans un voisinage tubulaire, l'ensemble ω-limite de γ est contenu dans le lieu singulier du gradient, fin de la preuve.

Formulation du problème. Quitte à effectuer un revêtement à deux feuillets de M on peut supposer que l'adhérence de $\gamma(\mathbb{R}^+)$ est contenue dans un voisinage tubulaire trivialisé d'un ouvert relativement compact N_0 de N dans M. Compte tenu de cette relative compacité, il suffit de prouver que γ a une longueur finie pour une métrique riemannienne particulière. Plus précisément, on peut supposer que

$$M =]-1, 1[\times N = \{(r, x)\}, \quad N_0 = \{0\} \times N$$

et que la métrique Q est une métrique riemannienne produit ; c'est-à-dire $Q = dr^2 + dx^2$ où dx^2 est une métrique riemannienne sur N. Traduisons les hypothèses (1), (2) avec ces notations. La condition 'N_0 est invariante par le champ de vecteurs X' s'écrit

$$X = -rG(r, x)\frac{\partial}{\partial r} + W(r, x)$$

où G est une fonction analytique sur M et $W(r, x)$ un champ de vecteurs analytique sur M tangent aux hypersurfaces $\{r\} \times N$. Compte tenu de la relative compacité de $\gamma(\mathbb{R}^+)$ et quitte à restreindre N_0, à multiplier X par une constante, à effectuer une dilatation sur la coordonnée r, les hypothèses (1), (2) du théorème peuvent s'écrire :

(1′) $G(r, x) > 1$ pour tout point (r, x) de M.

(2′) $W(r, x) = \nabla H(x) + rV(r, x)$ où H est une fonction analytique sur N, $\nabla H(x)$ est son gradient pour la métrique dx^2 et $\|\nabla H(x)\| < 1$. De plus, $V(r, x)$ est un champ de

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

vecteurs analytique sur M tangent aux hypersurfaces $\{r\} \times N$ tel que $\|V(r,x)\| < 1$ si $(r,x) \in M$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme définie par dx^2 sur l'espace tangent à $\{r\} \times N$.

L'équation différentielle E correspondant à X s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -rG(r,x), & \text{avec } G(r,x) > 1 \\ \dfrac{dx}{dt} = \nabla H(x) + rV(r,x), & \text{avec } \|V(r,x)\| < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Notons $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (r(t), x(t))$ les coordonnées de la courbe intégrale et posons

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \dot{\gamma}(t) = (\dot{r}(t), \dot{x}(t)) \quad \text{pour } t > 0.$$

Si $r(0) = 0$, γ est une courbe intégrale relativement compacte d'un champ de gradient analytique et Łojasiewicz a prouvé dans [**5**] qu'une telle courbe a une longueur finie. Supposons $r(0)$ strictement positif. D'après $(1')$ on a

$$0 < r(t) < \exp(-t), \quad \dot{r}(t) < 0 \quad \text{pour } t > 0. \tag{2}$$

La métrique riemannienne étant une métrique produit on a :

$$\text{Longueur de } \gamma \leq \int_0^\infty (-\dot{r}(t))\, dt + \int_0^\infty \|\dot{x}(t)\|\, dt.$$

La première intégrale converge. Pour prouver le théorème, il suffit de prouver que la deuxième est aussi convergente.

L'ensemble $\omega(\gamma)$ est contenu dans $\operatorname{Sing} H = \{x \in N_0 \mid \nabla H(x) = 0\}$. La preuve de cette assertion reprend un argument classique [**3, 6**]. Nous en rappelons seulement les grandes lignes. Posons $h(t) = H(\gamma(t)) = H(x(t))$,

$$\dot{h}(t) = \frac{dh}{dt}(t) = \langle \nabla H(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \tag{3}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire défini par dx^2. Compte tenu de l'écriture de E on a

$$\dot{h}(t) = \|\nabla H(x(t))\|^2 + r(t)\langle \nabla H(x(t)), V(r(t), x(t)) \rangle. \tag{4}$$

D'après $(2')$ et (2) on a donc

$$\dot{h}(t) > \|\nabla H(x(t))\|^2 - \exp(-t).$$

Si h_0 n'est pas une valeur critique de H il existe $t_0, \varepsilon > 0$ tels que si on a, simultanément, $t > t_0$ et $|h(t) - h_0| < \varepsilon$ alors $\dot{h}(t)$ est strictement positif. Le graphe dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de $t \mapsto h(t)$ avec $t > t_0$ coupe la bande $\mathbb{R}^+ \times]h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon[$ en croissant strictement. La fonction $h(t)$ prend une fois au plus les valeurs de l'intervalle $]h_0 - \varepsilon, h_0 + \varepsilon[$ pour $t > t_0$. Le niveau (non critique) $H = h_0$ ne contient pas de points de l'ensemble $\omega(\gamma)$. Ainsi $\omega(\gamma)$ est contenu dans un niveau critique h_0 de H. Supposons que $\omega(\gamma)$ ne soit pas contenu dans $\operatorname{Sing} H$ et soit $x_0 \in \omega(\gamma) \setminus \operatorname{Sing} H$. L'orbite de x_0 pour X est contenue dans $\omega(\gamma)$. Elle coupe au moins un niveau non critique de H. Ce qui contredit l'assertion précédente. Dans la suite nous supposons que $\omega(\gamma)$ est contenu dans le niveau $H = 0$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

Fin de la preuve. Nous posons :

$$A = \{(r, x) \in M \mid \|\nabla H(x)\| \leq r\|V(r, x)\|\},$$
$$B = \{(r, x) \in M \mid \|\nabla H(x)\| > r\|V(r, x)\|\}.$$

Puisque $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ est analytique, les sous-ensembles

$$A_\gamma = \{t > 0 \mid \gamma(t) \in A\}, \quad B_\gamma = \{t > 0 \mid \gamma(t) \in B\}$$

sont des unions localement finies d'intervalles de $\mathbb{R}^+$ et on écrit :

$$\int_0^\infty \|\dot{x}(t)\|\, dt = \int_{A_\gamma} \|\dot{x}(t)\|\, dt + \int_{B_\gamma} \|\dot{x}(t)\|\, dt.$$

Si t appartient à A_γ on a les majorations :

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \|\nabla H(x(t))\| + r(t)\|(r(t), x(t))\|,$$
$$\|\dot{x}(t)\| \leq 2r(t) \leq 2\exp(-t).$$

L'intégrale de $\|\dot{x}(t)\|$ sur A_γ converge. Ceci prouve le théorème lorsque B_γ est borné. Pour prouver que l'intégrale de $\|\dot{x}(t)\|$ sur B_γ converge nous utiliserons l'inégalité de Łojasiewicz :

$$|H(x)|^\nu \leq c\|\nabla H(x)\| \quad \text{si } x \in N_0 \text{ avec } 0 < \nu < 1 \text{ et } c > 0. \tag{5}$$

D'après (1) et (4) on a, si t appartient à B_γ,

$$\begin{cases} \|\dot{x}(t)\| \leq \|\nabla H(x(t))\| + r(t), \\ 0 < \dot{h}(t) \text{ et } \|\nabla H(x(t))\| - r(t) \leq \dfrac{\dot{h}(t)}{\|\nabla H(x(t))\|} \leq \|\nabla H(x(t))\| + r(t). \end{cases}$$

Ceci implique d'après l'inégalité de Łojasiewicz précédente :

$$\|\dot{x}(t)\| < \frac{\dot{h}(t)}{\|\nabla H(x(t))\|} + 2r(t) \leq c\frac{\dot{h}(t)}{|h(t)|^\nu} + 2r(t) \quad \text{pour } t \in B_\gamma.$$

Soit $]t', t''[$ un intervalle contenu dans B_γ. En intégrant l'inégalité précédente on a :

$$\int_{t'}^{t''} \|\dot{x}(t)\|\, dt \leq \frac{c}{1-\nu}(|h(t')|^{1-\nu} + |h(t'')|^{1-\nu}) + 2(\exp(-t') - \exp(-t'')). \tag{6}$$

Supposons A_γ borné. C'est-à-dire pour t' assez grand tout intervalle $]t', t''[$ est inclus dans B et l'intégrale de $\|\dot{x}(t)\|$ sur B_γ est de même nature que

$$\int_{t'}^{\infty} \|\dot{x}(t)\|\, dt \leq \frac{c}{1-\nu}|h(t')|^{1-\nu} + 2\exp(-t').$$

Supposons A_γ et B_γ non bornés, alors B_γ s'écrit, $B_\gamma = \bigcup_{\ell=0}^{\infty}]t_{2\ell}, t_{2\ell+1}[$ et pour $m = 2\ell$, $2\ell + 1$, le point $\gamma(t_m)$ appartient à $A \cap \bar{B}$. On a ainsi d'après les définitions de A et B et d'après (2) et (5) :

$$\|\nabla H(x(t_m))\| = r(t_m)\|V(r(t_m), x(t_m))\| \leq \exp(-t_m),$$
$$|h(t_m)| = |H(x(t_m))| \leq c^{1/\nu}\|\nabla H(x(t_m))\|^{1/\nu} \leq c^{1/\nu}\exp(-t_m/\nu).$$

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

Appliquons cette dernière majoration à l'intégrale

$$\int_{B_\gamma} \|\dot{x}(t)\|\,dt = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{t_{2\ell}}^{t_{2\ell+1}} \|\dot{x}(t)\|\,dt$$

en utilisant l'inégalité (6) :

$$\int_{B_\gamma} \|\dot{x}(t)\|\,dt \le \frac{c}{1-\nu} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big(|h(t_{2\ell})|^{1-\nu} + |h(t_{2\ell+1})|^{1-\nu} \Big) + 2\exp(-t_0)$$

$$\int_{B_\gamma} \|\dot{x}(t)\|\,dt \le \frac{2c^{1/\nu}}{(1-\nu)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \exp(-(1-\nu)t_{2\ell}/\nu) + 2\exp(-t_0).$$

D'après la proposition, il existe C, C' avec $C > 0$ telles que $t_{2\ell} > \ell C + C'$. La série précédente est donc convergente. □

3. *Spiralement, oscillation et tangentes itérées*

Nous indiquons dans ce paragraphe des concepts et des résultats de [**2**] que nous utilisons pour démontrer le corollaire.

Soit $\gamma : [0, \infty[\to M$ une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique X sur une variété analytique M de dimension trois. On suppose que l'ensemble ω-limite $\omega(\gamma)$ est un point a. On dit que γ *possède la propriété des tangentes itérées en* a s'il existe une suite d'éclatements ponctuels

$$M = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centres respectifs des points $a = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1}, \ldots$ telle que pour tout $n > 0$ le point p_n est l'unique point ω-limite du relevé $\gamma_n = \Pi_n^{-1}(\gamma_{n-1})$ avec $\gamma_0 = \gamma$. Si la suite d'éclatements ponctuels π_n est celle d'une branche formelle L ont dit que γ *et* L *ont un contact plat*.

Soit Γ une demi-branche analytique, c'est à dire l'image de $]0, 1[$ par une application analytique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. On dit que γ *spirale autour de* Γ (Γ *est un axe de spiralement de* γ) si γ coupe une infinité de fois toute surface semi-analytique T dont l'adhérence contient Γ et si pour tout voisinage ouvert semi-analytique W de Γ, $\gamma(t) \in W$ pour t assez grand.

Voici les deux résultats de [**2**] utilisés pour prouver le corollaire.

THÉORÈME. (Théorème du spiralement [**2**]) *La courbe* γ *est oscillante et possède la propriété des tangentes itérées si et seulement si elle spirale autour d'une demi-branche analytique invariante par* X. *De plus une telle demi-branche n'est contenue dans aucune surface analytique invariante par* X.

THÉORÈME. (Théorème du foyer monodromique [**2**]) *Supposons que la trajectoire* γ *soit contenue dans une surface lisse* S *invariante par* X. *La courbe* γ *est non oscillante et possède la propriété des tangentes itérées si et seulement s'il existe une trajectoire* γ' *de* X *contenue dans* S *telle que* $\omega(\gamma') = a$ *et* γ' *admet une tangente en* a.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

4. *Preuve du corollaire, non oscillation en dimension 3*

Elle aurait pu être déduite de certains résultats de [**9**]. Ici nous l'obtenons plus simplement en utilisant aussi [**2**].

Nous reprenons les notations du début de la preuve du théorème : l'équation différentielle E correspondant au champ de vecteurs X s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -rG(r,x), \\ \dfrac{dx}{dt} = \nabla H(x) + rV(r,x), \end{cases}$$

avec G analytique, $G > 1$ et V analytique, $\|V\| < 1$. Notons comme précédemment

$$\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (r(t), x(t)), \quad t > 0$$

une courbe intégrale de X dont l'ensemble ω-limite est inclus dans N. D'après le théorème, l'ensemble $\omega(\gamma)$ est un point a. On peut supposer qu'il appartient à Sing $H \cap \{H = 0\}$. Le problème de non oscillation est un problème local et nous pouvons supposer que

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(r,x) = (r,(x_1,x_2))\}, \quad a = (0,0,0).$$

(0) Si $r(0) = 0$, γ est une courbe intégrale du champ de gradient ∇H sur $r = 0$ avec $\omega(\gamma) = (0,0)$. D'après [**6**], le germe de ∇H en $(0,0)$ possède une séparatrice analytique. D'après le théorème du foyer monodromique appliqué à $\gamma \subset S = \mathbb{R}^2$, γ est non oscillante et possède la propriété des tangentes itérées. Nous réutiliserons plusieurs fois ce résultat.

Supposons $r(0)$ strictement positif. Pour montrer le corollaire nous allons distinguer différents cas correspondants au spectre de la matrice

$$A = DX(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & & \\ \beta & & D^2H(0) \end{pmatrix}.$$

Puisque $D^2H(0)$ est symétrique, le spectre de A est réel. Nous le noterons

$$\text{spectre } A = \{-1, \lambda_1, \lambda_2\} \quad \text{avec } \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$. Le point $(0,0,0)$ est un point singulier hyperbolique de X dont la variété stable W^s est analytique (lisse) de dimension 1. Toute courbe intégrale γ telle que $\omega(\gamma) = (0,0,0)$ est contenue dans W^s. Ainsi l'image de γ est semi-analytique. Elle est non oscillante.

(2) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$. Le point $(0,0,0)$ est un point singulier semi-hyperbolique de X. Il possède des variétés stable W^s et instable W^u qui sont des courbes analytiques lisses et une 'variété centrale formelle' $\widehat{W}^c$ contenue dans le plan $r = 0$. Plus précisément $(0,0)$ est un noeud-col de X restreint à $r = 0$ et on peut choisir des coordonnées (x_1, x_2) telle que $\widehat{W}^c$ ait une équation formelle du type : $x_1 = \hat{h}(x_2)$ avec $\hat{h}(0) = h'(0) = 0$, $\hat{h} \in \mathbb{R}[[x_2]]$. Il y a alors deux possibilités : γ est contenue dans W^s ou γ a un contact plat avec $\widehat{W}^c$. Dans le premier cas on conclut comme lorsque $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Dans le second cas elle vérifie la propriétés des tangentes itérées. Nous allons raisonner par l'absurde. Si γ est oscillante elle spirale autour d'une demi-branche analytique contenue dans $\widehat{W}^c$ d'après le théorème du spiralement. Cette demi-branche est donc contenue dans la surface invariante $r = 0$. Mais ceci est impossible, toujours d'après le théorème du spiralement.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

(3) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point $(0, 0, 0)$ est un point singulier hyperbolique de X dont la variété stable W^s est analytique (lisse) de dimension 2 et transverse à la variété invariante $r = 0$. Toute courbe intégrale γ telle que $\omega(\gamma) = (0, 0, 0)$ est contenue dans W^s. De plus l'intersection de $W^s \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et de la variété $r = 0$ est formée de deux courbes semi-analytiques qui sont des courbes intégrales de X. On peut donc conclure en appliquant le théorème du foyer monodromique à $\gamma \subset W^s$. Toute courbe intégrale γ de X telle que $\omega(\gamma) = (0, 0, 0)$ est non oscillante et possède la propriété des tangentes itérées.

(4) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le point $(0, 0, 0)$ est un point singulier semi-hyperbolique. Il y a encore deux possibilités : soit la courbe γ est contenue dans la variété stable W^s et elle est non oscillante, soit γ est 'C^∞-tangente' à la variété centrale $r = 0$. Plus précisément, dans le second cas, il existe une courbe intégrale de X 'compagnonne' ou 'ombre' de γ contenu dans $r = 0$ [**9**] ; c'est-à-dire, γ' est une courbe intégrale de ∇H et il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\|\gamma(t) - \gamma'(t)\| < \alpha e^{-\beta t}$. Comme on l'a vu précédemment γ' a la propriété des tangentes itérées. Il en est de même pour la courbe γ. Elle ne peut pas être oscillante. En effet, si c'était le cas, d'après le théorème du spiralement, γ spiralerait autour d'un axe Γ contenu dans la surface invariante $r = 0$. Ceci est impossible.

(5) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Le point $(0, 0, 0)$ est un point singulier semi-hyperbolique qui possède une variété stable analytique lisse W^s de dimension 2 et une variété centrale formelle $\widehat{W}^c$. Il y a encore deux possibilités. Si la courbe γ est contenue dans W^s elle possède une tangente en $(0, 0, 0)$ et d'après le théorème du foyer monodromique elle est non oscillante. Sinon γ est C^∞ tangente à $\widehat{W}^c$. On conclut alors comme dans le cas 2.

(6) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Le spectre $\{-1, \lambda_1, \lambda_2\}$ est dans le domaine de Poincaré. Il existe un voisinage semi-analytique U de l'origine tel que toute courbe intégrale γ qui rencontre U admet $(0, 0, 0)$ comme ensemble ω-limite. D'après le théorème de Poincaré–Dulac [**1**], quitte à restreindre U, il existe un système de coordonnées analytiques (y_1, y_2, y_3) défini sur U dans lequel X s'écrit

$$X = A_1(y_1)\partial/\partial y_1 + A_2(y_1, y_2)\partial/\partial y_2 + A_3(y_1, y_2, y_3)\partial/\partial y_3$$

avec A_1, A_2, A_3 analytiques. Sous cette forme, toute courbe intégrale de la restriction de X à U est solution du système de Pfaff emboîté

$$\begin{cases} A_1(y_1)\, dy_2 - A_2(y_1, y_2)\, dy_1 = 0, \\ A_2(y_1, y_2)\, dy_3 - A_3(y_1, y_2, y_3)\, dy_2 = 0. \end{cases}$$

Elle est non oscillante d'après la théorie de Khovanskii [**4**], voir aussi [**7**]. □

Remarque. Le cas précédent est un cas particulier d'une situation plus générale. En effet soit X est un germe à l'origine de champ de vecteurs analytique de $\mathbb{R}^n$ dont le spectre est strictement négatif. Alors, d'après les deux arguments précédents (Théorème de Poincaré–Dulac et Théorie de Khovanskii) toute courbe intégrale γ de X admet l'origine comme ensemble ω-limite et est non oscillante.

Remerciements. Travail financé par le CNRS et le réseau européen TMR Sing.Ec.Diff. et Feuilletages.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press

REFERENCES

[1] V. I. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Editions Mir, Paris, 1980.

[2] F. Cano, R. Moussu et F. Sanz. Oscillation, spiralement, tourbillonnement. *Comment. Math. Helv.* **75**(2) (2000), 284–318.

[3] X. L. Hu. Sur la structure des champs de gradients de fonctions analytiques réelles. *Thèse*, Université Paris VI, 1992.

[4] A. G. Khovanskii. Real analytic varieties with the finitness property and complex abelian integrals. *Funct. Anal. Appl.* **18** (1984), 119–127.

[5] S. Łojasiewicz. Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique. *Univ. Stud. Bologna* (1983), 115–117.

[6] R. Moussu. Sur la dynamique de gradient. Existence de variétés invariantes. *Math. Ann.* **307** (1997), 445–460.

[7] R. Moussu et C. Roche. Théorèmes de finitude pour les variétés pfaffiennes. *Ann. Inst. Fourier* **42** (1992), 393–420.

[8] D. Novikov et S. Yakovenko. Trajectories of polynomial vector fields and ascending chains of polynomial ideals. *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 563–609.

[9] F. Sanz. Non-oscillating solutions of analytic gradient vector fields. *Ann. Inst. Fourier* **48** (1998), 1045–1067.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000251 Published online by Cambridge University Press