Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2004), **24**, 1833–1863
DOI: 10.1017/S0143385703000804
© *2004 Cambridge University Press*
Printed in the United Kingdom

Sur les structures de Poisson singulières

LAURENT STOLOVITCH

CNRS UMR 5580, Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier,
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France
(e-mail: stolo@picard.ups-tlse.fr)

(*Received* 12 *June* 2003 *and accepted in revised form* 19 *November* 2003)

Résumé. Nous nous intéressons aux structures de Poisson analytiques singulières en un point et de partie linéaire non-nulle en ce point. En utilisant des travaux récents de l'auteur sur la normalisation holomorphe de familles commutatives de champs de vecteurs holomorphes singuliers, nous donnons des résultats de normalisation holomorphe de certaines structures de Poisson.

Abstract. We are interested in analytic singular Poisson structures with a non-zero linear part at the singularity. Using recent work by the author about holomorphic normalization of commutative families of singular vector fields, we obtain results about the normalization of holomorphic Poisson structures.

1. *Introduction*

Soit M une variété analytique de dimension N. Une *structure de Poisson* est la donnée d'un crochet $\{.,.\}$ qui assigne, à un couple (f, g) de germes de fonctions holomorphes en un point x de M, un germe $\{f, g\}$ de fonction holomorphe en x vérifiant les propriétés suivantes :

- $\{.,.\}$ est bilinéaire et antisymétrique ;
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identité de Jacobi) ;
- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (identité de Leibniz).

Il revient au même de définir un champ de 2-vecteurs que l'on peut écrire, dans un système de coordonnées locales,

$$P = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le N} P_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$
$$= \sum_{1 \le i < j \le N} P_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{avec } P_{i,j} = -P_{j,i}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

et qui vérifie l'identité de Jacobi

$$\sum_{1\leq l\leq N}\left(P_{i,l}\frac{\partial P_{j,k}}{\partial x_l}+P_{j,l}\frac{\partial P_{k,i}}{\partial x_l}+P_{k,l}\frac{\partial P_{i,j}}{\partial x_l}\right)=0$$

pour $1\leq i,j,k\leq N$. On définit alors le crochet de Poisson par

$$\{f,g\}:=\langle P,df\wedge dg\rangle=\sum_{1\leq i<j\leq N}P_{i,j}(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}-\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

On a alors $\{x_i,x_j\}=P_{i,j}$. Le hamiltonien associé à un germe de fonction f relativement à P est le germe de champ de vecteurs défini par

$$X_f=\sum_{i=1}^{N}\{x_i,f\}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Soit g un autre germe de fonction holomorphe. La dérivée de Lie de g le long de X_f, $X_f(g)$ est égale à $\{f,g\}$.

D'après un résultat de Weinstein [**Wei83, CdSW99**], on peut trouver un bon système de coordonnées holomorphes $(p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_m,x_1,\ldots,x_r)$ au voisinage d'un point p dans lequel on ait $p_i(p)=0$, $q_i(p)=0$, $x_j(p)=0$ et

$$P=\sum_{1\leq i\leq m}\frac{\partial}{\partial p_i}\wedge\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum_{1\leq i<j\leq r}P_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}$$

avec $P_{i,j}(0)=0$ et $2m+r=N$.

L'étude de la classification holomorphe locale d'un crochet de Poisson (c'est-à-dire les classes d'équivalence par conjugaison par des difféomorphismes locaux holomorphes) revient donc à celle d'un crochet de Poisson nul en un point. Pour le cas de la dimension deux, on pourra consulter [**Arn89**, Appendix 14].

Dans la suite, nous supposerons que M est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^N$ et que P s'annule en ce point.

Posons

$$c_{i,j}^k=\frac{\partial P_{i,j}}{\partial x_k}(0),\quad 1\leq i,j,k\leq N.$$

La partie linéaire (ou 1-jet en 0) de P définit une structure d'algèbre de Lie sur l'espace cotangent en 0, $\mathfrak{g}$, de la manière suivante :

$$[x_i,x_j]=\sum_{i=1}^{N}c_{i,j}^k x_k.$$

L'identité de Jacobi se montre en prenant le 1-jet, en 0, de l'identité de Jacobi satisfaite par P.

Lorsque que cette algèbre est semi-simple, Conn [**Con84, Con85**] a démontré qu'un tel crochet est holomorphiquement linéarisable. Cela signifie qu'il existe un système de coordonnées holomorphes, $y=\phi(x)$, dans lequel on a

$$\phi_*P(y)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\sum_{k=1}^{N}c_{i,j}^k y_k\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\wedge\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Récemment, Zung [**Zun03**] a donné une décomposition de Levi holomorphe d'un crochet de Poisson singulier, montrant ainsi que 'la difficulté réside' dans le radical de l'algèbre.

La majeure partie des travaux portant sur l'étude locale d'une structure de Poisson concerne les cas de linéarisation d'une telle structure (par exemple, [**DM95, DZ02**]). En particulier, Abbaci [**Abb01**] a amélioré, dans une certaine situation, certains résultats de Dufour.

Dans cet article, nous nous proposons non pas de linéariser mais de normaliser holomorphiquement certaine structures de Poisson dont l'algèbre de Lie associée est un produit semi-direct $\mathbb{C}^p \ltimes \mathbb{C}^n$.

Notre travail s'inspire des articles de Dufour [**Duf91**] et de Dufour–Zhitomirskii [**DZ99**].

1.1. *Notations.* Soit n un entier non-nul. On notera :

- $\mathcal{X}_n^k$ (respectivement $\widehat{\mathcal{X}}_n^k$) l'espace des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de champs de vecteurs holomorphes (respectivement formels) d'ordre $\geq k$ en 0 ;
- $\mathcal{X}_{n,p} := \wedge^p \mathcal{X}_n$ l'espace des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de champs de tenseurs contravariants holomorphes anti-symétriques de type $(p, 0)$;
- $\mathcal{O}_n$ (respectivement $\widehat{\mathcal{O}}_n$) l'anneau des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de fonctions holomorphes (respectivement formelles) ;
- $\mathcal{M}_n$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$;
- $\mathcal{O}_n(U)$ (respectivement $\mathcal{O}_n(K)$) l'anneau des fonctions holomorphes sur l'ouvert U (respectivement au voisinage du compact K) de $\mathbb{C}^n$;
- si $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n^1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k(X)$ désigne le polynôme de Taylor à l'ordre k en 0 de X.

Soient $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$. On posera $|Q| = q_1 + \cdots + q_n$ et $(Q, \lambda) = q_1\lambda_1 + \cdots + q_n\lambda_n$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on notera $\mathbb{N}_k^n$, l'ensemble des multi-indices $Q \in \mathbb{N}^n$ tels que $|Q| \geq k$.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^p$. Un élément f de $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$ défini une fonction holomorphe que l'on développera 'le long' de $K \times \{0\}$ de la manière suivante :

$$f = \sum_{Q \in N^n} f_Q(x'')(x')^Q$$

où x' (respectivement x'') désigne les coordonnées dans $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^p$) et $f_Q \in \mathcal{O}_p(V)$, V étant un voisinage de K indépendant de Q.

1.2. *Formes normales de champs de vecteurs.* Un germe de champ de vecteurs X de $(\mathbb{C}^n, 0)$, nul en ce point mais de partie linéaire L non nulle, sera dit normalisé, ou sous *forme normale*, s'il commute avec sa partie linéaire, i.e. $[L, X] = 0$. On rappelle le théorème de Poincaré–Dulac [**Arn80**].

THÉORÈME 1.1. *Soient $X = S + R$ un champ de vecteurs formel de $(\mathbb{C}^n, 0)$ s'annulant à l'origine ; S sa partie linéaire supposée semi-simple et R un champ de vecteurs non-linéaire. Il existe un difféomorphisme formel $\hat{\Phi}$ de $(\mathbb{C}^n, 0)$, tangent à l'identité en 0 tel que $\hat{\Phi}_* X = S + N$ où N est un champ de vecteurs formel tel que $[S, N] = 0$.*

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

On dit alors que $\hat{\Phi}_* X(y) := D\Phi(\Phi^{-1}(y))X(\Phi^{-1}(y))$ est une forme normale formelle de X.

Soit $X = \{X_1, \dots, X_p\}$ une famille commutative de champs de vecteurs holomorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$. On les suppose nuls en ce point et on suppose que leurs parties linéaires sont diagonales et linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. On posera $J^1(X_i) = S_i$. On peut définir une notion de forme normale formelle de la famille $\{X_i\}$ relativement à la famille de parties linéaires $S = \{S_i\}$ [**Sto00**, Proposition 4.2.1]. Nous dirons que le famille X est formellement conjuguée à la famille $\{Y_i\}_{1\le i\le p}$ s'il existe un difféomorphisme formel $\hat{\Phi}$ de $(\mathbb{C}^n, 0)$ fixant 0 et tangent à l'identité en ce point et tel que $\hat{\Phi}_* X_i = Y_i$ pour $1 \le i \le p$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie commutative de dimension p sur $\mathbb{C}$. Les familles S et X définissent des morphismes de Lie de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs holomorphes nuls à l'origine de $\mathbb{C}^n$ de la manière suivante : soit $\{g_1, \dots, g_p\}$ une base de $\mathfrak{g}$. On pose alors $X(g_i) = X_i$ et $S(g_i) = S_i$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des formes linéaires complexes sur $\mathfrak{g}$ tel que le morphisme de Lie S de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs linéaires de $\mathbb{C}^n$ défini par $S(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(g) x_i(\partial/\partial x_i)$ soit injectif. Pour tout $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ et $1 \le i \le n$, on définit le *poids* $\alpha_{Q,i}(S)$ de S comme étant la forme linéaire $\sum_{j=1}^n q_j \lambda_j(g) - \lambda_i(g)$. L'espace de poids associé à un poids α est l'espace

$$\mathcal{X}^1_{n,\alpha} = \{p \in \mathcal{X}^1_n \mid \forall g \in \mathfrak{g},\ [S(g), p] = \alpha(g)p\}.$$

Définissons les espaces de poids nul

$$\widehat{\mathcal{O}}^S_n := \{f \in \widehat{\mathcal{O}}_n \mid S_i(f) = 0\ 1 \le i \le p\},$$
$$(\widehat{\mathcal{X}}^1_n)^S := \{X \in \widehat{\mathcal{X}}^1_n \mid [S_i, X] = 0\ 1 \le i \le p\},$$

où $S_i(f)$ désigne la dérivée de Lie de f le long de S_i.

Si l'anneau $\mathcal{O}^S_n$ n'est pas réduit au corps des nombres complexes, on sait [**Sto00**, Proposition 5.3.2] qu'il existe un nombre fini de monômes $u_1 := x^{R_1}, \dots, u_t := x^{R_t}$, $R_i \in \mathbb{N}^n$, tels que $\widehat{\mathcal{O}}^S_n = \mathbb{C}[[u_1, \dots, u_t]]$. D'autre part, $(\widehat{\mathcal{X}}^1_n)^S$ est un module de type fini sur $\widehat{\mathcal{O}}^S_n$.

1.3. *Forme normale de crochet de Poisson.* Dans l'article de Conn [**Con84**], la notion de forme normale de structure de Poisson est esquissée même si elle n'est utilisée que pour la linéariser. Elle a été ensuite développée par Lychagina [**Lyc97**] (l'auteur remercie Dufour d'avoir porté cet article à sa connaissance). La structure de Poisson linéarisée définit une représentation de l'algèbre de Lie associée $\mathfrak{g}$ dans chaque espace de polynômes homogènes sur $\mathfrak{g}$. Elle est définie par la dérivée de Lie le long du hamiltonien associé à un élement de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire

$$\rho(x_i)(f) = X_{x_i}(f), \quad 1 \le i \le N.$$

On définit alors le complexe de Chevalley–Kozsul et ses groupes de cohomologie $H^i(\mathfrak{g}, S^k(\mathfrak{g})) = Z^i(\mathfrak{g}, S^k(\mathfrak{g}))/B^i(\mathfrak{g}, S^k(\mathfrak{g}))$ [**HS53**], $S^k(\mathfrak{g})$ étant la k-ième puissance symétrique de $\mathfrak{g}$ [**Sto00**, §4.1]. On a alors le résultat suivant.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 1.1. [**Con84, Lyc97**] *Soit P une structure de Poisson nulle en $0 \in \mathbb{C}^N$ et de 1-jet non-nul en ce point. Pour tout entier $k \geq 2$, soit V_k un supplémentaire de $B^2(\mathfrak{g}, S^k(\mathfrak{g}))$ dans $Z^2(\mathfrak{g}, S^k(\mathfrak{g}))$. Il existe alors un difféomorphisme formel $\hat{\Phi}$ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ nul en 0 et tangent à l'identité en ce point tel que*

$$\hat{\Phi}_* P - \mathcal{L} \in \bigoplus_{k \geq 2} V_k,$$

où $\mathcal{L}$ désigne la partie linéaire de P.

Nous dirons alors que $\hat{\Phi}_* P$ est *normalisé*.

On définit le *crochet de Schouten–Nijenhuis* $[.,.] : \mathcal{X}_{N,p} \times \mathcal{X}_{N,q} \to \mathcal{X}_{N,p+q-1}$, $\mathbb{C}$-bilinéaire, qui est une extension de la dérivée de Lie et qui vérifie :

(1) $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$;

(2) $[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{pq+q} Q \wedge [P, R]$; et

(3) $(-1)^{p(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{q(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{r(q-1)}[R, [P, Q]] = 0$.

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [**Vai94, CdSW99, Sch53**] pour de plus amples renseignements et la bibliographie. On a les propriétés suivantes. Un champ de 2-tenseur P définit une structure de Poisson si et seulement si il vérifie $[P, P] = 0$. De plus, si X_f est un champ hamiltonien associé à une structure de Poisson P alors $[P, X_f] = 0$.

Le morphisme S définit précédement induit, par le crochet de Schouten–Nijenhuis, une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des germes de champs de bi-vecteurs holomorphes et nuls à l'origine grâce à l'identité de 'Jacobi' ci-dessus.

LEMME 1.1. (1) *Les poids de S dans $\mathcal{X}^2_{n,2}$ sont de la forme $(Q, \lambda(g)) - \lambda_i(g) - \lambda_j(g)$, $Q \in \mathbb{N}^n_2$, $1 \leq i, j \leq n$.*

(2) *Soient α et β deux poids de S dans $\mathcal{X}^1_n$. Soient $X \in \mathcal{X}^1_{n,\alpha}$ et $Y \in \mathcal{X}^1_{n,\beta}$. Alors, $X \wedge Y$ est de poids $\alpha + \beta$.*

On a

$$\left[S(g), x^Q \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \left[S(g), x^Q \frac{\partial}{\partial x_i}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + x^Q \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \left[S(g), \frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$
$$= ((Q, \lambda(g)) - \lambda_i(g) - \lambda_j(g)) x^Q \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

En effet, on a

$$[S(g), X \wedge Y] = [S(g), X] \wedge Y + X \wedge [S(g), Y]$$
$$= (\alpha(g) + \beta(g)) X \wedge Y.$$

Les espaces de poids sont en somme directes (en fait, ce sont les espaces de poids dans les espaces de champs de bi-vecteurs homogènes qui sont en somme directe [**Bou90**]).

2. *Cadre de travail et premières réductions*

Nous supposerons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^p \ltimes \mathbb{C}^n$ est le produit semi-direct de $\mathbb{C}^p$ par $\mathbb{C}^n$ (la suite de morphismes d'algèbres de Lie $0 \to \mathbb{C}^n \to \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^p \to 0$ est exacte) défini par

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$
$$[x_i, x_j] = 0 \qquad n+1 \leq i, j \leq N,$$
$$[x_i, x_j] = \lambda_{j,i} x_i \qquad 1 \leq i \leq n < j \leq N,$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

où l'on a posé $N = n + p$. On supposera que les champs de vecteurs

$$S_j := \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,i} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq j \leq p$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. On notera S la famille des S_j et $\lambda^i = (\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n})$.

Dans la suite, nous ferons les hypothèses suivantes (H) :

(1) un des S_j a des valeurs propres distinctes, i.e. $x_j \partial/\partial x_i \notin (\widehat{\mathcal{X}}_n^1)^S$ si $i \neq j$;
(2) un des S_j n'a pas de valeur propre nulle, i.e. pour $1 \leq i \leq n$, $x_i \notin \widehat{\mathcal{O}}_n^S$;
(3) un des S_j n'a pas deux valeurs propres de somme nulle, i.e. pour $1 \leq i, j \leq n$, $x_i x_j \notin \widehat{\mathcal{O}}_n^S$, ;
(4) un des S_j est tel qu'aucune de ses valeurs propres n'est la somme de deux autres, i.e. pour $1 \leq i, j, k \leq n$, $x_i x_j \partial/\partial x_k \notin (\widehat{\mathcal{X}}_n^1)^S$;
(5) $\{x_i, x_j\} = 0$ pour $n + 1 \leq i, j \leq N$.

Pour tout $1 \leq j \leq p$, on notera X_j le hamiltonien asscocié à x_{n+j}. Par hypothèse, on a

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} \{x_i, x_{n+j}\} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On a alors

$$P = \sum_{k=1}^{p} X_k(x) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+k}} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Soit f un germe de fonction et $1 \leq j, k \leq p$. L'identité de Jacobi

$$\{x_{n+j}, \{x_{n+k}, f\}\} = \{x_{n+k}, \{x_{n+j}, f\}\},$$

montre que les champs X_j commutent deux-à-deux. Les champs X_j peuvent être considérés comme des germes de champs de $\mathbb{C}^n$ dépendant holomorphiquement de p paramètres $x'' := (x_{n+1}, \ldots, x_N)$. On notera $\mathcal{O}_p = \mathbb{C}\{x_{n+1}, \ldots, x_N\}$ (respectivement $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$) l'anneau des germes de fonctions holomorphes de $(\mathbb{C}^p, 0)$ (respectivement $(\mathbb{C}^n, 0)$). On posera $x' := (x_1, \ldots, x_n)$ et on notera $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$. Soit $f \in \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_n$, $f^k(x)$ est la composante homogène de degré k en $x' = 0$ de f. On peut alors écrire pour $1 \leq j \leq p$,

$$X_j(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{j,i}(x'') \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^{n} b_{j,i,k}(x'') x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \mod \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{M}^2.$$

Par hypothèse, la différentielle de X_j^0 en 0 est nulle et

$$X_j^1(x', 0) = S_j = \sum_{i,k=1}^{n} b_{j,i,k}(0) x_k \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

LEMME 2.1. *Quitte à faire un changement de variables holomorphe de* $(\mathbb{C}^N, 0)$ *tangent à l'identité en* 0*, on peut supposer que* $X_j(0, x'') = 0$ *et* $DX_j(0, x'') = diag(\lambda_{j,1}(x''), \ldots, \lambda_{j,n}(x''))$ *pour* $1 \leq j \leq p$.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Par hypothèse, on peut supposer que la matrice $(b_{1,i,k}(0))_{1\le i,k\le n}$ est inversible ; en appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient un germe d'application holomorphe $g : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ telle que $g(0) = 0$ et $X_1(g(x''), x'') = 0$. Le champ X_1 est donc tangent au graphe $\mathcal{G}$ de g ; puisque les X_i commutent à X_1, ils sont aussi tangents à $\mathcal{G}$. Les X_j n'ont aucune composante non nulle le long des $\partial/\partial x_{n+k}$, $1 \le k \le p$; ils doivent donc être nuls sur $\mathcal{G}$. Faisons le changement de variables holomorphe $(X', X'') = (x' - g(x''), x'')$ fixant l'origine et tangent à l'identité en ce point. On a alors $X_j(0, X'') = 0$ et $DX_j(0) = (b_{j,i,k}(0))_{j\le i,k\le n}$.

Puisque les valeurs propres de l'un des $DX_i(0)$ sont distinctes, on peut diagonaliser $DX_i(0, x'')$ holomorphiquement sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^p$. Les matrices $DX_j(0, x'') = (b_{j,i,k}(x''))_{j\le i,k\le n}$ sont alors diagonalisées et leurs coefficients sont holomorphes dans U. Ce qui donne le résultat. □

LEMME 2.2. *Sous les hypothèses précédentes, on a* $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{M}^2$ *pour* $1 \le i, j \le n$.

Preuve. Posons

$$\tilde{P} = \sum_{1\le i<j\le n} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pour alléger l'écriture, on posera $g_{i,j} = \{x_i, x_j\}$. Puisque X_i, $1 \le i \le p$, est un hamiltonien par rapport à P, le crochet de Schouten–Nijenhuis $[P, X_i]$ est nul. On a donc

$$[\tilde{P}, X_i] = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_{n+k}} \wedge X_k(x). \tag{2.1}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}[\tilde{P}, X_i] &= \sum_{1\le r<s\le n} \left[g_{r,s}(x) \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s}, X_i \right] \\ &= \sum_{1\le r<s\le n} X_i(g_{r,s}) \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s} - g_{r,s} \left[X_i, \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s} \right].\end{aligned}$$

Or, un calcul simple montre que l'on a

$$\left[X_i, \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s} \right] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial x_k} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

On obtient alors

$$[\tilde{P}, X_i] = \sum_{1\le r<s\le n} \left(X_i(g_{r,s}) - g_{r,s} \left(\frac{\partial X_{i,r}}{\partial x_r} + \frac{\partial X_{i,s}}{\partial x_s} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s}. \tag{2.2}$$

D'après le lemme précédent, la restriction à $x' = 0$ du membre de droite de l'équation (2.1) est nulle. Or, la restriction à $x' = 0$ du membre de droite de l'équation (2.2) est égale à

$$- \sum_{1\le r<s\le n} g^0_{r,s}(x'')(\lambda_{i,r}(x'') + \lambda_{i,s}(x'')) \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Donc, pour $1 \leq i \leq p$ et pour $1 \leq r < s \leq n$, on a

$$g^0_{r,s}(x'')(\lambda_{i,r}(x'') + \lambda_{i,s}(x'')) = 0.$$

Par hypothèse, pour $1 \leq r < s \leq n$, il existe un entier $1 \leq i \leq p$ tel que $\lambda_{i,r}(0) + \lambda_{i,s}(0) \neq 0$. Donc, $\lambda_{i,r}(x'') + \lambda_{i,s}(x'')$ est non-nul sur un voisinage de l'origine. Par conséquent, la fonction holomorphe $g^0_{r,s}(x'')$ est nulle sur le connexe U.

Le 1-jet en $x' = 0$ du membre de droite de l'équation (2.1) est nul. Celui du membre de droite de l'equation (2.2) est égal à

$$\sum_{1\leq r<s\leq n} (J^1(X_i)(g^1_{r,s}) - g^1_{r,s}(\lambda_{i,r}(x'') + \lambda_{i,s}(x'')))\frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

En posant $g^1_{r,s} = \sum_{k=1}^n g^1_{r,s,k}(x'')x_k$, on obtient pour $1 \leq r, s, k \leq n$,

$$g^1_{r,s,k}(x'')(\lambda_{i,k}(x'') - \lambda_{i,r}(x'') - \lambda_{i,s}(x'')) = 0.$$

Par hypothèse, pour chaque triplet (r, s, k), il existe un entier $1 \leq i \leq n$ tel que $\lambda_{i,k}(0) - \lambda_{i,r}(0) - \lambda_{i,s}(0) \neq 0$. Les fonctions $g^1_{r,s,k}(x'')$ sont donc toutes nulles.

Par conséquent, nous avons montré que pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\{x_i, x_j\} \in \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{M}^2. \qquad \square$$

LEMME 2.3. *Il existe un changement de variables holomorphe* $(X', X'') = \Psi(x) = (x', \psi(x''))$ *de* $(\mathbb{C}^N, 0)$ *tel que, pour* $1 \leq i \leq p$, *la partie linéaire de* $\Psi_* X_i$ *en* 0 *est égale à* S_i *(les valeurs propres sont indépendantes de* x''*).*

Preuve. Prenons le 2-jet de l'égalité (2.1). Le 2-jet de (2.2) est égal à

$$\sum_{1\leq r<s\leq n} (J^1(X_i)(g^2_{r,s}) - g^2_{r,s}(\lambda_{i,r}(x'') + \lambda_{i,s}(x'')))\frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{1\leq r<s\leq n} \left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n, |Q|=2} ((Q, \lambda_i(x'')) - \lambda_{i,r}(x'') - \lambda_{i,s}(x''))g^2_{r,s,Q}(x'')(x')^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s},$$

où l'on a écrit

$$g^2_{r,s}(x) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, |Q|=2} g^2_{r,s,Q}(x'')(x')^Q.$$

D'autre part, le 2-jet du membre de droite de (2.1) est égal à

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial J^1(X_i)}{\partial x_{n+k}} \wedge J^1(X_k)(x) = \sum_{1\leq r<s\leq n} \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial \lambda_{i,r}}{\partial x_{n+k}}\lambda_{k,s} - \frac{\partial \lambda_{i,s}}{\partial x_{n+k}}\lambda_{k,r} \right) x_r x_s \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

En comparant les coefficients de

$$x_r x_s \frac{\partial}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x_s}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

dans les deux expressions, on obtient

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\lambda_{i,r}}{\partial x_{n+k}}\lambda_{k,s}-\frac{\partial\lambda_{i,s}}{\partial x_{n+k}}\lambda_{k,r}\right)=0,\quad 1\le r<s\le n.$$

En posant $\Lambda_m:=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{i,m}(x'')(\partial/\partial x_{n+i})$ pour $1\le m\le n$, les équations précédentes s'écrivent $[\Lambda_r,\Lambda_s]=0$ pour $1\le r,s\le n$. Or, par hypothèse, la famille $\{\Lambda_r(0)\}_{1\le r\le n}$ est de rang p. On peut supposer que la famille $\{\Lambda_r(0)\}_{1\le r\le p}$ est indépendante sur $\mathbb{C}$.

On peut donc redresser simultanément et holomorphiquement la famille $\{\Lambda_r(x'')\}_{1\le r\le p}$: il existe un changement de variables holomorphe $X''=\psi(x'')$ tel que $\psi_*\Lambda_r(X'')=\Lambda_r(0)$ pour $1\le r\le p$. Soit $p+1\le l\le n$; pour $1\le r\le p$, on a

$$\begin{aligned}0=[\psi_*\Lambda_r,\psi_*\Lambda_l]=:&\left[\Lambda_r(0),\sum_{j=1}^{p}\mu_{j,l}(X'')\frac{\partial}{\partial X_{j+n}}\right]\\&=\sum_{j=1}^{p}\Lambda_r(0)(\mu_{j,l}(X''))\frac{\partial}{\partial X_{j+n}},\end{aligned}$$

où les $\mu_{j,l}$ sont des germes de fonctions holomorphes dans $(\mathbb{C}^p,0)$. De par l'indépendance des p premiers $\Lambda_r(0)$, l'équation précédente se ramène à $\partial\mu_{j,l}/\partial X_{k+n}=0$ pour $1\le k\le p$. Donc, $\psi_*\Lambda_l(X'')=\Lambda_l(0)$. □

3. *Résultats principaux*

Soit $\{.,.\}$ un crochet de Poisson holomorphe de $(\mathbb{C}^N,0)$, nul en 0 et vérifiant les hypothèses (H) définie dans §2. D'après les résultats précédents, quitte à faire un changement de coordonnées holomorphe, on peut supposer que

$$P=\sum_{k=1}^{p}X_k(x)\wedge\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}+\sum_{1\le i<j\le n}\{x_i,x_j\}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j},$$

vérifie les propriétés suivantes, U étant un voisinage borné de l'origine dans $\mathbb{C}^p$.

- Pour $1\le k\le p$, X_k est un champ de vecteurs holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dépendant holomorphiquement des p paramètres x'', i.e. $X_k\in\mathcal{O}_p(\bar{U})\otimes\mathcal{X}_n^1$.
- Les X_k commutent deux à deux, i.e. $[X_i,X_j]=0$ pour $1\le i,j\le p$.
- Pour $1\le k\le p$, $X_k\equiv S_k \bmod \mathcal{O}_p(\bar{U})\otimes\mathcal{X}_n^2$.
- Pour $1\le i,j\le n$, $\{x_i,x_j\}\in\mathcal{O}_p(\bar{U})\otimes\mathcal{M}^2$.

La partie linéaire de P à l'origine est alors

$$\mathcal{L}:=\sum_{k=1}^{p}S_k(x')\wedge\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.$$

On rappelle que l'on a posé, pour $1\le i\le n$,

$$\Lambda_i=\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j,i}\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}.$$

Puisque la famille S est de rang p, *on peut supposer que la famille* $\{\Lambda_i\}_{1\le i\le p}$ *est libre sur* $\mathbb{C}$, *ce que nous ferons dans la suite*.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\omega_k(S) = \inf\left\{ \max_i |(Q, \lambda^i) - \lambda_{i,j}| \neq 0,\ Q \in \mathbb{N}^n, 2 \leq |Q| \leq 2^k, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Nous dirons que la famille S est *diophantienne* si la condition arithmétique

$$\omega(S) : -\sum_{k \geq 1} \frac{\log \omega_k(S)}{2^k} < +\infty.$$

est satisfaite.

Remarque 3.1. Lorsque la famille S ne contient qu'un seul élément, la condition $\omega(S)$ n'est autre que la condition de Bruno [**Bru72**] (qui est plus faible que celle de Siegel [**Arn80**, p. 182]).

Définition 3.1. Un ensemble compact K sera dit *bon* s'il est de Stein et si, pour tout ensemble analytique V d'un voisinage de K, $V \cap K$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Un ensemble compact K sera dit compact de 0 s'il contient un voisinage de 0. Un polydisque fermé est un bon compact de son centre.

Remarque 3.2. Dans la pratique, nous pourrions ne considérer, comme bon compact, que le cas d'un point ou d'un polydisque fermé centré en ce point. La propriété essentielle que nous utiliserons est la noetherianité de l'anneau des fonctions holomorphes au voisinage d'un bon compact [**Fri67, Siu69**]. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [**Hör90, Mal84**] pour les notions sur les espaces de Stein.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que $K := \bar{U}$ soit un bon compact de $0 \in \mathbb{C}^p$. Supposons que la famille $S = \{S_i\}_{1 \leq i \leq p}$ des parties linéaires soit* diophantienne. *Supposons que la famille commutative $\{X_i\}_{1 \leq i \leq p}$ admette un forme normale formelle de la forme $\left\{ \sum_{j=1}^p \hat{a}_{i,j} S_j \right\}_{1 \leq i \leq p}$ où les $\hat{a}_{i,j}$ appartiennent à l'anneau $\mathcal{O}_p(K) \otimes \widehat{\mathcal{O}}_n^S$. Alors, il existe un difféomorphisme holomorphe Φ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ dans lui-même, fixant l'origine et tangent à l'identité en ce point tel que*

$$\Phi_* P = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^p \tilde{a}_{k,l}(x) S_l \right) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+k}} + \sum_{p+1 \leq i < j \leq n} c_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}_2^n, \\ Q \neq E_i + E_j \\ \forall r\ (Q, \lambda^r) = \lambda_{r,i} + \lambda_{r,j}}} g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les $\tilde{a}_{r,s}$ appartiennent à $\mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$, les $g_{i,j,Q}$ appartiennent à $\mathcal{O}_p(V')$, K' (respectivement V') étant un bon compact de 0 dans $\mathbb{C}^p$ (respectivement voisinage de K'), et les $c_{i,j}$ sont des nombres complexes.

Les corollaires suivants sont des applications immédiates du théorème.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Définition 3.2. Nous dirons que la partie linéaire $\mathcal{L}$ de P est *non-résonnante* si, pour tout n-uplet d'entiers $(q_1, \ldots, q_n)$ tel que $q_i \geq -1$, deux au plus pouvant être simultanément égaux à -1, il existe un entier $1 \leq j \leq p$ tel que

$$q_1\lambda_{j,1} + \cdots + q_n\lambda_{j,n} \neq 0.$$

On appellera *relation de résonnance* de $\mathcal{L}$, une égalité de la forme

$$q_1\lambda_{j,1} + \cdots + q_n\lambda_{j,n} = \lambda_{j,r} + \lambda_{j,s}, \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

où $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$. La famille S est non-résonnante lorsque $(\widehat{\mathcal{X}}_n^2)^S = \{0\}$.

Remarque 3.3. Si $\mathcal{L}$ est non-résonnante alors la famille S est non-résonnante.

COROLLAIRE 3.1. *Supposons que la famille $S = \{S_i\}_{1\leq i\leq p}$ des parties linéaires soit* diophantienne *et que $\mathcal{L}$ soit* non-résonnante. *Alors alors il existe un difféomorphisme holomorphe Φ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ dans lui-même, fixant l'origine et tangent à l'identité en ce point tel que*

$$\Phi_* P = \sum_{r=1}^{p} S_r \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+r}} + \sum_{p+1\leq i<j\leq n} c_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où les $c_{i,j}$ sont des constantes.

Ce dernier corollaire, dans le cas $p = 1$, est du à Dufour et Zhitomirskii [**DZ99**, Theorem 6.1]. En particulier, si $n \leq p + 1$, la structure de Poisson est linéarisable (sans condition de rang).

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons de plus, que le rang de P soit egal à $2p$ avec $n > p+1$. Alors il existe un difféomorphisme holomorphe Φ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ dans lui-même, fixant l'origine et tangent à l'identité en ce point tel que*

$$\Phi_* P = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{k,l}(x^{R_1}, \ldots, x^{R_t}) S_l \right) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+k}},$$

où les $b_{k,l}$ appartiennent à $\mathcal{O}_n^S$.

Remarque 3.4. Le résultat précédent admet *l'interprétation géométrique* suivante. On supposera que l'anneau des invariants $\widehat{\mathcal{O}}_n^S$ n'est pas réduit aux constantes. Soit $\pi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^t, 0)$ l'application définie par $\pi(x) = (x^{R_1}, \ldots, x^{R_t})$ avec $\widehat{\mathcal{O}}_n^S = \mathbb{C}[[x^{R_1}, \ldots, x^{R_t}]]$ (voir §1.2). Il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $b \in \pi(\mathcal{U})$, la structure de Poisson P induit, sur la variété torique 'généralisée' $(\pi^{-1}(b) \cap \mathcal{U}) \times \mathbb{C}^p$, la structure de Poisson linéaire

$$\sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{p} b_{r,s}(b) S_s \right) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+r}} \Bigg|_{(\pi^{-1}(b)\cap\mathcal{U})\times\mathbb{C}^p}.$$

En effet, par définition, les champs S_k sont tangents aux fibres $(\pi^{-1}(b) \cap \mathcal{U})$.

COROLLAIRE 3.2. *Soit P une structure de Poisson vérifiant les hypothèses* (H) *et de rang egal à $2p$, $n > p+1$. On suppose que la famille des hamiltoniens associés aux variables x'' est* formellement linéarisable *et que la famille de leurs parties linéaires à l'origine est* diophantienne. *Alors la structure de Poisson P est holomorphiquement linéarisable.*

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Ce résultat est du à Dufour [**Duf91**], dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$, lorsque la famille S est *hyperbolique et non-résonnante*.

Remarque 3.5. Tous ces résultats sont vrais dans la catégorie analytique réelle.

4. *Forme normale de famille commutative de champs de vecteurs*

L'objet de cette section est de rappeler un des résultats de l'auteur [**Sto00**] que nous utiliserons dans cet article. Soit $\{X_1, \dots, X_p\}$ une famille commutative de champs de vecteurs holomorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$. On les suppose nuls en ce point et on suppose que leur partie linéaire sont diagonales et indépendantes sur $\mathbb{C}$. On posera $J^1(X_i) = S_i := \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} x_j \partial/\partial x_j$, $\lambda^i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n})$ et S désignera la famille des S_i.

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. [**Sto00**] *Supposons que la famille des parties linéaires $\{S_i\}_{1\le i\le p}$ soit* diophantienne. *Supposons que la famille commutative $\{X_i\}_{1\le i\le p}$ admette un forme normale formelle de la forme $\left\{\sum_{j=1}^p \hat{a}_{i,j} S_j\right\}_{1\le i\le p}$ où les $\hat{a}_{i,j}$ appartiennent à l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_n^S$. Alors il existe un germe de difféomorphisme holomorphe Φ de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans lui-même, tangent à l'identité en* 0*, tel que, pour* $1 \le i \le p$*,*

$$\Phi_* X_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} S_j,$$

où les $a_{i,j} \in \widehat{\mathcal{O}}_n^S \cap \mathcal{O}_n$.

Dans ce qui suit, nous aurons besoin de la 'version à paramètres' suivante.

THÉORÈME 4.2. *Soit K un bon compact de $0 \in \mathbb{C}^k$. On notera x'' les coordonnées de $\mathbb{C}^k$. Soit $\{X_i\}_{1\le i\le p}$ une famille commutative d'éléments de $\mathcal{O}_k(K) \otimes \mathcal{X}_n^1$. Soit S_i la partie linéaire de X_i en $0 \in \mathbb{C}^n$, que l'on suppose indépendante de x''. Supposons que la famille $\{S_i\}_{1\le i\le p}$ soit* diophantienne. *Supposons, en outre, que la famille commutative $\{X_i\}_{1\le i\le p}$ admette une forme normale formelle de la forme $\left\{\sum_{j=1}^p \hat{a}_{i,j} S_j\right\}_{1\le i\le p}$ où les $\hat{a}_{i,j}$ appartiennent à l'anneau $\mathcal{O}_k(K) \otimes \widehat{\mathcal{O}}_n^S$. Alors il existe un germe de difféomorphisme holomorphe Φ de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans lui-même, tangent à l'identité en* 0*, dépendant holomorphiquement de x'' dans K et tel que, pour* $1 \le i \le p$*,*

$$\Phi_* X_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} S_j,$$

où les $a_{i,j} \in \mathcal{O}_k(K) \otimes (\widehat{\mathcal{O}}_n^S \cap \mathcal{O}_n)$.

En effet, supposons que $\hat{\Phi}$ conjugue X_j à Y_j, pour $1 \le j \le p$, avec

$$\hat{\Phi}(x, x'') = \left(x_i + \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, |Q|\ge 2} \phi_{i,Q}(x'') x^Q\right)_{1\le i\le n},$$

$$X_j = S_j + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n, |Q|\ge 2} X_{j,i,Q}(x'') x^Q\right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

et

$$Y_j = S_j + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{Q \in \mathbb{N}^n, |Q| \geq 2} Y_{j,i,Q}(x'') x^Q \Big) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Les équations que doivent satisfaire ces coefficients sont de la forme

$$((Q, \mu^j) - \mu_{j,i}) \phi_{i,Q}(x'') + Y_{j,i,Q}(x'') = X_{j,i,Q}(x'') + P_{j,i,Q}(x''),$$

où $P_{j,i,Q}$ est un polynôme en les $\phi_{i,Q'}(x'')$, $Y_{j,i,Q'}(x'')$, $X_{j,i,Q'}(x'')$, $|Q'| < |Q|$. La définition de $\phi_{i,Q}(x'')$ et de $Y_{j,i,Q}(x'')$ se fait par réccurence comme suit : si pour un j, on a $(Q, \mu^j) \neq \mu_{j,i}$ alors on pose $Y_{j,i,Q}(x'') = 0$ et $\phi_{i,Q}(x'')$ est déterminé par la j-ième équation. Sinon, on pose $\phi_{i,Q}(x'') = 0$ et $Y_{j,i,Q}(x'')$ est déterminé par le second membre. Par conséquent, on montre par récurrence que si les $X_{j,i,Q}(x'')$ sont holomorphes sur un même voisinage V de K, il en est de même des $\phi_{i,Q}(x'')$ et des $Y_{j,i,Q}(x'')$.

5. *Preuve du théorème 3.1*

Utilisons le théorème 4.2, pour normaliser la famille commutative de champs de vecteurs $\{X_i\}_{1 \leq i \leq p}$. Dans ces nouvelles coordonnées, développons l'identité de Jacobi, pour $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq m \leq p$,

$$\{x_{n+m}, \{x_i, x_j\}\} = -\{x_i, \{x_j, x_{n+m}\}\} + \{x_j, \{x_i, x_{n+m}\}\}. \tag{5.1}$$

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \{x_{n+m}, \{x_i, x_j\}\} &= \sum_{k=1}^{N} \{x_k, x_{n+m}\} \frac{\partial \{x_i, x_j\}}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{x_k, x_{n+m}\} \frac{\partial \{x_i, x_j\}}{\partial x_k} = X_m(\{x_i, x_j\}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\{x_{n+m}, \{x_i, x_j\}\} = \sum_{k=1}^{p} a_{m,k}(x) S_k(\{x_i, x_j\}). \tag{5.2}$$

D'autre part, par définition, on a $\{x_j, x_{n+m}\} = X_{m,j}$. On a alors

$$\begin{aligned} \{x_i, \{x_j, x_{n+m}\}\} &= \sum_{k=1}^{N} \{x_k, x_i\} \frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{x_k, x_i\} \frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{p} \{x_{n+k}, x_i\} \frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_{n+k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{x_k, x_i\} \frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{p} X_{k,i} \frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_{n+k}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \{x_k, x_i\} \frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_k} = \{x_i, x_j\} \Big(\sum_{k=1}^{p} a_{m,r} \lambda_{r,j} \Big) + x_j \sum_{k=1}^{n} \{x_k, x_i\} \frac{\partial \sum_{r=1}^{p} a_{m,r} \lambda_{r,j}}{\partial x_k}. \tag{5.3}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Considérons alors l'opérateur $O_p(K)\otimes\mathcal{O}_n$-linéaire,

$$N : \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n)\otimes(\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n)^n$$

défini par

$$\begin{aligned} N((f_{i,j})_{1\le i,j\le n}) &= (N_{i,j}(f))_{1\le i,j\le n} \\ &= \left(\left(\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(x_i f_{k,j}\lambda_{r,i} - x_j f_{k,i}\lambda_{r,j})\frac{\partial a_{m,r}}{\partial x_k}\right)_{1\le m\le n}\right)_{1\le i,j\le n}. \end{aligned}$$

On posera

$$N_{i,j,m}(f) := \sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(x_i f_{k,j}\lambda_{r,i} - x_j f_{k,i}\lambda_{r,j})\frac{\partial a_{m,r}}{\partial x_k}. \tag{5.4}$$

Soit

$$\begin{aligned} M_{i,j,m} &:= \sum_{l=1}^{p} X_{l,i}\frac{\partial X_{m,j}}{\partial x_{n+l}} - \sum_{l=1}^{p} X_{l,j}\frac{\partial X_{m,i}}{\partial x_{n+l}} \\ &= x_i x_j \sum_{l=1}^{p}\left[\left(\sum_{k=1}^{p} a_{l,k}\lambda_{k,i}\right)\left(\frac{\partial\sum_{k=1}^{p} a_{m,k}\lambda_{k,j}}{\partial x_{l+m}}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{k=1}^{p} a_{l,k}\lambda_{k,j}\right)\left(\frac{\partial\sum_{k=1}^{p} a_{m,k}\lambda_{k,i}}{\partial x_{n+l}}\right)\right]. \end{aligned}$$

LEMME 5.1. *Pour $1\le i,j\le n$ et $1\le m\le p$:*

- *$M_{i,j,m}$ appartient à l'idéal engendré par $x_i x_j$ dans $\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n^S$;*
- *sous les hypothèses (H), $M_{i,j,m}$ est d'ordre supérieur ou égal à cinq ;*
- *si chaque $f_{i,j}$ est de la forme*

$$\sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}_2^n,\\ \forall r\ (Q,\lambda^r)=\lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}}} f_{i,j,Q}(x'')(x')^Q$$

avec $f_{i,j,Q}\in\mathcal{O}_p(V)$, V étant un voisinage de K ; il en est de même pour $N_{i,j,m}(f)$.

Preuve. Le premier point est clair car les fonctions $a_{i,j}$ appartiennent à $\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n^S$; leurs dérivées par rapport aux variables x'' aussi. Les fonctions $a_{i,j}$ sont de la forme

$$\sum_{\substack{P\in\mathbb{N}_2^n,\\ \forall r\ (P,\lambda^r)=0}} a_{i,j,P}(x'')(x')^P.$$

D'après les hypothèses (H), les monômes 'résonnants' qui engendrent $\mathcal{O}_n^S$ sont de degré supérieur ou égal à trois. Par conséquent, la fonction $x_i f_{k,j}\partial a_{m,r}/\partial x_k$ est de la forme

$$\sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}_2^n,\\ \forall r\ (Q,\lambda^r)=\lambda_{r,k}+\lambda_{r,j},\\ (P,\lambda^r)=0}} g_{i,j,Q}(x'')(x')^{Q+E_i+P-E_k},$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

c'est-à-dire de la forme

$$\sum_{\substack{R\in\mathbb{N}_3^n,\\ \forall r\ (R,\lambda^r)=\lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}}} \tilde{g}_{i,j,R}(x'')(x')^R.$$

En fait, on a même,

$$x_i f_{k,j}\frac{\partial a_{m,r}}{\partial x_k} = x_i \sum_{\substack{R\in\mathbb{N}_2^n,\\ \forall r\ (T,\lambda^r)=\lambda_{r,j}}} \tilde{g}_{i,j,T}(x'')(x')^T. \qquad \square$$

L'équation de Jacobi (5.1) s'écrit, pour $1 \le m \le p$,

$$X_m(\{x_i,x_j\}) - \{x_i,x_j\}\left(\sum_{r=1}^{p} a_{m,r}(\lambda_{r,j}+\lambda_{r,i})\right) = M_{i,j,m} + N_{i,j,m}((\{x_r,x_s\})_{1\le r,s\le n}).$$

Soit $A = (a_{k,l})_{1\le k,l\le p}$; par hypothèse, $A(0,x'') = \mathrm{Id}$ et $a_{k,l} \in \mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n^S$. La matrice A est donc inversible au voisinage de $\{0\}\times K$ dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^p$ et les coefficients de A^{-1} appartiennent à $\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n^S$. Puisque l'on a $X_m = \sum_{k=1}^p a_{m,k}S_k$, les p équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} S_1(\{x_i,x_j\}) \\ \vdots \\ S_p(\{x_i,x_j\}) \end{pmatrix} - \{x_i,x_j\}\begin{pmatrix} \lambda_{1,i}+\lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{p,i}+\lambda_{p,j} \end{pmatrix} = \tilde{N}_{i,j}((\{x_r,x_s\})_{1\le r,s\le n}) + \tilde{M}_{i,j}, \qquad (5.5)$$

où l'on a posé $\tilde{N}_{i,j} = A^{-1}N_{i,j}$ et $\tilde{M}_{i,j} = A^{-1}M_{i,j}$. Les composantes de $\tilde{M}_{i,j}$ appartiennent à l'idéal engendré par x_ix_j dans $\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n^S$. Si chacun des $f_{i,j}$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, la conclusion reste valide pour les $\tilde{N}_{i,j}(f)$.

LEMME 5.2. *Pour $1\le i,j\le n$, on a*

$$\{x_i,x_j\} = \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}_2^n,\\ \forall r\ (Q,\lambda^r)=\lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}}} g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q,$$

où les $g_{i,j,Q}$ appartiennent à $\mathcal{O}_p(V)$, V étant un voisinage de K. De plus, si l'on suppose que, pour $1\le i,j\le n$, les solutions $Q\in\mathbb{N}^2$, $2\le|Q|$, des équations $(Q,\lambda^r)=\lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}$ pour $1\le r\le p$ sont de la forme $Q = R+E_i+E_j$, $R\in\mathbb{N}_2^n$ alors

$$\{x_i,x_j\} = x_ix_j \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}_2^n,\\ \forall r\ (Q,\lambda^r)=0}} g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q.$$

C'est-à-dire que $\{x_i,x_j\}$ appartient à l'idéal de $\mathcal{O}_p(K)\otimes\mathcal{O}_n^S$ engendré par x_ix_j.

Preuve. Posons

$$\{x_i,x_j\} = \sum_{Q\in\mathbb{N}_2^n} g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q.$$

On rappelle, d'après le lemme 2.2, que $\{x_i,x_j\}$ est d'ordre supérieur ou égal à deux en $(0,x'')$. On a alors, pour $1\le k\le p$,

$$S_k(\{x_i,x_j\}) - \{x_i,x_j\}(\lambda_{k,i}+\lambda_{k,j}) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n,|Q|\ge 2} ((Q,\lambda^k)-(\lambda_{k,i}+\lambda_{k,j}))g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

D'autre part, on a, pour tout entier $d \geq 1$,

$$J^d(\tilde{N}_{i,j,m}(f)) = J^d(\tilde{N}_{i,j,m}(J^{d-1}(f))),$$

où $J^{d-1}(f)$ désigne la matrice dont les composantes sont les $J^{d-1}(f_{i,j})$ (les jets sont bien entendu en $(0, x'')$ en les variables x'). En utilisant la définition (5.4) de $N_{i,j,m}$, il est clair que si f est d'ordre supérieur ou égal à d alors $N_{i,j,m}(f)$ est d'ordre supérieur ou égal à $d+1$ (en fait, sous les hypothèses (H), l'ordre de $N_{i,j,m}(f)$ est supérieur ou égal à $d+5$). La multiplication par la matrice A^{-1} ne change rien quant à l'ordre. D'autre part, pour les mêmes raisons, $M_{i,j,m}$ est d'ordre supérieur ou égal à cinq. Il en est de même pour $\tilde{M}_{i,j,m}$.

Montrons alors le résultat par récurrence sur la longueur du multi-indice $|Q| \geq 2$. Pour $|Q| = 2$, l'analyse faite précédement montre que la composante de $(x')^Q$ du second membre de l'identité de Jacobi (5.5) est nulle. Lorsqu'il existe $1 \leq r \leq p$ tel que $(Q, \lambda^r) \neq \lambda_{r,i} + \lambda_{r,j}$ alors $g_{i,j,Q} \equiv 0$. L'assertion est donc vraie. Supposons la vraie jusqu'à l'ordre d. D'après ce qui précède, le coefficient de $(x')^Q$, $|Q| = d+1$, du second membre de l'identité de Jacobi (5.5) est la somme de celui de $\tilde{M}_{i,j}$ et de celui de $\tilde{N}_{i,j,m}(J^{d-1}(\{x_r, x_s\})_{1\leq r,s\leq n}))$. D'après le lemme précédent, s'il existe $1 \leq r \leq p$ tel que $(Q, \lambda^r) \neq \lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}$, alors ce coefficient est nul. On a alors $((Q, \lambda^r)-\lambda_{r,i}-\lambda_{r,j})g_{i,j,Q} \equiv 0$; c'est-à-dire $g_{i,j,Q} \equiv 0$. Ce qui achève la récurrence.

En ce qui concerne le deuxième point, il suffit de remarquer que si toute solution de $(Q, \lambda^r) = \lambda_{r,i} + \lambda_{r,j}$, pour $1 \leq r \leq p$, est de la forme $Q = R + E_i + E_j$ alors $(R, \lambda^r) = 0$ pour $1 \leq r \leq p$. □

Nous avons donc montré que, dans un bon système de coordonnées holomorphes, on peut écrire

$$P = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{p} a_{r,s}(x) S_s \right) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+r}} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}_2^n, \\ \forall r\ (Q,\lambda^r)=\lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}}} g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $a_{r,s} \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$ et $g_{i,j,Q} \in \mathcal{O}_p(V)$, V étant un voisinage de K.

Soient $\beta_1(x''), \ldots, \beta_n(x'')$ des fonctions holomorphes au voisinage de K telles que $\beta_i(0) = 1$.

Posons alors $x_i = \beta_i(y'')y_i$, $i = 1, \ldots, n$, et $x_{n+k} = y_{n+k}$ pour $k = 1, \ldots, p$. On notera $x = \Psi(y)$ cette transformation tangente à l'identité en 0. Dans ces nouvelles coordonnées, le crochet de Poisson $\{.,.\}'$ est défini par

$$\{f', g'\}'(y) = \{f' \circ \Psi^{-1}, g' \circ \Psi^{-1}\} \circ \Psi(y).$$

En particulier, on a, pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned}\{y_j, y_i\}' &= \left\{ \frac{x_j}{\beta_j(x'')}, \frac{x_i}{\beta_i(x'')} \right\} \circ \Psi(y) \\ &= \left(\frac{1}{\beta_j(x'')} \left\{ x_j, \frac{x_i}{\beta_i(x'')} \right\} + x_j \left\{ \frac{1}{\beta_j(x'')}, \frac{x_i}{\beta_i(x'')} \right\} \right) \circ \Psi(y)\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

$$= \left(\frac{1}{\beta_j(x'')} \left(\frac{1}{\beta_i(x'')} \{x_j, x_i\} + x_i \left\{ x_j, \frac{1}{\beta_i(x'')} \right\} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{x_j}{\beta_i(x'')} \left\{ \frac{1}{\beta_j(x'')}, x_i \right\} + x_i x_j \left\{ \frac{1}{\beta_j(x'')}, \frac{1}{\beta_i(x'')} \right\} \right) \circ \Psi(y)$$
$$= \left(\frac{\{x_j, x_i\}}{\beta_i(x'')\beta_j(x'')} + \frac{x_i}{\beta_j(x'')} \left\{ x_j, \frac{1}{\beta_i(x'')} \right\} - \frac{x_j}{\beta_i(x'')} \left\{ x_i, \frac{1}{\beta_j(x'')} \right\} \right) \circ \Psi(y)$$

grâce à l'identité de Leibnitz et au fait que $\{x_{n+k}, x_{n+l}\} = 0$ pour $1 \leq k, l \leq p$. Par définition, on a

$$\left\{ x_i, \frac{1}{\beta_j(x'')} \right\} = \frac{-1}{\beta_i^2(x'')} \sum_{k=1}^{p} \{x_{n+k}, x_i\} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_{n+k}}$$
$$= \frac{1}{\beta_j^2(x'')} \sum_{k=1}^{p} X_{k,i} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_{n+k}}$$
$$= x_i \frac{\Lambda_i(\beta_j)}{\beta_j^2(x'')} \mod \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{M}_n^2.$$

Par conséquent, le coefficient de $y_i y_j$ dans $\{y_j, y_i\}'$ est égal à

$$g_{j,i,E_i+E_j}(x'') + \frac{\Lambda_j(\beta_i)}{\beta_i(x'')} - \frac{\Lambda_i(\beta_j)}{\beta_j(x'')}.$$

En posant, $\beta_i(x'') = \exp \gamma_i$, ce coefficient s'écrit

$$g_{j,i,E_i+E_j}(x'') + \Lambda_j(\gamma_i) - \Lambda_i(\gamma_j). \tag{5.6}$$

LEMME 5.3. *Pour* $1 \leq i, j, k \leq n$, *on a*

$$\Lambda_j(g_{k,i,E_k+E_i}) - \Lambda_i(g_{k,j,E_k+E_j}) + \Lambda_k(g_{j,i,E_j+E_i}) = 0.$$

Preuve. Considérons l'identité de Jacobi

$$\{x_k, \{x_i, x_j\}\} + \{x_i, \{x_j, x_k\}\} + \{x_j, \{x_k, x_i\}\} = 0.$$

On a

$$\{x_k, \{x_i, x_j\}\} = \sum_{m=1}^{N} \{x_m, x_k\} \frac{\partial \{x_i, x_j\}}{\partial x_m}$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \{x_m, x_k\} \frac{\partial \{x_i, x_j\}}{\partial x_m} - \sum_{l=1}^{p} X_{l,k} \frac{\partial \{x_i, x_j\}}{\partial x_{n+l}}.$$

On a, pour $1 \leq m \leq n$,

$$\{x_m, x_k\} \frac{\partial \{x_i, x_j\}}{\partial x_m} = \left(\sum_{\substack{P \in \mathbb{N}_2^n \\ (P,\lambda) = \lambda_k + \lambda_m}} g_{m,k,P}(x')^P \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}_2^n, \\ (Q,\lambda) = \lambda_i + \lambda_j}} q_m g_{i,j,Q}(x')^{Q - E_m} \right),$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

où, afin d'alléger l'écriture, $(Q,\lambda) = \lambda_i + \lambda_j$ signifie dans les sommes : *pour tout* $1 \leq t \leq p$, $(Q,\lambda^t) = \lambda_{t,i} + \lambda_{t,j}$. On a aussi, pour $1 \leq l \leq p$,

$$X_{l,k}\frac{\partial\{x_i,x_j\}}{\partial x_{n+l}} = x_k\left(\sum_{s=1}^{p} a_{l,s}\lambda_{s,k}\right)\left(\sum_{\substack{P\in\mathbb{N}_2^n\\(P,\lambda)=\lambda_i+\lambda_j}} \frac{\partial g_{i,j,P}}{\partial x_{l+n}}(x')^P\right).$$

Prenons le jet d'ordre 3 en $0 \in \mathbb{C}^n$ (i.e. en x′) de ces expressions. Il vient

$$J^3\left(\{x_m,x_k\}\frac{\partial\{x_i,x_j\}}{\partial x_m}\right) = \left(\sum_{\lambda_r+\lambda_s=\lambda_k+\lambda_m} g_{m,k,E_r+E_s}x_r x_s\right)\left(\sum_{\lambda_r+\lambda_m=\lambda_i+\lambda_j} g_{i,j,E_r+E_m}x_r\right)$$

et

$$J^3\left(X_{l,k}\frac{\partial\{x_i,x_j\}}{\partial x_{n+l}}\right) = \lambda_{l,k}x_k\left(\sum_{\lambda_r+\lambda_s=\lambda_i+\lambda_j}\frac{\partial g_{i,j,E_r+E_s}}{\partial x_{l+n}}x_r x_s\right).$$

Le coefficient de $x_k x_i x_j$ dans

$$\sum_{m=1}^{n} J^3\left(\{x_m,x_k\}\frac{\partial\{x_i,x_j\}}{\partial x_m}\right)$$

est

$$g_{i,j,E_i+E_j}(g_{j,k,E_k+E_j} + g_{i,k,E_k+E_i}).$$

Celui de

$$\sum_{l=1}^{p} J^3\left(X_{l,k}\frac{\partial\{x_i,x_j\}}{\partial x_{n+l}}\right)$$

est

$$\sum_{l=1}^{p}\lambda_{l,k}\frac{\partial g_{i,j,E_i+E_j}}{\partial x_{l+n}} = \Lambda_k(g_{i,j,E_i+E_j}).$$

On trouve alors que l'on a

$$\begin{aligned}
&\Lambda_j(g_{k,i,E_k+E_i}) - \Lambda_i(g_{k,j,E_k+E_j}) + \Lambda_k(g_{j,i,E_j+E_i})\\
&\quad= g_{k,i,E_k+E_i}(g_{i,j,E_j+E_i} + g_{k,j,E_k+E_j}) - g_{k,j,E_k+E_j}(g_{j,i,E_j+E_i} + g_{k,i,E_k+E_i})\\
&\qquad + g_{i,j,E_j+E_i}(g_{i,k,E_k+E_i} + g_{j,k,E_k+E_j})\\
&\quad= 0. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

□

LEMME 5.4. *Il existe des fonctions $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ holomorphes au voisinage de K dans $\mathbb{C}^p$ et nulles à l'origine telles que si l'on pose $x_i = \exp\gamma_i(y'')y_i$, $1 \leq i \leq n$, alors le coefficient de $y_i y_j$ dans $\{y_i,y_j\}'$ est constant ; il est même nul si i ou j est inférieur ou égal à p.*

Preuve. Rappelons que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\Lambda_i = \sum_{k=1}^{p}\lambda_{k,i}\frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Par hypothèse, on peut supposer que $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées $y'' = Bx''$, on peut supposer que, pour $1 \le k \le p$,

$$\Lambda_k = \frac{\partial}{\partial x_{n+k}}.$$

On notera $K' := BK$ le bon compact de 0. Dans ces nouvelles coordonnées, on a

$$P = \sum_{r=1}^{p} Y_r(x', y'') \wedge \frac{\partial}{\partial y_{n+r}} + \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}_2^n, \\ \forall r \ (Q,\lambda^r) = \lambda_{r,i} + \lambda_{r,j}}} \tilde{g}_{i,j,Q}(y'')(x')^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $\tilde{g}_{i,j,Q}(y'') := g_{i,j,Q}(B^{-1}y'') \in \mathcal{O}_p(V')$, $V' = BV$, V voisinage K et

$$\begin{pmatrix} Y_1(x', y'') \\ \vdots \\ Y_p(x', y'') \end{pmatrix} = {}^tB^{-1} \begin{pmatrix} X_1(x', B^{-1}y'') \\ \vdots \\ Y_p(x', B^{-1}y'') \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\gamma_{1,i}(y'') = \int_0^{y_{n+1}} \tilde{g}_{1,i,E_1+E_i}(t, y_{n+2}, \ldots, y_N)\, dt \quad 1 \le i \le n,$$
$$x_i = \exp(\gamma_{1,i}(y''))y_i \quad 1 \le i \le n.$$

On a $\gamma_{1,i}(0) = 0$ et $\gamma_{1,1} \equiv 0$. Les $\gamma_{1,i}$ sont holomorphes sur $(\mathbb{C}^n, 0) \times V'$. Si i et j sont distincts de 1 et inférieurs à p , on a

$$\begin{aligned}
&\Lambda_j(\gamma_{1,i}) - \Lambda_i(\gamma_{1,j}) \\
&\quad = \int_0^{y_{n+1}} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{1,i,E_1+E_i}(t, y_{n+2}, \ldots, y_N)}{\partial x_{n+j}} - \frac{\partial \tilde{g}_{1,j,E_1+E_j}(t, y_{n+2}, \ldots, y_N)}{\partial x_{n+i}} \right) dt \\
&\quad = \int_0^{y_{n+1}} \frac{\partial \tilde{g}_{i,j,E_i+E_j}(t, y_{n+2}, \ldots, y_N)}{\partial t}\, dt \quad \text{(grâce à (5.7))} \\
&\quad = \tilde{g}_{i,j,E_i+E_j}(y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_N) - \tilde{g}_{i,j,E_i+E_j}(0, y_{n+2}, \ldots, y_N).
\end{aligned}$$

D'après (5.6), le coefficient de $y_i y_j$ dans $\{y_i, y_j\}'$ est

$$\tilde{g}^{(2)}_{i,j,E_i+E_j}(y_{n+2}, \ldots, y_N) := \tilde{g}_{i,j,E_i+E_j}(0, y_{n+2}, \ldots, y_N) \quad 2 \le i, j \le p.$$

De plus, si $1 \le j \le n$, on a

$$\tilde{g}_{1,j,E_1+E_j}(y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_N) - \Lambda_1(\gamma_{1,j}) = 0.$$

Donc, d'après (5.6), le coefficient $\tilde{g}^{(2)}_{1,j,E_1+E_j}(y_{n+2}, \ldots, y_N)$ de $y_1 y_j$ dans $\{y_1, y_j\}'$ est nul pour $1 \le j \le n$. Puisque l'on transforme un crochet de Poisson en un autre, alors les nouveaux coefficients vérifient encore l'équation de cocycle (5.7) (les Λ_i sont invariants par le changement de coordonnées). En y posant $k = 1$, il vient

$$\Lambda_1(\tilde{g}^{(2)}_{i,j,E_i+E_j}) = 0 \quad 1 \le i, j \le n.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

On montre par récurrence sur l'entier $1 \leq d \leq p$ qu'il existe des fonctions $\gamma_{d,i}$, $1 \leq i \leq n$, holomorphes sur $(\mathbb{C}^n, 0) \times V'$ et nulles en 0 telles qu'en posant

$$x_i = \exp(\gamma_{d,i}(y''))y_i \quad 1 \leq i \leq n,$$

les coefficients $g^{(d+1)}_{i,j,E_i+E_j}$ de $y_i y_j$ dans $\{y_i, y_j\}'$ vérifient

(1) $g^{(d+1)}_{i,j,E_i+E_j} \equiv 0$ pour $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq n$,

(2) les $g^{(d+1)}_{i,j,E_i+E_j}$, $1 \leq i, j \leq p$, ne dépendent que de $x_{n+d+1}, \ldots, x_{n+p}$, et

(3) $\Lambda_k(g^{(d+1)}_{i,j,E_i+E_j}) \equiv 0$ pour $1 \leq k \leq d$ et $1 \leq i, j \leq n$.

D'après ce qui précède, cela est vrai pour $d = 1$. Supposons que cela soit vrai pour tout $d \leq k < p$. Posons alors

$$\gamma_{k,i}(y'') = \int_0^{y_{n+k}} \tilde{g}^{(k)}_{k,i,E_k+E_i}(t, y_{n+k+1}, \ldots, y_N)\, dt \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$x_i = \exp(\gamma_{k,i}(y''))y_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Comme plus haut, on a, pour $1 \leq i, j \leq p$ distincts de k,

$$\Lambda_j(\gamma_{k,i}) - \Lambda_i(\gamma_{k,j}) = g^{(k)}_{i,j,E_i+E_j}(y_{n+k}, \ldots, y_N) - g^{(k)}_{i,j,E_i+E_j}(0, y_{n+k+1}, \ldots, y_N).$$

Le coefficient $g^{(k+1)}_{i,j,E_i+E_j}$ de $y_i y_j$ dans $\{y_i, y_j\}'$, pour $1 \leq i, j \leq p$ distincts de k, est donc

$$g^{(k+1)}_{i,j,E_i+E_j} := g^{(k)}_{i,j,E_i+E_j}(0, y_{n+k+1}, \ldots, y_N).$$

En particulier, pour $1 \leq i < k$ et $1 \leq j \leq p$,

$$g^{(k+1)}_{i,j,E_i+E_j} \equiv 0$$

et

$$g^{(k+1)}_{i,j,E_i+E_j} = g^{(k)}_{i,j,E_i+E_j} + \Lambda_i(\gamma_{k,j}) - \Lambda_j(\gamma_{k,i}),$$

pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n$. Pour $i = k$, on obtient

$$g^{(k+1)}_{k,j,E_k+E_j} = g^{(k)}_{k,j,E_k+E_j} - \Lambda_k(\gamma_{k,j}) \equiv 0.$$

Or, les $\gamma_{k,j}$ ne dépendent que de $x_{n+k}, \ldots, x_{n+p}$. Donc, $\Lambda_i(\gamma_{k,j}) = \partial\gamma_{k,j}/\partial x_{n+i} = 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$. De plus, d'après les propriétés du crochet de Poisson, on a $\tilde{g}^{(k)}_{k,i,E_k+E_i} = -\tilde{g}^{(k)}_{i,k,E_k+E_i}$. Par hypothèse de récurrence, $\tilde{g}^{(k)}_{i,k,E_k+E_i}$ est nul pour $i < k$; il en est donc de même pour $\gamma_{k,i}$. Par conséquent, pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n$, on a

$$g^{(k+1)}_{i,j,E_i+E_j} = g^{(k)}_{i,j,E_i+E_j} \equiv 0.$$

En utilisant la relation de cocycle (5.7) dans les nouvelles coordonnées, on obtient alors

$$\Lambda_d(\tilde{g}^{(k+1)}_{i,j,E_i+E_j}) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

pour $1 \leq d \leq k$. Ce qui démontre la récurrence.

Ainsi, pour $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$\tilde{g}^{(p+1)}_{k,j,E_k+E_j} \equiv 0$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

et

$$\Lambda_k(\tilde{g}^{(p+1)}_{i,j,E_i+E_j}) = 0.$$

Puisque les fonctions $\tilde{g}^{(p+1)}_{i,j,E_i+E_j}$ ne dépendent que des variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$, alors, pour $1 \leq i, j \leq n$, $\tilde{g}^{(p+1)}_{i,j,E_i+E_j}$ est constant. Dans ces nouvelles coordonnées, le champ Y_k est transformé en

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_k(y', y'') &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_{k,i}(y', y'')\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \exp(\gamma_i(y''))Y_{k,i}(\exp(-\gamma_1(y''))y_1, \ldots, \exp(-\gamma_n(y''))y_n, y'')\frac{\partial}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

La partie linéaire reste donc inchangée. Il ne reste plus qu'à faire le changement de variables $x'' = B^{-1}y''$. □

Finalement, nous avons montré que, dans un bon système de coordonnées holomorphes, on peut écrire

$$\begin{aligned}P = &\sum_{r=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{p}\tilde{a}_{r,s}(x)S_s\right) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+r}} + \sum_{p+1\leq i<j\leq n} c_{i,j}x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}_2^n,\\ Q\neq E_i+E_j \\ \forall r\ (Q,\lambda^r)=\lambda_{r,i}+\lambda_{r,j}}} g_{i,j,Q}(x'')(x')^Q\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},\end{aligned} \tag{5.8}$$

où $\tilde{a}_{r,s} \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$, $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $g_{i,j,Q} \in \mathcal{O}_p(V)$, V étant un voisinage de K dans $\mathbb{C}^p$.

6. *Preuve du théorème 3.2*

Appliquons tout d'abord le théorème précédent et posons

$$X_i(x) := \sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_{i,j}(x)S_j,$$

avec $\tilde{a}_{i,j} \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$. Nous désignerons par A la matrice dont les éléments sont les $\tilde{a}_{i,j}$. Commençons par démontrer le lemme suivant.

LEMME 6.1. *Il existe p familles champs de vecteurs A_i appartenant à $\mathcal{O}_p(K) \otimes (\mathcal{X}_n^1)^S$ tel que*

$$P = \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+i}} + A_i\right).$$

Nous poserons, dans la suite,

$$\tilde{A}_i := \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} + A_i\ ; \quad \tilde{P} := \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge A_i.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Nous reprenons les arguments de Dufour [**Duf91**]. Par hypothèse, le rang de P est $2p$; donc

$$\underbrace{P \wedge P \wedge \cdots \wedge P}_{(p+1)\text{fois}} = 0.$$

Le terme de cette équation qui contient $\partial/\partial x_{n+1} \wedge \cdots \wedge \partial/\partial x_{n+p}$ donne l'équation

$$\tilde{P} \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_p = 0.$$

De plus, $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p = (\det A)\, S_1 \wedge \cdots \wedge S_p$ et $\det A$ est une unité dans $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$. Soit I l'idéal engendré par les coefficients de $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p$ dans $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$. C'est l'idéal engendré par les monômes $x_{i_1} \cdots x_{i_p}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$. Soient

- $a := x_1 \cdots x_p$,
- $b := \sum_{i=1}^{p} x_1 \cdots x_{i-1} \hat{x}_i x_{i+1} \cdots x_{p+1}$ et
- $c := \sum_{1 \leq i < j \leq p}^{p} x_1 \cdots x_{i-1} \hat{x}_i x_{i+1} \cdots x_{j-1} \hat{x}_j x_{j+1} \cdots x_{p+2}$.

Comme d'habitude, $\hat{x}_i$ signifie que la variable x_i est absente ; on rappel que l'on a supposé $n > p + 1$. Alors, $a \in I$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$, $b \in I$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n/(a)$ et $c \in I$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n/(a, b)$. Par conséquent, la profondeur de l'idéal I est supérieure à trois. Or, d'après le théorème de Frisch [**Fri67, Siu69**], les anneaux $\mathcal{O}_p(K)$ et $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$ sont noethériens. D'après le théorème de Saito [**Sai76**], il existe alors p familles champs de vecteurs A_i appartenant à $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{X}_n$ tel que

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge A_i.$$

Puisque $\tilde{P}$ est d'ordre supérieur à deux en x', on peut choisir A_i nul en $(0, x'')$. Montrons alors que l'on peut choisir des A_i qui commutent avec les S_i. En effet, on a

$$\tilde{P} = \sum_{p+1 \leq i < j \leq n} c_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}_2^n, \\ Q \neq E_i + E_j \\ \forall r\ (Q, \lambda^r) = \lambda_{r,i} + \lambda_{r,j}}} \tilde{g}_{i,j,Q}(X'')(X')^Q \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Par conséquent, pour tout $g \in \mathfrak{g}$, $[S(g), \tilde{P}] = 0$ (d'après le lemme 1.3). On a aussi

$$[S(g), \tilde{P}] = \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge [S(g), A_i],$$

car les X_i commutent aux S_j. Décomposons ensuite chaque A_i selon les espaces de poids de S dans l'espaces des champs de vecteurs (en fait, il faudrait faire cette décomposition dans chaque espace de champs de bi-vecteurs de $\mathbb{C}^n$ homogènes à coefficients dans

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{O}_p(K)$). On a alors

$$0 = [S(g), \tilde{P}] = \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge \sum_{\alpha} \alpha(g) A_{i,\alpha}$$
$$= \sum_{\alpha} \alpha(g) \Big(\sum_{i=1}^{p} X_i \wedge A_{i,\alpha} \Big).$$

Puisque les X_i sont de poids nuls, l'égalité précédente définit la décomposition de $[S(g), \tilde{P}]$ selon les espaces de poids de S dans l'espaces des germes de champs de bi-vecteurs nul à l'origine. Les espaces de cette décomposition étant en somme directe, on a, pour tout $\alpha \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \wedge A_{i,\alpha} = 0$$

et on a

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge A_i = \sum_{i=1}^{p} X_i \wedge A_{i,0}.$$

Par définition, pour tout $g \in \mathfrak{g}$, $[S(g), A_{i,0}] = 0$. □

Puisque P est une structure de Poisson, on a $[P, P] = 0$. En développant, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i,j=1}^{p} [X_i \wedge \tilde{A}_i, X_j \wedge \tilde{A}_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^{p} [X_i \wedge \tilde{A}_i, X_j] \wedge \tilde{A}_j - X_j \wedge [X_i \wedge \tilde{A}_i, \tilde{A}_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^{p} [X_j, X_i] \wedge \tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j + X_i \wedge [X_j, \tilde{A}_i] \wedge \tilde{A}_j \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{p} -X_j \wedge [X_i, \tilde{A}_j] \wedge \tilde{A}_i - X_j \wedge X_i \wedge [\tilde{A}_j, \tilde{A}_i] \\
&= 2\Big(\sum_{i,j=1}^{p} X_i \wedge [X_j, \tilde{A}_i] \wedge \tilde{A}_j - \sum_{1 \leq i < j \leq p} X_j \wedge X_i \wedge [\tilde{A}_j, \tilde{A}_i] \Big). \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

Prenons le terme qui contient $\partial/\partial x_{n+j}$, il verifie alors

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \wedge [X_j, \tilde{A}_i] = 0. \qquad (6.2)$$

On en déduit

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p} X_j \wedge X_i \wedge [\tilde{A}_j, \tilde{A}_i] = 0. \qquad (6.3)$$

En faisant le produit de (6.2) par $X_1 \wedge \cdots \wedge X_{j-1} \wedge X_{j+1} \wedge \cdots \wedge X_p$, on obtient

$$[X_j, \tilde{A}_i] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_p = 0.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

En appliquant le théorème de Saito, il existe alors des famille de fonctions $\theta_{i,j}^l \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$ telles que

$$[\tilde{A}_i, X_j] = \sum_{l=1}^{p} \theta_{i,j}^l X_l. \tag{6.4}$$

De surcroît, on a

$$[S(g), [\tilde{A}_i, X_j]] = -[\tilde{A}_i, [X_j, S(g)]] - [X_j, [S(g), \tilde{A}_i]].$$

Or, par définition, $[X_j, S(g)] = 0$ et par le lemme précédent, $[S(g), \tilde{A}_i] = 0$ ($S(g)$ ne dépend pas de x''). On en déduit que $S(g)(\theta_{i,j}^l) = 0$; c'est-à-dire $\theta_{i,j}^l \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$. En reinjectant l'expression (6.4) dans l'équation (6.2), on obtient que $\theta_{i,j}^l = \theta_{l,j}^i$. Prenons le 1-jet de l'équation (6.4) et posons $J^1(A_i) = \sum_{k,l=1}^n A_{i,k,l}^1(x'')x_k \partial/\partial x_l$. On a alors

$$\sum_{k,l=1}^{n} (\lambda_{j,k} - \lambda_{j,l}) A_{i,k,l}^1(x'') x_k \frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{p} \theta_{i,j}^l(0, x'') \lambda_{l,k} \right) x_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Donc, pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$\sum_{l=1}^{p} \theta_{i,j}^l(0, x'') \lambda_{l,k} = 0.$$

Or, par hypothèse, la famille $\{S_i\}_{i=1}^p$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}$. Donc, pour tout i, j, l, $\theta_{i,j}^l(0, x'') \equiv 0$.

En faisant le produit de (6.3) par $X_1 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_{j-1} \wedge X_{j+1} \wedge \cdots \wedge X_p$, on obtient

$$[\tilde{A}_j, \tilde{A}_i] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_p = 0.$$

En appliquant le théorème de Saito, il existe alors des familles de fonctions $\gamma_{i,j}^l \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n$ telles que

$$[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] = \sum_{l=1}^{p} \gamma_{i,j}^l X_l. \tag{6.5}$$

De surcroît, on a

$$[S_k, [\tilde{A}_i, \tilde{A}_j]] = -[\tilde{A}_i, [\tilde{A}_j, S_k]] - [\tilde{A}_j, [S_k, \tilde{A}_i]] = 0.$$

On en déduit que, pour $1 \leq k \leq p$, $S_k(\gamma_{i,j}^l) = 0$; donc $\gamma_{i,j}^l \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$.

Reinjectons l'égalité (6.5) dans l'équation (6.1). On obtient

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{l=1}^{p} \gamma_{i,j}^l X_l \wedge X_i \wedge X_j = 0.$$

En prenant les coefficients de $X_l \wedge X_i \wedge X_j$ avec $l < i < j$, on en déduit que l'on a

$$\gamma_{i,j}^l = \gamma_{l,j}^i. \tag{6.6}$$

Montrons par récurrence sur l'entier $1 \leq q \leq p$ qu'il existe un changement de coordonnées holomorphes dans lequel $\tilde{A}_i = \partial/\partial x_{n+i}$, pour $1 \leq i \leq q$.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Pour $q = 1$, considérons le flot $\phi_{1,t}(x', x'')$ de $\tilde{A}_1$ et posons

$$\psi_1(x', x'') := \phi_{1,x_{n+1}}(x', 0, x_{n+2}, \ldots, x_N).$$

C'est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine qui est tangent à l'identité en ce point et qui vérifie $(\psi_1^{-1})_* \tilde{A}_1 = \partial/\partial x_{n+1}$. Ce flot vérifie le système d'équations différentielles suivantes

$$\frac{d\psi_{1,t,i}}{dt}(x', x'') = A_i(\psi_{1,t}(x)) \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{d\psi_{1,t,n+1}}{dt}(x', x'') = 1,$$

$$\frac{d\psi_{1,t,n+j}}{dt}(x', x'') = 0 \quad j = 2, \ldots, p,$$

où $\psi_{1,t,i}$ désigne la $i$ème coordonnées de $\psi_{1,t}$. En particulier, ψ_1 laisse invariante chacune des coordonnées x_{n+j}, $j = 1, \ldots, p$. Appliquons la méthode du chemin [**Cha86**, Appendice 0]. On obtient, pour $1 \leq k \leq p$,

$$\frac{d((\psi_1^{-1})_* S_k)}{dx_{n+1}} = (\psi_1^{-1})_*([\tilde{A}_1, S_k]) = 0.$$

On en déduit que

$$(\psi_1^{-1})_* S_k = (S_k)|_{x_{n+1}=0} = S_k \ ;$$

c'est-à-dire, ψ_1^{-1} préserve chacun des champs S_k. Soit alors $f \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$ alors $(\psi_1^{-1})_* f = f \circ \psi_1^{-1} \in \mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$. En effet,

$$0 = (\psi_1^{-1})_*(S(g)(f)) = (\psi_1^{-1})_* S(g)(f \circ \psi_1^{-1}) = S(g)(f \circ \psi_1^{-1}).$$

Il en est de même pour les éléments de $\mathcal{O}(K) \otimes (\mathcal{X}_n^1)^S$. On a alors

$$X_k'(x) := (\psi_1^{-1})_* X_k = \sum_{l=1}^{p} (\tilde{a}_{k,l} \circ \psi_1^{-1}) S_l.$$

On posera $\tilde{a}'_{k,l} = \tilde{a}_{k,l} \circ \psi_1^{-1}$. Par conséquent, dans ces nouvelles coordonnées, on peut écrire

$$P = \sum_{i=1}^{p} X_i'(x) \wedge \tilde{A}_i'$$

avec $\tilde{A}_1' = \partial/\partial x_{n+1}$ et $[\tilde{A}_1', S_k'] = 0$. Afin d'alléger le texte, nous continuerons à écrire X_i à la place de X_i' (etc.) lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

Supposons que l'assertion soit vraie pour $1 \leq i \leq q-1$, c'est-à-dire $A_1 = \cdots = A_{q-1} = 0$.

Commençons par faire un changement de coordonnées qui transforme $\tilde{A}_q$ en $\partial/\partial x_{n+q} + \sum_{j=1}^{p} c_{q,j} X_j$ où $c_{i,j} \in \mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$, K' étant un bon compact de l'origine de $\mathbb{C}^p$. On demande aussi que ce changement n'affecte pas ni les $\tilde{A}_i = \partial/\partial x_{n+i}$, $1 \leq i \leq q-1$, ni les S_j, $1 \leq j \leq p$. Pour ce faire, cherchons des fonctions $\beta_{q,l}$ telles que, pour $1 \leq i \leq q-1$,

$$0 = \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_q - \sum_{j=1}^{p} \beta_{q,j} X_j\right] = \sum_{j=1}^{p} \left(\gamma_{i,q}^{j} - \frac{\partial \beta_{q,j}}{\partial x_{n+i}}\right) X_j - \beta_{q,j}[\tilde{A}_i, X_l].$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Nous avons utilisé les équations (6.5) dans la dernière égalité. En utilisant les égalités (6.4), on obtient, pour $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq i \leq q-1$,

$$\frac{\partial \beta_{q,k}}{\partial x_{n+i}} = -\left(\sum_{l=1}^{p} \theta_{i,l}^{k} \beta_{q,l}\right) + \gamma_{i,q}^{k}. \tag{6.7}$$

On écrira ces équations sous forme matricielle de la manière suivante

$$\frac{\partial \beta_q}{\partial x_{n+i}} = -\Theta_i \beta_q + \gamma_{i,q} \quad i = 1, \ldots, q-1, \tag{6.8}$$

où β_q désigne le vecteur de coordonnées $\beta_{q,1}, \ldots, \beta_{q,p}$, $\Theta_i = (\theta_{i,l}^{k})_{1 \leq k,l \leq p}$ et $\gamma_{i,q}$ désigne le vecteur de coordonnées $\gamma_{i,q}^{1}, \ldots, \gamma_{i,q}^{p}$. Pour $1 \leq i, j < q$, $\tilde{A}_i$ et $\tilde{A}_j$ commutent entre eux. Par l'égalité de Jacobi, on a alors, pour $1 \leq i, j < q$,

$$[\tilde{A}_i, [\tilde{A}_j, \tilde{A}_q]] = [\tilde{A}_j, [\tilde{A}_i, \tilde{A}_q]],$$

soit,

$$\left[\tilde{A}_i, \sum_{k=1}^{p} \gamma_{j,q}^{k} X_k\right] = \left[\tilde{A}_j, \sum_{k=1}^{p} \gamma_{i,q}^{k} X_k\right] \quad \text{(par (6.5))},$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \gamma_{j,q}^{k}}{\partial x_{n+i}} X_k + \gamma_{j,q}^{k} [\tilde{A}_i, X_k] = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \gamma_{i,q}^{k}}{\partial x_{n+j}} X_k + \gamma_{i,q}^{k} [\tilde{A}_j, X_k],$$

soit, finalement,

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \gamma_{j,q}^{k}}{\partial x_{n+i}} + \left(\sum_{l=1}^{p} \gamma_{j,q}^{l} \theta_{i,l}^{k}\right)\right) X_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \gamma_{i,q}^{k}}{\partial x_{n+j}} + \left(\sum_{l=1}^{p} \gamma_{i,q}^{l} \theta_{j,l}^{k}\right)\right) X_k \quad \text{(par (6.4))}.$$

En d'autres termes, les équations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial \gamma_{i,q}}{x_{n+j}} + \Theta_j \gamma_{i,q} = \frac{\partial \gamma_{j,q}}{x_{n+i}} + \Theta_i \gamma_{j,q} \quad 1 \leq i, j < q. \tag{6.9}$$

D'autre part, par l'identité de Jacobi, on a aussi, pour tous $1 \leq i, j \leq q-1$ et $1 \leq l \leq p$,

$$[\tilde{A}_i, [\tilde{A}_j, X_l]] = [\tilde{A}_j, [\tilde{A}_i, X_l]],$$

soit,

$$\left[\tilde{A}_i, \sum_{k=1}^{p} \theta_{j,l}^{k} X_k\right] = \left[\tilde{A}_j, \sum_{k=1}^{p} \gamma_{i,l}^{k} X_k\right] \quad \text{(par (6.4))},$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \theta_{j,l}^{k}}{\partial x_{n+i}} + \left(\sum_{m=1}^{p} \theta_{j,l}^{m} \theta_{i,m}^{k}\right)\right) X_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \theta_{i,l}^{k}}{\partial x_{n+j}} + \left(\sum_{m=1}^{p} \theta_{i,l}^{m} \theta_{j,m}^{k}\right)\right) X_k \quad \text{(par (6.4))}.$$

En d'autres termes, les équations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial \Theta_j}{x_{n+i}} + \Theta_i \Theta_j = \frac{\partial \Theta_i}{x_{n+j}} + \Theta_j \Theta_i \quad 1 \leq i, j < q. \tag{6.10}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

En utilisant les équations (6.9) et (6.10), on obtient, pour $1 \leq i, j < q$ et pour tout $v \in \mathbb{C}^p$,

$$-\frac{\partial \Theta_j}{x_{n+i}} v + \frac{\partial \gamma_{j,q}}{\partial x_{n+i}} + \frac{\partial \Theta_i}{x_{n+j}} v - \frac{\partial \gamma_{i,q}}{\partial x_{n+j}} + \Theta_i(-\Theta_j v + \gamma_{j,q}) - \Theta_j(-\Theta_i v + \gamma_{i,q}) = 0.$$

Ces équations ne sont autres que les *équations de compatibilité* du système (6.8) (quitte à rajouter des équations 'vides' $\partial \beta_q / \partial z_r = 0, r = 1, \ldots, p - q + 1$ afin de rendre 'carré' le système). Par conséquent, le système d'équations (6.8) admet une unique solution holomorphe sur un voisinage $U' \subset K$ de l'origine de $\mathbb{C}^p$ et nulle en ce point [**Die60**, Théorème de Frobenius 10.9.4]. Ce voisinage contient un bon compact K' de 0. De plus, cette solution dépend holomorphiquement des paramètres x' dans un certain voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$. D'après ce qui précède, les $\gamma_{i,q}^j$ (respectivement $\theta_{i,k}^l$) appartiennent à $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$. Alors les $\beta_{q,j}$ appartiennent à $\mathcal{O}_p(K) \otimes \mathcal{O}_n^S$. En effet, les opérateurs de dérivation $\partial/\partial x_{n+i}$ et S_k commutent deux à deux. En prenant la dérivée de Lie le long de S_k des équations (6.8), on obtient

$$\frac{\partial S_k(\beta_q)}{\partial x_{n+i}} = -\Theta_i S_k(\beta_q) \quad i = 1, \ldots, q-1,$$

système qui admet une unique solution nulle à l'origine—à savoir—$S_k(\beta_q) \equiv 0$.

Ainsi, on a, pour $1 \leq i \leq p$,

$$\left[S_i, \tilde{A}_q - \sum_{j=1}^{p} \beta_{q,j} X_j \right] = 0.$$

On peut donc redresser, par un difféomorphisme holomorphe G_q, $\tilde{A}_q - \sum_{j=1}^p \beta_{q,j} X_j$ en $\partial/\partial x_{n+q}$ tout en préservant les $\partial/\partial x_{n+i}$, $1 \leq i \leq q-1$, les S_j, $1 \leq j \leq p$ ainsi que les coordonnées x_{n+i}, $\leq i \leq p$. Dans ces nouvelles coordonnées, $\tilde{A}'_q := (G_q)_* \tilde{A}_q$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_{n+q}} + \sum_{j=1}^{p} c_{q,j} X'_j, \tag{6.11}$$

avec $c_{q,j} = \beta_{q,j} \circ G_q \in \mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$, $X'_i := (G_q)_* X_i = \sum_{l=1}^p \tilde{a}'_{i,l} S_l$ et $\tilde{a}'_{i,l} = \tilde{a}'_{i,l} \circ G_q \in \mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$.

On ne modifie pas P si l'on rajoute $\sum_{l=1}^p f_{i,l} X'_l$ à $\tilde{A}'_i$, $1 \leq i \leq p$, lorsque $f_{i,l} = f_{l,i}$:

$$\sum_{i=1}^{p} X'_i \wedge \left(\tilde{A}'_i + \sum_{l=1}^{p} f_{i,l} X'_l \right) = \sum_{i=1}^{p} X'_i \wedge \tilde{A}'_i.$$

Cherchons alors de telles fonctions vérifiant en outre

$$\left[\tilde{A}'_i + \sum_{l=1}^{p} f_{i,l} X'_l, \tilde{A}'_j + \sum_{l=1}^{p} f_{j,l} X'_l \right] = 0$$

pour $1 \leq i, j \leq q$ et $f_{i,l} = 0$ si $i > q$. En utilisant (6.4), on obtient, pour tous $1 \leq i, j < q$,

$$\frac{\partial f_{j,k}}{\partial x_{n+i}} + \sum_{l=1}^{p} f_{j,l} \theta_{i,l}^k - \frac{\partial f_{i,k}}{\partial x_{n+j}} + \sum_{l=1}^{p} f_{i,l} \theta_{j,l}^k = 0.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

C'est-à-dire, en posant f_i le vecteur de coorodonnées $f_{i,j}$,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_{n+i}} - \Theta_j f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}} + \Theta_i f_j = 0. \tag{6.12}$$

Lorsque $1 \leq i < q$ et $j = q$, on obtient

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_{n+i}} - \Theta_q f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+q}} + \Theta_i f_q = -\Theta_i c_q - \frac{\partial c_q}{\partial x_{n+i}}, \tag{6.13}$$

car, grâce à (6.11), il suffit de rajouter $c_{q,i}$ à $f_{q,i}$ dans l'équation (6.12) pour obtenir le résultat.

Soit g_q le vecteur de coordonnées $g_{q,i} \in \mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$ et posons

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_q}{\partial x_{n+i}} - \Theta_i g_q &= f_i \quad 1 \leq i < q, \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_{n+q}} - \Theta_q g_q &= f_q + c_q. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Alors, les f_i sont solutions du système d'équations (6.12)–(6.13). En effet, ces dernières ne sont autres que les équations de compatibilités du système (6.14) d'inconnue g_q.

Il nous reste à montrer qu'il existe g_q tel que les $f_{i,j}$ vérifient la condition de symmétrie $f_{i,j} = f_{j,i}$. Cela s'écrit, pour $1 \leq i, j < q$,

$$\frac{\partial g_{q,j}}{\partial x_{n+i}} - \sum_{k=1}^{p} \theta_{i,k}^j g_{q,k} = \frac{\partial g_{q,i}}{\partial x_{n+j}} - \sum_{k=1}^{p} \theta_{j,k}^i g_{q,k}.$$

Pour $1 \leq i < q$, on obtient

$$\frac{\partial g_{q,q}}{\partial x_{n+i}} - \sum_{k=1}^{p} \theta_{i,k}^q g_{q,k} = \frac{\partial g_{q,i}}{\partial x_{n+q}} - \sum_{k=1}^{p} \theta_{q,k}^i g_{q,k} - c_{q,i}.$$

Or, comme on l'a vu plus haut, $\theta_{i,k}^q = \theta_{q,k}^i$. Les équations précédentes sont donc équivalentes au système

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{q,j}}{\partial x_{n+i}} &= \frac{\partial g_{q,i}}{\partial x_{n+j}} \quad 1 \leq i, j < q, \\ \frac{\partial g_{q,q}}{\partial x_{n+i}} &= \frac{\partial g_{q,i}}{\partial x_{n+q}} - c_{q,i}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Posons

$$\begin{aligned} d_{i,l} &:= 0 \quad 1 \leq i, l < q, \\ d_{q,l} &:= c_{q,l} \quad l < q. \end{aligned}$$

Si $i, j, k < q$, on a

$$\frac{\partial d_{j,q}}{\partial x_{n+i}} - \frac{\partial d_{k,i}}{\partial x_{n+j}} + \frac{\partial d_{i,j}}{\partial x_{n+k}} = 0,$$

car $d_{j,k} = d_{i,j} = d_{k,i} = 0$. Lorsque $k = q$, on obtient

$$\frac{\partial d_{j,q}}{\partial x_{n+i}} - \frac{\partial d_{q,i}}{\partial x_{n+j}} + \frac{\partial d_{i,j}}{\partial x_{n+q}} = \frac{\partial c_{q,i}}{\partial x_{n+j}} - \frac{\partial c_{q,j}}{\partial x_{n+i}}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Comme nous l'avons vu dans la preuve du lemme 5.4, pour résoudre le système (6.15) d'inconnues $g_{q,i}$, il suffit de vérifier les conditions de compatibilités

$$\frac{\partial c_{q,j}}{\partial x_{n+i}} = \frac{\partial c_{q,i}}{\partial x_{n+j}} \quad i, j < q. \tag{6.16}$$

Or, lorsque $1 \leq i < q$, on a, d'une part,

$$[\tilde{A}'_i, \tilde{A}'_q] = \sum_{k=1}^{p} \gamma_{i,q}^k X'_k \quad \text{(d'après (6.5))} ;$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}[\tilde{A}'_i, \tilde{A}'_q] &= \left[\tilde{A}'_i, \frac{\partial}{\partial x_{n+q}} + \sum_{l=1} c_{q,l} X'_l\right] \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial c_{q,k}}{\partial x_{n+i}} + \sum_{l=1}^{p} \theta_{i,l}^k c_{q,l}\right) X'_k.\end{aligned}$$

Or, d'après (6.6), $\gamma_{i,q}^k = \gamma_{k,q}^i$ lorsque $i, k < q$. Puisque $\theta_{i,k}^q = \theta_{q,k}^i$ pour tous les i, k alors les équations de compatibilité (6.16) sont satisfaites. Par conséquent, le système (6.15) admet des solutions holomorphes $g_{i,j}$ au voisinage V de l'origine de $\mathbb{C}^p$. En prenant un developpement de Taylor au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, on obtient que chaque $g_{q,j}$ appartient à $\mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$. Les fonctions f_i sont alors données par les équations (6.14) et appartiennent à $\mathcal{O}_p(K') \otimes \mathcal{O}_n^S$.

Par conséquent, on peut redresser simultanément, par un difféomorphisme Φ_q, les champs $\tilde{A}'_i + \sum_{l=1}^{p} f_{i,l} X'_l$, $1 \leq i \leq q$ en $\partial/\partial x_{n+i}$. De plus, puisque chaque $\tilde{A}'_i + \sum_{l=1}^{p} f_{i,l} X'_l$ commute aves les S_j alors Φ_q préserve les S_j. Enfin, il préserve chaque coordonnées x_{n+i}, $1 \leq i \leq p$. Par conséquent,

$$(\Phi_q)_* X'_i = \sum_{j=1}^{p} a''_{i,j} S_j \quad \text{avec } a''_{i,j} \in \mathcal{O}_p(V) \otimes \mathcal{O}_n^S.$$

Ceci démontre la réccurence.

On a donc montré qu'il existe un bon compact $\tilde{K}$ de l'origine de $\mathbb{C}^p$ et un difféomorphisme holomorphe Ψ de $(\mathbb{C}^N, 0)$ fixant l'origine et tangent à l'identité en ce point tel que

$$\Psi_* P = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(x) S_j\right) \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \quad a_{i,j} \in \mathcal{O}_p(\tilde{K}) \otimes \mathcal{O}_n^S.$$

Il reste à montrer qu'en faisant un changement de variables *ad hoc*, on peut supprimer la dépendance en x'' des $a_{i,j}$.

Posons $Y_i := \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(x) S_j$. $\Psi_* P$ est une structure de Poisson donc $[\Psi_* P, \Psi_* P] = 0$. Un calcul simple montre que l'on a

$$[\Psi_* P, \Psi_* P] = 2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \wedge \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial Y_i}{\partial x_{n+j}} \wedge Y_j\right).$$

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

Par conséquent, $\Psi_* P$ est une structure de Poisson si et seulement si, pour $1 \leq i \leq p$,

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial Y_i}{\partial x_{n+j}} \wedge Y_j = \sum_{1 \leq r < s \leq p} \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial a_{i,r}}{\partial x_{n+j}} a_{j,s} - \frac{\partial a_{i,s}}{\partial x_{n+j}} a_{j,r} \right) S_r \wedge S_s = 0.$$

Posons alors, pour $1 \leq k \leq p$,

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{p} a_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}}.$$

Les équations précédentes se lisent alors : $[\Gamma_r, \Gamma_s] = 0$ pour $1 \leq r, s \leq p$.

Montrons, dans cette situation, qu'il existe un système de coordonnées holomorphes dans lequel les Y_i deviennent 'indépendants' de x''.

En effet, la famille $\{\Gamma_k(0)\}_{1 \leq k \leq l}$ est libre. Or, on a $\widehat{\mathcal{O}}_n^S = \mathbb{C}[[(x')^{R_1}, \ldots, (x')^{R_t}]]$. Ainsi, on a $a_{i,k} = b_{i,k}((x')^{R_1}, \ldots, (x')^{R_t}, x'')$ où $b_{i,k}(w, x'')$ est holomorphe dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^t \times \tilde{K}$. Il existe un voisinage de l'origine W dans $\mathbb{C}^t$ tel que, pour tout $w \in W$, la famille $\{\Gamma_k(w, 0)\}_{1 \leq k \leq l}$ soit libre (par abus de language, nous avons écrit $\Gamma_k(x) = \Gamma_k((x')^{R_1}, \ldots, (x')^{R_t}, x'')$). Il existe alors un changement de variables holomorphes $X'' = \psi(w, x'')$ dépendant holomorphiquement de $w \in W$ tel que $\psi_* \Gamma_k(w, X'') = \Gamma_k(w, 0)$, pour $1 \leq k \leq p$. D'autre part, les champs Γ_k commutent aux champs S_k. Le difféomorphisme ψ laisse donc invariant chacun des S_k (par la méthode du chemin). Posons alors $(X', X'') = \Psi(x) = (x', \psi((x')^{R_1}, \ldots, (x')^{R_t}, x''))$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \Psi_* \left(\sum_{i=1}^{p} Y_i \wedge \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \right)(X) &= \Psi_* \left(\sum_{i=1}^{p} S_i \wedge \Gamma_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} S_i \wedge \Gamma_i((X')^{R_1}, \ldots, (X')^{R_t}, 0) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} b_{i,j}((X')^{R_1}, \ldots, (X')^{R_t}, 0) S_j \right) \wedge \frac{\partial}{\partial X_{n+i}}. \end{aligned}$$

Ceci montre ainsi le résultat annoncé.

References

[Abb01] B. Abbaci. Variétés invariantes et applications. *Thèse*, Université Paris 7, Décembre 2001.

[Arn80] V. I. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, Moscow, 1980.

[Arn89] V. I. Arnol′d. *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics, 60)*. Springer, New York, 1989. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, corrected reprint of the second (1989) edition.

[Bou90] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbre de Lie*. Masson, Paris, 1990, ch. 7 et 8.

[Bru72] A. D. Bruno. The analytical form of differential equations. *Trans. Moscow Math. Soc.* **25** (1971), 131–288.
A. D. Bruno. The analytical form of differential equations. *Trans. Moscow Math. Soc.* **26** (1972), 199–239.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press

[CdSW99] A. Cannas da Silva et A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras (Berkeley Mathematics Lecture Notes, 10)*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Cha86] M. Chaperon. Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques. *Astérisque* (1986), 138–139.

[Con84] J. Conn. Normal forms for analytic Poisson structures. *Ann. Math.* **119** (1984), 577–601.

[Con85] J. Conn. Correction to 'Normal forms for analytic Poisson structures'. *Ann. Math.* **121** (1985), 433–436.

[Die60] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis (Pure and Applied Mathematics, X)*. Academic Press, New York, 1960.

[DM95] J.-P. Dufour et J.-Ch. Molinier. Une nouvelle famille d'algèbres de Lie non dégénérées. *Indag. Math. (N.S.)* **6**(1) (1995) 67–82.

[Duf91] J.-P. Dufour. Hyperbolic actions of $\mathbb{R}^p$ on Poisson manifolds. *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems*. Eds. P. Dazord and A. Weinstein. Springer, Berlin, 1991, pp. 137–150.

[DZ99] J.-P. Dufour et M. Zhitomirskii. Classification of nonresonant Poisson structures. *J. London Math. Soc.* **60**(2) (1999), 935–950.

[DZ02] J.-P. Dufour et Nguyen Tien Zung. Nondegeneracy of the Lie algebra $\mathfrak{aff}(n)$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335**(12) (2002), 1043–1046.

[Fri67] J. Frisch. Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. *Invent. Math.* **4** (1967), 118–138.

[Hör90] L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 3rd edn. North-Holland, Amsterdam, 1990.

[HS53] G. P. Hochschild and J.-P. Serre. Cohomology of Lie algebras. *Ann. Math.* **57** (1953), 591–603.

[Lyc97] O. V. Lychagina. Normal forms of Poisson structures. *Math. Notes* **61**(2) (1997), 180–192.

[Mal84] B. Malgrange. *Lectures on the Theory of Functions of Several Complex Variables (Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 13)*. Distributed for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1984.

[Sai76] K. Saito. On a generalization of de-Rham lemma. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **26**(2) (1976), 165–170.

[Sch53] J. A. Schouten. On the differential operators of first order in tensor calculus. *Report ZA 1953-012*. Math. Centrum Amsterdam, 1953.

[Siu69] Y.-T. Siu. Noetherianness of rings of holomorphic functions on Stein compact series. *Proc. Amer. Math. Soc.* **21** (1969), 483–489.

[Sto00] L. Stolovitch. Singular complete integrability. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* **91** (2000), 133–210.

[Vai94] I. Vaisman. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds (Progress in Mathematics, 118)*. Birkhauser, Boston, MA, 1994.

[Wei83] A. Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 523–557.

[Zun03] Nguyen Tien Zung. Levi decomposition of analytic Poisson structures and Lie algebroids. *Topology* **42**(6) (2003), 1403–1420.

https://doi.org/10.1017/S0143385703000804 Published online by Cambridge University Press