Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2006), **26**, 305–339
doi:10.1017/S0143385705000519
© *2006 Cambridge University Press*
Printed in the United Kingdom

Laminations hyperfinies et revêtements

MIGUEL BERMÚDEZ et GILBERT HECTOR

Institut Girard Desargues (UMR 5028),
Université Claude Bernard - Lyon 1,
43, Boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France
(e-mail: bermudez@igd.univ-lyon1.fr, gilbert.hector@free.fr)

(*Received* 30 *October* 2004 *and accepted in revised form* 11 *July* 2005)

Résumé. Nous introduisons la catégorie des espaces boréliens-topologiques, appelée BT-catégorie : c'est un cadre naturel pour la classification mesurable des feuilletages et des laminations usuels. Nous nous intéressons au cas des laminations de dimension deux. Nous prouvons les deux résultats principaux suivants :

(1) Une lamination borélienne par plans est la suspension d'une action de $\mathbb{Z}^2$ sur un espace de Borel standard si et seulement si elle est hyperfinie.
(2) Toute lamination par surfaces admettant une structure complexe parabolique mesurable est moyennable.

Le troisième résultat est une amélioration de (2) dans le cas des laminations munies d'une mesure transverse quasi-invariante μ. L'énoncé est le suivant :

(3) Une lamination par plans, cylindres et tores est μ-moyennable si et seulement si elle admet une métrique de Riemann plate le long de μ-presque chaque feuille.

Abstract. We introduce the so-called BT-category of Borelian topological spaces: it will be a natural frame for a measurable classification of usual foliations and laminations. We focus on the two-dimensional case: Borelian laminations by surfaces. We prove two main results.

(1) Any Borelian lamination by planes is a suspension of a $\mathbb{Z}^2$-action on a Borel space if and only if this lamination is hyperfinite.
(2) Any Borelian lamination by surfaces is amenable if parabolic, that is, admits a Riemannian metric parabolic on each leaf.

The third result is an improvement of (2) in the case of laminations endowed with a transverse quasi-invariant measure μ. The statement is the following.

(3) Any Borelian lamination by planes, cylinders and tori is μ-amenable if and only if it admits a metric which is flat on μ-almost all leaves.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

1. *Introduction*

L'objet du présent travail est une étude des laminations par surfaces d'un point de vue mesurable. Concrètement, étant donnée une lamination $(X, \mathcal{F})$ on considère la double structure donnée par :

(1) la structure borélienne $\mathcal{B}$ engendrée par la topologie initiale de X ;
(2) la topologie fine de la lamination, encore notée $\mathcal{F}$.

Ce couple définit une *lamination borélienne* ; c'est un objet d'une catégorie que nous désignerons par BT (borélienne-topologique). Les laminations boréliennes sont alors une généralisation naturelle des laminations et feuilletages. Nous avons donc dans ce cadre les notions naturelles de :

- *Métrique riemannienne et structure conforme :* une métrique riemannienne g sur $\mathcal{F}$ est une famille de métriques sur les feuilles de $\mathcal{F}$ variant de façon borélienne. Toute métrique de Riemann détermine une famille borélienne de structures conformes sur les feuilles de $(X, \mathcal{F})$.
- *Mesure de Lebesgue :* Une métrique de Riemann sur $(X, \mathcal{F})$ détermine une famille borélienne λ de mesures sur les feuilles de $\mathcal{F}$. Cette famille sera appelée la *mesure de Lebesgue* de $\mathcal{F}$. La classe d'équivalence de λ, qui est indépendante de la métrique de Riemann choisie, sera appelée la *classe de Lebesgue*.
- *Triangulation :* ce sera également une famille borélienne de triangulations des feuilles de $\mathcal{F}$. Le sens du mot 'borélien' dans ce cas sera précisé au §3.1.2.

Certains procédés usuels de construction se transposent au cadre des laminations boréliennes :

- *Suspension :* étant donnée une surface S, on construit la suspension d'une action borélienne ϕ de $\pi_1(S)$ sur un espace de Borel standard T de façon analogue au cas continu. L'espace total X de cette suspension est un espace de Borel standard muni d'une lamination borélienne $\mathcal{F}$ obtenue par passage au quotient de la lamination triviale sur $\tilde{S} \times T$, où $\tilde{S}$ désigne le revêtement universel de S. La projection naturelle :

$$p : X \to S$$

  est une application borélienne, continue le long des feuilles, i.e. une application BT. C'est en plus un revêtement de S en restriction à chaque feuille. La lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ est ce que nous appellerons un BT-revêtement de S.
- *Action d'un groupe de Lie G :* une lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ est définie par une action de G si les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les orbites d'une action

$$\Phi : G \times X \to X$$

  supposée BT en un sens évident. La BT-action Φ induit sur chaque feuille de $\mathcal{F}$ une action continue transitive de G. On dira que Φ est localement libre s'il en est ainsi pour l'action induite par Φ sur chaque feuille.

Une dernière notion joue un rôle fondamental dans la théorie de systèmes dynamiques : l'hyperfinitude. Une lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ sera dite :

- *Hyperfinie :* si pour toute transversale borélienne T, la relation borélienne discrète $\mathcal{F}_T$ induite par $\mathcal{F}$ sur T est hyperfinie. Ceci signifie qu'il existe une suite croissante de relations d'équivalence boréliennes finies $\mathcal{R}_n$ sur T telle que $\mathcal{F}_T = \bigcup_n \mathcal{R}_n$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Le résultat central de ce travail est le suivant. Il peut être vu comme une extension au cadre des laminations par surfaces du théorème de Ambrose et Kakutani pour les flots [**4**] (voir aussi [**21**]).

THÉORÈME 1.1. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne orientable par surfaces. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$(X, \mathcal{F})$ est hyperfinie par plans, tores et cylindres ;*

(2) *$(X, \mathcal{F})$ est un BT-revêtement du tore $\mathbb{T}^2$;*

(3) *$(X, \mathcal{F})$ est définie par une BT-action localement libre de $\mathbb{R}^2$.*

Il est clair que tout BT-revêtement du tore est défini par une BT-action localement libre de $\mathbb{R}^2$. En effet, on peut relever sur les feuilles de la lamination l'action naturelle de $\mathbb{R}^2$ sur le tore. L'implication (3) $\Rightarrow$ (1) découle immédiatement des résultats de [**19**]. Il nous reste donc à montrer l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). Pour ce faire nous remplaçons l'hyperfinitude par une condition qui dans ce cadre est équivalente : l'*hypercompacité*. Cette condition nous permettra de construire un revêtement du tore par approximations successives sur des morceaux compacts dans les feuilles. Nous traiterons de manière indépendante les laminations par plans, par cylindres et par tores. Ceci est possible car les ensembles saturés formés par les feuilles ayant 0, 1 ou 2 bouts respectivement sont des boréliens (voir [**14**]). Nous traiterons en détail le cas des laminations par plans (Théorème 5.1) et laisserons au lecteur le cas des tores et des cylindres. Ce dernier est particulièrement intéressant du fait que toute lamination borélienne dont toutes les feuilles ont deux bouts est automatiquement hyperfinie car c'est l'*extension compacte d'un flot* [**14**] (voir aussi [**7**, Théorème 3.28]). Enfin le cas des tores découle immédiatement du Théorème 3.1.

Soit μ une mesure transverse quasi-invariante sur $(X, \mathcal{F})$ (cf. §2.3.1). En combinant la classe de μ avec celle de la mesure de Lebesgue sur les feuilles on obtient une classe de mesure sur l'espace X et on peut parler alors de fonction mesurable sur X relativement à cette mesure. On notera $L^\infty(\mathcal{F}, \mu)$ l'espace des fonctions sur X essentiellement bornées relativement à cette classe de mesure. On dira que $(X, \mathcal{F})$ est *μ-moyennable* s'il existe une application linéaire positive

$$m : L^\infty(\mathcal{F}, \mu) \to L^\infty(\mathcal{F}, \mu)$$

qui assigne à toute fonction une fonction basique (i.e. constante le long des feuilles), et telle que $m(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

La notion d'hyperfinitude peut être 'relativisée' par rapport à une mesure transverse quasi-invariante. En général, on dira qu'une lamination borélienne mesurée $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *vérifie une propriété* s'il existe un borélien saturé $X_1 \subset X$ de mesure totale tel que la lamination borélienne induite $(X_1, \mathcal{F}_1)$ vérifie cette propriété. On rappelle ici le théorème de Connes *et al* [**10**] selon lequel *une lamination mesurée $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est hyperfinie si et seulement si $(X, \mathcal{F})$ est μ-moyennable*.

Rappelons qu'une surface de Riemann est dite *parabolique* si son revêtement universel est conformément équivalent au plan euclidien ; ceci implique en particulier que la surface est homéomorphe à un tore, un cylindre ou un plan. On peut alors se demander si toute lamination par tores, plans et cylindres admet une métrique parabolique. Le résultat suivant répond négativement à cette question.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 1.2. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne par surfaces. Si $(X, \mathcal{F})$ admet une métrique de Riemann parabolique, alors elle est μ-moyennable pour toute mesure transverse quasi-invariante μ.*

Nous montrerons en réalité que le groupoïde d'homotopie de la lamination est moyennable en tant que groupoïde borélien au sens de [**5**]. Nous conjecturons que les laminations paraboliques sont hyperfinies au sens borélien. En faveur de cette conjecture on doit dire que toute surface parabolique complète est Følner [**9**]. En combinant les deux théorèmes précédents on obtient le résultat suivant, qui caractérise d'un point de vue dynamique, topologique et ergodique les laminations paraboliques.

THÉORÈME 1.3. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne orientable par surfaces munie d'une mesure transverse quasi-invariante μ. Alors les six conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ est hyperfinie par plans, tores et cylindres ;*
(2) *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un BT-revêtement du tore ;*
(3) *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ est définie par une BT-action localement libre de $\mathbb{R}^2$;*
(4) *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ admet une métrique de Riemann plate complète ;*
(5) *$(X, \mathcal{F}, \mu)$ admet une métrique de Riemann parabolique ;*
(6) *$(X, \mathcal{F})$ est μ-moyennable et μ-presque toutes ses feuilles sont des plans, des tores et des cylindres.*

Les implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) sont vraies dans le cas purement borélien, i.e. sans mesure quasi-invariante. En effet les deux premières découlent du Théorème 1.1 et toute BT-action localement libre de $\mathbb{R}^2$ détermine naturellement une métrique de Riemann complète plate sur les feuilles de $\mathcal{F}$ invariante par l'action. Une surface de Riemann plate *complète* est toujours parabolique car son revêtement universel est le plan euclidien. Par contre on a besoin d'introduire une mesure transverse quasi-invariante si l'on veut refermer le cercle. L'implication (5) $\Rightarrow$ (6) est un corollaire du Théorème 1.2. En ce qui concerne l'implication (6) $\Rightarrow$ (1), on a déjà souligné que la μ-moyennabilité entraîne l'hyperfinitude d'après [**10**].

Pour illustrer la portée des résultats précédents on peut les rapprocher des théorèmes de classification des actions localement libres de $\mathbb{R}^2$ sur des variétés fermées de dimension 3 (cf. [**22**]). Ceux-ci montrent qu'une variété fermée de dimension 3 admettant une telle action est un fibré en tores au dessus de $\mathbb{S}^1$. Le Théorème 1.1 a comme conséquence que toutes ces actions sont BT-isomorphes à un BT-revêtement du tore $\mathbb{T}^2$, et sont donc définies par une BT-action de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{T}^3$. En adaptant les arguments de [**6**] on pourrait sans doute montrer que ladite action est presque partout continue (relativement à la mesure de Lebesgue).

On remarque qu'il existe des feuilletages par plans de codimension 3 et de classe C^∞ sur des fibrés principaux orthogonaux qui ne sont pas moyennables pour la mesure de Lebesgue et ne peuvent donc pas être définis par une BT-action de $\mathbb{R}^2$ (voir §3.2.1). Cet exemple est aussi à rapprocher du théorème de Rosenberg sur les feuilletages par plans des variétés fermées de dimension 3 : ceux-ci sont définis par une action continue de $\mathbb{R}^2$ sur le tore $\mathbb{T}^3$. Ils sont donc bien hyperfinis et moyennables.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

De la même façon on peut appliquer le Théorème 1.3 aux actions localement libres du groupe affine de la droite réelle sur une variété compacte. Puisque le groupe affine est moyennable, la lamination engendrée par l'action est moyennable et donc hyperfini pour toute mesure transverse quasi-invariante μ [**10**]. Par le Théorème 1.3 cette lamination est définie par une BT-action de $\mathbb{R}^2$. En particulier il admet une BT-métrique plate complète, alors que toutes ses métriques continues sont hyperboliques.

La question de l'existence de métriques complètes plates sur les feuilletages a été étudiée par divers auteurs dont Candel [**9**], Ghys [**15**] et Glutsyuk [**16**]. Dans [**15**] Ghys construit un exemple de feuilletage par surfaces sur une variété M de dimension 6 muni d'une métrique continue parabolique g telle que pour toute BT-fonction $u : M \to \mathbb{R}$, la métrique parabolique $\exp(u)g$ est non plate. Ce feuilletage est moyennable d'après le Théorème 1.2, et par conséquent hyperfini pour la mesure de Lebesgue. Il admet en vertu du Théorème 1.3 une métrique de Riemann mesurable plate sur presque chaque feuille. Mais cette métrique n'est pas conformément équivalente à la métrique parabolique d'origine.

2. *Laminations par surfaces*

2.1. *Espaces de Borel standard.* Un *espace mesurable* est un ensemble X muni d'une σ-algèbre $\mathcal{B}$ de sous-ensembles dits mesurables. On appellera $\mathcal{B}$ une *structure mesurable* sur X. Une fonction

$$f : (X_1, \mathcal{B}_1) \to (X_2, \mathcal{B}_2)$$

entre deux espaces mesurables est dite *mesurable* si, pour tout $A \in \mathcal{B}_2$ on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$. Une fonction mesurable ne préserve pas nécessairement les structures mesurables. Autrement dit, l'image directe d'un ensemble mesurable n'est pas forcément mesurable. Une fonction mesurable f sera dite *bi-mesurable* si elle envoie ensembles mesurables sur ensembles mesurables. Si f est bijective, alors c'est un *isomorphisme mesurable*.

Un espace polonais est un espace topologique homéomorphe à un espace métrique complet séparable. Un *espace de Borel standard* est un espace mesurable mesurablement isomorphe à un espace polonais. Les ensembles mesurables d'un espace de Borel seront appelés *boréliens*. Une application mesurable entre deux espaces Borel standard sera dite une *application borélienne*. Un espace de Borel standard infini est mesurablement isomorphe à l'un des deux espaces de Borel suivants :

- l'intervalle $[0, 1]$;
- l'ensemble des nombres entiers positifs $\mathbb{N}$.

Le résultat suivant a été démontré par Kallman dans [**20**]. Ce sera un outil essentiel pour notre étude.

THÉORÈME 2.1. [**20**] *Soient X un espace de Borel standard et B un espace polonais. Soit $p_X : X \times B \to X$ la projection sur le premier facteur. Si A est un borélien de $X \times B$ et les ensembles $A_x = \{y \in B \mid (x, y) \in A\}$ $(x \in X)$ sont réunion dénombrable de compacts de B, alors $p_X(A)$ est un borélien de X. En plus, il existe une section borélienne $s : p_X(A) \to A$ de p_X.*

Nous avons le corollaire important suivant.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 2.2. *Soit X et Y deux espaces de Borel standard et soit $f : X \to Y$ une application borélienne à fibres dénombrables. Alors $f(X)$ est un borélien de Y et il existe une section borélienne $s : f(X) \to X$ de f. En particulier, si f est injective, c'est un isomorphisme de Borel entre X et Y.*

Démonstration. Le graphe de f, i.e. l'ensemble $A = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$, est un borélien de $X \times Y$ (voir [**17**, p. 143]). Comme X est mesurablement isomorphe à un espace polonais ([0, 1] ou $\mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème précédent à A et à la projection de $X \times Y$ sur Y. □

2.2. *Relations d'équivalence boréliennes discrètes.* Soit T un espace de Borel standard et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur T. On dira que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence borélienne* sur T si le graphe de $\mathcal{R}$ (que nous noterons encore $\mathcal{R}$) est un borélien de $T \times T$. Une relation d'équivalence borélienne est dite *discrète* si toutes ses classes sont dénombrables. Elle est *finie* si toute ses classes sont finies. On notera $\mathcal{R}(x)$ la classe d'équivalence de $x \in T$. Pour un ensemble $A \subset T$ on notera $\mathrm{sat}_{\mathcal{R}}(A)$ le $\mathcal{R}$-saturé A, i.e. la réunion des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ qui rencontrent A. En utilisant le fait que $\mathcal{R}$ est un borélien de $T \times T$, on vérifie que le $\mathcal{R}$-saturé de tout borélien de T est un borélien de T.

PROPOSITION 2.1. *Si A est un borélien de T, alors $\mathrm{sat}_{\mathcal{R}}(A)$ est un borélien de T.*

Démonstration. On considère les applications $\pi_L, \pi_R : \mathcal{R} \to X$ restriction au borélien $\mathcal{R}$ des projections sur le premier et deuxième facteur de $X \times X$. Puisque $\mathcal{R}$ est à classes dénombrables, ces applications sont à fibres dénombrables et bi-boréliennes en vertu du Théorème 2.2. On remarque alors que $\mathrm{sat}_{\mathcal{R}}(A) = \pi_L(\pi_R^{-1}(A))$. □

Étant donné une relation d'équivalence discrète $\mathcal{R}$ sur un ensemble T, on définit l'application

$$\sharp : T \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

qui assigne à tout $x \in T$ le cardinal de sa $\mathcal{R}$-classe d'équivalence.

PROPOSITION 2.2. *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne discrète sur un espace de Borel standard T, alors $\sharp : T \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est une application borélienne.*

Démonstration. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $\pi_1 : T^{n+1} \to T$ obtenue par projection sur le premier facteur du produit. C'est une application borélienne mais en général non bi-borélienne. On définit le borélien

$$\mathcal{R}_*^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in T^{n+1} \mid (x_i, x_j) \in \mathcal{R}, x_i \neq x_j\}.$$

La restriction de π_1 à $\mathcal{R}_*^n$ est à fibres dénombrables car $\pi_1^{-1}(x) \cap \mathcal{R}_*^n$ est en bijection avec l'ensemble des parties finies $\mathcal{R}(x)$ ayant exactement $n + 1$ éléments. Par conséquent $\pi_1(\mathcal{R}_*^n)$, i.e. l'ensemble des $x \in T$ dont la classe d'équivalence $\mathcal{R}(x)$ a au moins $n + 1$ éléments, est un borélien de T d'après le Théorème 2.2. On en déduit que

$$\sharp^{-1}(n) = \pi_1(\mathcal{R}_*^{n-1}) - \pi_1(\mathcal{R}_*^n)$$

est un borélien de T pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur T. L'espace quotient $T/\mathcal{R}$ est muni de la structure mesurable représentée par la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{R}$-saturés de T. Une relation d'équivalence borélienne discrète $\mathcal{R}$ sur un espace de Borel standard est dite *de type I* (cf. [**10**]) si le quotient $T/\mathcal{R}$ est un espace de Borel standard. Ce n'est pas toujours le cas : par exemple la relation d'équivalence borélienne discrète engendrée par une rotation d'angle irrationnel sur le cercle n'est pas de type I. Une conséquence élémentaire mais remarquable du Théorème 2.2 est la suivante.

PROPOSITION 2.3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation borélienne discrète sur un espace de Borel standard T. Alors les trois conditions sont équivalentes :*

- *$\mathcal{R}$ est de type I ;*
- *$\mathcal{R}$ admet un domaine fondamental borélien, i.e. il existe un borélien D de T qui rencontre chaque classe de $\mathcal{R}$ en exactement un point ;*
- *il existe une application borélienne $v : T \to \mathbb{N}$ qui est injective sur chaque classe de $\mathcal{R}$.*

Un peu moins élémentaire est le fait que toute relation d'équivalence finie est de type I, utilisé ou cité sans démonstration ni référence par divers auteurs. S'agissant d'un résultat crucial dans notre étude, et n'ayant pas trouvé de démonstration dans la littérature, nous en donnons ici une basée sur le théorème de Kallman.

PROPOSITION 2.4. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne finie sur un espace de Borel standard T. Alors $\mathcal{R}$ admet un domaine fondamental borélien.*

Démonstration. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On peut supposer en vertu de la Proposition 2.2 que toutes les classes de $\mathcal{R}$ ont exactement n éléments. On plonge l'espace de Borel standard T dans la droite réelle, celle-ci munie de son ordre total naturel, et on définit un domaine fondamental D de $\mathcal{R}$ en fixant le plus petit point de chaque classe. Nous allons montrer que D est un borélien de T.

Il est bien connu (voir par exemple [**23**]) que l'application $o : T^{n+1} \to T$ définie par

$$o(x_0, \ldots, x_n) = \min\{x_0, \ldots, x_n\}$$

est une application borélienne. La restriction de o au borélien $\mathcal{R}^n_*$, défini dans la preuve de la Proposition 2.2, est à fibres dénombrables. L'ensemble $D = o(\mathcal{R}^n)$ est alors un borélien de T en vertu du Théorème 2.2. □

2.3. *BT-espaces.* On appellera *espace mesurable-topologique ou MT-espace* tout ensemble X muni simultanément d'une structure mesurable ou σ-algèbre $\mathcal{B}$ et d'une topologie τ. Le composantes connexes de X par rapport à la topologie τ seront appelées *feuilles*. Ce sont les classes d'équivalence d'une relation sur X notée $\mathcal{R}_X$ que nous appellerons *relation feuille*. Pour toute partie A de X on notera $\mathrm{sat}(A)$ le saturé de A par la relation $\mathcal{R}_X$, i.e. la réunion des feuilles de X qui rencontrent A. Une application $f : X \to Y$ entre deux MT-espaces sera dite MT si elle est en même temps continue et mesurable.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Définition. Un MT-espace $(X, \mathcal{B}, \tau)$ sera dit *standard* ou *BT-espace* s'il vérifie les conditions suivantes :

(1) l'espace mesurable sous-jacent $(X, \mathcal{B})$ est un espace de Borel standard ;
(2) l'espace topologique sous-jacent (X, τ) est séparé et à composantes connexes (feuilles) séparables ;
(3) la relation feuille $\mathcal{R}_X$ est un borélien du produit $X \times X$.

Soit X un MT-espace. Un *MT-sous-espace* de X est un ensemble Y de X muni de la structure mesurable et la topologie induites. Si X est un BT-espace et Y est un borélien de X, alors la structure mesurable induite sur Y est standard. En revanche, il n'est pas sûr que la relation feuille $\mathcal{R}_Y$ soit un borélien de $Y \times Y$. C'est le cas par exemple si Y est un boréliens saturé. En effet dans ce cas $\mathrm{sat}_Y(A) = \mathrm{sat}_X(A)$ pour tout $A \subset Y$, et la condition 3 de la définition est alors vérifiée par Y. Plus généralement, si Y est un borélien de X tel que la trace de Y sur chaque feuille de X est connexe, alors Y est un MT-sous-espace standard de X.

On appelle *découpage* d'un BT-espace une partition dénombrable X_i de X par des boréliens saturés. Comme remarqué ci-dessus, si X est un BT-espace, alors les éléments du découpage sont des BT-espaces car saturés.

Une *transversale* d'un BT-espace X est par définition un borélien $T \subset X$ qui rencontre chaque feuille de X le long d'un ensemble fermé discret. Autrement dit, il s'agit d'un borélien discret fermé de X. Une transversale est dite *totale* si elle rencontre toutes les feuilles de X. Une transversale totale de X est un *domaine fondamental* si elle rencontre chaque feuille de X en exactement un point.

La trace des feuilles de X sur une transversale borélienne T détermine une relation d'équivalence sur T que nous noterons $\mathcal{R}_X^T$. C'est une relation d'équivalence borélienne sur T au sens de §2.2 car $\mathcal{R}_X^T = \mathcal{R}_X \cap (T \times T)$. En plus puisque les feuilles de X sont séparables les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_X^T$ sont toutes dénombrables.

2.3.1. *Mesures quasi-invariantes.* Soit X un BT-espace et soit $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble de toutes les transversales boréliennes de X.

Une *mesure transverse* sur X est par définition une application σ-additive $\mu : \mathcal{T}(X) \to [0, +\infty]$. On supposera pour simplifier que μ est sans atome, i.e. que tout point est de mesure nulle. Une transversale T est dite *μ-négligeable* si $\mu(T) = 0$.

Plus généralement un borélien $A \subset X$ sera dit μ-négligeable si toute transversale borélienne de X contenue dans A est μ-négligeable. Une mesure transverse μ est dite *quasi-invariante* si le saturé de tout borélien μ-négligeable est un borélien μ-négligeable. On définit de façon analogue la notion de mesure quasi-invariante pour une relation borélienne discrète $\mathcal{R}$ définie sur un espace de Borel standard T.

Une mesure transverse quasi-invariante μ sur un BT-espace X détermine par restriction une mesure sur toute transversale borélienne $T \subset X$ que nous noterons encore μ, qui sera quasi-invariante pour la relation d'équivalence discrète $\mathcal{R}_X^T$ induite par $\mathcal{R}_X$ sur T. Dans ce cas le triplet $(T, \mathcal{R}_X^T, \mu)$ constitue une *relation d'équivalence discrète mesurée* au sens de [**10**] ou [**12**].

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

2.3.2. *Quelques exemples.* Un BT-espace est un espace de Borel standard X muni d'une topologie fine compatible en un sens faible avec la structure borélienne. Celle-ci n'est pourtant pas engendrée en général par la topologie de X, et c'est pour cette raison que l'on est obligé de tenir compte des deux structures simultanément.

Des exemples triviaux de BT-espaces sont les espaces de Borel standard munis de la topologie discrète, dits des BT-espaces *discrets*. Dans ce cas les feuilles de X sont réduites à des points de sorte que la relation feuille $\mathcal{R}_X$ est la diagonale de $X \times X$, qui est un borélien produit. Ce type de BT-espaces est caractérisé par sa structure mesurable. Remarquons en passant qu'il n'y a donc que deux BT-espaces discrets infinis : l'intervalle $[0, 1]$ et l'ensemble $\mathbb{N}$.

A l'opposé des BT-espaces discrets on trouve les espaces polonais connexes. La topologie d'un espace polonais engendre par définition une structure borélienne standard. Un espace polonais est séparé et séparable et le fait d'être connexe implique que la relation feuille est triviale et donc borélienne. Par contre nous ignorons sous quelles conditions un espace polonais ayant une quantité non dénombrable de composantes connexes est un BT-espace.

2.3.3. *Prismes.* Un *prisme* est un BT-espace $B \times T$ produit d'un espace polonais connexe B et d'un espace de Borel standard T. L'espace B est appelé la *base* du prisme et T sa *verticale*. Nous appelons *plaques* de $B \times T$ les ensembles de la forme $B \times \{t\}$ avec $t \in T$. On remarquera que la base B étant connexe, les plaques sont précisément les feuilles du prisme.

Dans ce travail les prismes que nous utiliserons seront essentiellement ceux dont la base est soit le disque fermé unité $\mathbb{D}$ de dimension 2, soit son bord le cercle $\mathbb{S}^1$, soit son intérieur la boule $\mathbb{B}$. Pour la notion de triangulation borélienne décrite plus bas nous serons amenés à remplacer le disque $\mathbb{D}$ par le simplexe standard Δ de dimension 2. Nous appelons le prisme correspondant un prisme de disques, cercles, boules ou triangles.

LEMME 2.1. *Soit B un espace polonais compact connexe et localement connexe et T un espace de Borel standard. Soit A un borélien de $B \times T$. Alors on a :*
(i) *l'intérieur* $\mathrm{int}(A)$ *et l'adhérence* $\overline{A}$ *de A sont des boréliens de $B \times T$;*
(ii) $\mathrm{int}(A)$ *est en plus un BT-sous-espace de $B \times T$.*

Démonstration. (i) Il suffit de montrer que $U = \mathrm{int}(A)$ est un borélien de $B \times T$. Pour voir que $\overline{A}$ est borélien on applique ce fait au complémentaire de A. On se fixe une base dénombrable $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ de B formée par des ouverts connexes. Une partie finie $C \subset I$ sera dite connexe si $B_C = \bigcup_{i \in C} V_i$ est connexe dans B. Pour toute partie connexe $C \subset I$ on note T_C l'ensemble des $t \in T$ tels que $B_C \times \{t\} \subset T$. Autrement dit on a :

$$T_C = T - \pi_T(U - B_C \times T).$$

Les fibres du borélien $U - B_C \times T$ pour la projection $\pi_T : B \times T \to T$ sont fermées dans un ouvert de B. En particulier elles sont réunion dénombrable de compacts car B est un espace métrique compact. D'après le Théorème 2.1 la projection $\pi_T(U - B_C \times T)$ est un borélien de T. On en aura donc de même pour T_C. Nous obtenons ainsi une famille

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

dénombrable de prismes ouverts $U_C = V_C \times T_C \subset U$ dont la réunion est U. Par conséquent U est un borélien de $B \times T$.

(ii) Puisque les feuilles de U sont des espaces métrisables, elles sont séparées et séparables. Pour voir que U est un BT-espace, il suffit donc de montrer que sa relation feuille $\mathcal{R}_U$ est un borélien de $U \times U$. La relation feuille $\mathcal{R}_{U_C}$ de chaque U_C est un borélien de $X \times X$ car U_C est un prisme. Nous avons par ailleurs

$$\mathcal{R}_U = \bigcup_C \mathcal{R}_{U_C}$$

où C parcourt les parties finies connexes de I. On en déduit que $\mathcal{R}_U$ est un borélien de $U \times U$. □

2.4. *Laminations boréliennes.* Nous introduisons ici l'analogue dans le cadre mesurable des atlas feuilletés d'une variété topologique (voir, par exemple, [**18**]).

Soit X un ensemble et T un espace de Borel standard. Un *atlas feuilleté borélien de dimension n* sur X est un ensemble dénombrable de couples $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, dites *cartes feuilletées*, où les U_i forment un recouvrement ouvert localement fini de X et les φ_i sont des bijections :

$$\varphi_i : U_i \to V_i \times T_i$$

où V_i est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et T_i un borélien de l'intervalle $[0, 1]$. Les changements de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont supposés des BT-isomorphismes locaux. Les ensembles de la forme $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{*\})$ sont appelés les *plaques* de $\mathcal{A}$. Les restrictions des $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ aux plaques donnent des homéomorphismes locaux $f_{ij}(t)$ appelés *changements de plaque*. On dira que $\mathcal{A}$ est un *atlas de classe* C^p si ses changements de plaque sont des homéomorphismes locaux de classe C^p. Deux atlas feuilletés boréliens $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de X sont dits *C^p-compatibles* si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est un atlas de classe C^p de X. Un atlas est dit *orienté* si les changements de cartes préservent l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Une *lamination borélienne de dimension n et classe* C^p sur X est par définition la famille $\mathcal{F}$ de tous les atlas C^p-compatibles avec un atlas donné. Une lamination est dite *orientable* si elle admet un atlas orienté.

Une lamination $\mathcal{F}$ de dimension n sur un ensemble X détermine naturellement sur celui-ci une structure MT. En effet, soit $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas feuilleté borélien de $\mathcal{F}$. Les bijections φ_i induisent sur les ensembles U_i une structure MT donnée par identification de U_i et $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n \times T_i$. On notera $(X, \mathcal{F})$ le MT-espace ainsi défini. Sa structure MT est bien définie modulo des atlas compatibles.

Remarquons que contrairement au cas topologique, nos atlas sont par définition dénombrables, et que la réunion arbitraire d'atlas n'est donc pas en général un atlas. En particulier, il n'existe pas d'atlas maximal définissant $\mathcal{F}$. Pour remédier à cela on pourrait considérer des atlas non dénombrables. Mais dans ce cas les structures mesurables définies par des atlas compatibles ne coïncident pas forcément. Considérons par exemple un atlas dénombrable $\mathcal{A}$ et l'atlas non dénombrable $\mathcal{A}'$ dont les cartes sont les restrictions de $\mathcal{A}$ aux plaques. La structure mesurable induite par $\mathcal{A}$ est standard tandis que celle induite par $\mathcal{A}'$ est transversalement discrète non dénombrable et par conséquent non standard.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

La preuve du résultat suivant est similaire à celle du Lemme 2.1.

PROPOSITION 2.5. *Soit* $(X, \mathcal{F})$ *une lamination borélienne à feuilles séparées. Alors* $(X, \mathcal{F})$ *est un BT-espace. L'intérieur de tout borélien de* X *est une lamination borélienne de* X.

La condition sur la séparabilité des feuilles est naturelle. Dans le cas topologique cette condition est garantie par la séparabilité de l'espace topologique ambiant, mais dans notre cas l'espace ambiant n'est même pas topologique. Toutes les laminations considérées sont supposées à feuilles séparées, c'est à dire des BT-espaces.

3. *Triangulations et hypercompacité*

3.1. *Laminations par surfaces triangulées.*

On supposera désormais que toutes les laminations boréliennes sont de dimension 2.

3.1.1. *Piles.* Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne par surfaces. Une *pile* de $(X, \mathcal{F})$ est donnée par un borélien $\Pi \subset X$ muni d'un BT-isomorphisme :

$$\pi : \Omega \times T \to \Pi$$

où $\Omega \times T$ est un prisme de base une surface connexe à bord Ω. On appelle Ω, T et π respectivement la *base*, la *verticale* et le *paramétrage* de la pile Π. Les plaques de Π sont les ensembles $\Pi_t = \pi(\Omega \times \{t\})$. Chaque plaque de Π est munie d'un homéomorphisme ou paramétrage $\pi_t : \Omega \to \Pi_t$ obtenu par restriction de π. L'application π_t dépend de façon borélienne de t dans un sens évident.

Une pile est donc un borélien de Π muni d'une structure de BT-espace produit induite par le paramétrage. Une pile admet beaucoup de paramétrages induisant la même structure produit, si l'on considère celle-ci comme étant la simple donnée des verticales et des horizontales. Dans le but de fixer cette idée, on dira que deux paramétrages

$$\pi : \Omega \times T \to \Pi, \quad \pi' : \Omega' \times T' \to \Pi$$

d'une même pile Π sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme $f : \Omega' \to \Omega$ et un isomorphisme borélien $\gamma : T' \to T$ tels que

$$\pi^{-1} \circ \pi'(x, t) = (f(x), \gamma(t)),$$

c'est-à-dire qu'ils définissent sur le borélien Π la même structure de BT-espace produit. Si Ω et Ω' sont munies d'une structure additionnelle (différentiable, simpliciale, ...) alors on dira que les paramétrages sont équivalents relativement à la dite structure si celle-ci est préservée par l'homéomorphisme f.

3.1.2. *Triangulations de* $(X, \mathcal{F})$. On définit ici la notion de triangulation d'une lamination borélienne. Il s'agit de donner un sens à l'idée vague de famille 'borélienne' de triangulations.

Une *triangulation* $\mathcal{K}$ d'une lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ est donnée par un recouvrement de X par une famille dénombrable de piles $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ de base le 2-simplexe standard Δ.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

On appellera *triangles* les plaques des piles Σ_i. On demandera que si σ et τ sont deux triangles avec $\tau \cap \sigma \neq \varnothing$ alors :

(i) soit $\sigma \cap \tau$ est un sommet ;

(ii) soit $\sigma \cap \tau$ est une arête et le changement de paramétrage $\pi_\sigma^{-1} \circ \pi_\tau$ est une bijection affine entre deux arêtes de Δ.

Il revient au même de dire que l'intersection de deux piles $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ admet un découpage en piles de sommets ou d'arêtes (voir §2.3 pour la définition de découpage). Il est facile à voir que la deuxième condition est indépendante des paramétrages des piles Σ_i, pourvu qu'ils soient choisis dans la même classe d'équivalence simpliciale. On appelle $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ une *famille génératrice* de la triangulation.

Une triangulation de $(X, \mathcal{F})$ détermine une triangulation au sens classique de chaque feuille, et en particulier de l'espace topologique sous-jacent au BT-espace $(X, \mathcal{F})$. Nous notons respectivement $\mathcal{K}^2$, $\mathcal{K}^1$ et $\mathcal{K}^0$ l'ensemble de tous les triangles, arêtes et sommets de la triangulation. Chaque $\mathcal{K}^i$ peut être identifié à une transversale totale de X formée par les barycentres des simplexes de $\mathcal{K}^i$. Il hérite donc d'une structure d'espace de Borel standard. L'ensemble $\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1 \cup \mathcal{K}^2$ sera noté $\mathcal{K}$ dans ce papier. Ceci introduit une ambiguïté dans la notation, car on appelle de la même façon la triangulation (donnée par une famille génératrice) et le complexe simplicial abstrait sous-jacent. Cette ambiguïté, très courante dans la littérature, a comme but d'alléger la notation.

Si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{K}$, on note $|\mathcal{A}|$ le polytope réunion des simplexes de $\mathcal{A}$. L'espace $|\mathcal{A}|$ est compact si et seulement si $\mathcal{A}$ est fini.

LEMME 3.1. *Soit A un borélien de $\mathcal{K}$. On a alors :*

(i) *$|A|$ est un borélien de X. En particulier $|\mathcal{K}^0|$ et $|\mathcal{K}^1|$ sont des boréliens de X ;*

(ii) $\mathrm{sat}_X(A) = \mathrm{sat}_X(|A|)$ *est un borélien de X*

Démonstration. (i) On peut supposer que A est contenu dans une pile génératrice $\varpi : \Delta \times T \to \Sigma$ de $\mathcal{K}$. Pour tout simplexe $\tau \subset \Delta$, on note $A_\tau = \varpi(\tau \times T) \cap A$, qui est borélien car ϖ est un BT-isomorphisme. On considère la projection π_T de Σ sur sa verticale T. La restriction de π_T à A est à fibres dénombrables, donc bi-borélienne d'après 2.2. Les ensembles $T_\tau = \pi_T(A_\tau)$ et $|A_\tau| = \varpi(\tau \times T_\tau)$ sont donc boréliens. Ceci suffit pour conclure car $|A| = \bigcup_\tau |A_\tau|$ où τ parcourt les simplexes de Δ.

(ii) On considère la relation d'équivalence mesurable discrète $\mathcal{R}_X^{\mathcal{K}}$ induite par la relation feuille $\mathcal{R}_X$ sur la transversale borélienne $\mathcal{K}$. D'après la Proposition 2.1, l'ensemble $\mathrm{sat}_{\mathcal{R}_X^{\mathcal{K}}}(A)$ est un borélien de $\mathcal{K}$. L'ensemble $\mathrm{sat}_X(A) = \mathrm{sat}_X(|A|) = |\mathrm{sat}_{\mathcal{R}_X^{\mathcal{K}}}(A)|$ est un borélien de X d'après (i). □

La proposition suivante sera démontrée dans la §7.

PROPOSITION 3.1. *Toute lamination borélienne de classe C^1 admet une triangulation.*

Nous supposerons désormais que toute lamination borélienne est munie d'une triangulation, fixée une fois pour toutes.

3.1.3. *Piles simpliciales.* Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne. Un borélien $B \subset X$ est dit *simplicial* si toutes ses feuilles sont réunion de triangles. On appelle *volume* d'une

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

feuille de B le nombre de triangles qu'elle contient. On dira que B est de *type fini* si toutes ses feuilles sont de volume fini. Etant donné un borélien simplicial B on note

$$\mathrm{vol} : B \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

la fonction qui assigne à chaque $x \in B$ le volume de la feuille de B passant par x. C'est une fonction borélienne d'après la Proposition 2.2.

Remarque. Tout borélien B de volume 1 est une pile. En effet, si $\{\Sigma_i\}$ est une famille génératrice de la triangulation, alors $B_i = B \cap \Sigma_i$ est un découpage de B en piles. Le borélien B est donc une réunion disjointe de piles, et donc une pile.

Une pile Π de $(X, \mathcal{F})$ sera dite *simpliciale* si son paramétrage est simplicial. En particulier Π est un borélien simplicial. Les plaques d'une pile étant par définition des sous-surfaces des feuilles de $(X, \mathcal{F})$, si Π est de type fini, alors ses plaques sont réunion d'un nombre fini de triangles.

3.1.4. *Applications semi-simples.* Soit B un borélien simplicial de $(X, \mathcal{F})$ à feuilles compactes et $\mathcal{E}$ un ensemble. Une application $f : B \to \mathcal{E}$ est dite *semi-simple* s'il existe un découpage de B en piles simpliciales Π_i tel que pour tout j on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_j & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{E} \\ {\scriptstyle p_j}\downarrow & \nearrow_{f_j} & \\ \Omega_j & & \end{array}$$

où p_j est la projection de Π_j sur sa base Ω_j et f_j une application de Ω_j sur $\mathcal{E}$. L'application f est dite *simple* s'il existe un j tel que $B = \Pi_j$.

LEMME 3.2. *Soit Π une pile simpliciale à base compacte de $(X, \mathcal{F})$ et K un complexe simplicial dénombrable. Alors toute BT-application simpliciale $f : \Pi \to K$ est semi-simple.*

Démonstration. On considère le paramétrage $\pi : \Omega \times T \to \Pi$ de Π. Pour tout $t \in T$ on notera $f_t : \Omega \to K$ l'application simpliciale obtenue par restriction de f à la plaque $\Omega \times \{t\}$. Étant donnée une application simpliciale $g : \Omega \to K$ on pose

$$T_g = \{t \in T \mid f_t = g\}.$$

Alors T_g est un borélien de T. En effet, f et g étant simpliciales, elles sont caractérisées par leur valeurs sur les sommets de Ω. Or pour tout sommet $v \in \Omega$ l'ensemble

$$T_{v,g} = \{t \in T \mid f(v) = g(v)\}$$

est un borélien car $T_{v,g} \times \{v\} = f^{-1}(g(v)) \cap T \times \{v\}$. On aura alors

$$T_g = \bigcap_{v \in \Omega} T_{v,g}.$$

Enfin, puisque Ω est compacte et K dénombrable, il n'y a qu'une quantité dénombrable d'applications simpliciales entre eux. La famille de boréliens T_g détermine alors un découpage Π_g de la pile Π vérifiant par construction les conditions requises. □

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Pour généraliser ce résultat à tout borélien simplicial quelconque de $(X, \mathcal{F})$, il faut au préalable savoir découper un tel borélien en piles.

3.1.5. *Découpage en piles d'un borélien simplicial.* Le but de ce paragraphe est la preuve du théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. *Soit B un borélien simplicial de $(X, \mathcal{F})$ à feuilles compactes. Alors il admet un découpage (cf. §2.3) en piles simpliciales Π_i.*

Comme corollaire de ce théorème et du Lemme 3.2 nous avons le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.1. *Soit B un borélien simplicial de $(X, \mathcal{F})$ à feuilles compactes et K un complexe simplicial dénombrable. Alors toute application simpliciale $f : B \to K$ est semi-simple.*

Pour la preuve du théorème, on remarque d'abord qu'on peut se ramener au cas ou toutes les feuilles de B ont le même volume, car la fonction volume est borélienne et détermine donc un découpage de B en boréliens de ce type.

Un cas particulier. Nous commençons par le cas particulier d'un borélien qui est réunion de deux piles simpliciales.

LEMME 3.3. *Soit B un borélien simplicial de volume fini constant. Soient Π' et Π'' deux piles simpliciales telles que toute feuille de B est la réunion d'exactement une plaque de Π' et une plaque de Π''. Alors B admet un découpage en piles simpliciales.*

Démonstration. La condition sur l'intersection des plaques implique que l'on peut identifier l'espace de feuilles de B et les verticales des piles Π' et Π'' à un seul et même espace standard T. Soient $\pi' : \Omega' \times T \to \Pi'$ et $\pi'' : \Omega'' \times T \to \Pi''$ les paramétrages de Π' et Π'' respectivement. On considère la BT-application simpliciale :

$$\pi' \sqcup \pi'' : (\Omega' \sqcup \Omega'') \times T \to B$$

somme disjointe des applications π et π'. C'est une application bi-borélienne car borélienne et à fibres dénombrables (cf. Théorème 2.2). Pour tout $t \in T$ l'application $\pi'_t \sqcup \pi''_t : \Omega' \sqcup \Omega'' \to B_t$ induit sur $\Omega' \sqcup \Omega''$ une relation d'équivalence notée ρ_t. On montre alors que l'ensemble $T_\rho = \{t \in T \mid \rho_t = \rho\}$ est un borélien de T, par une preuve analogue à celle du Lemme 3.2.

On note Ω_ρ le complexe simplicial quotient de $\Omega' \sqcup \Omega''$ par la relation d'équivalence simpliciale ρ, et soit

$$q_\rho : (\Omega' \sqcup \Omega'') \times T_\rho \to \Omega_\rho \times T_\rho$$

la BT-application quotient, qui est bi-borélienne car à fibres dénombrables. Nous obtenons ainsi des diagrammes commutatifs d'applications bi-boréliennes.

$$\begin{array}{ccc} (\Omega' \sqcup \Omega'') \times T_\rho & \xrightarrow{\pi' \sqcup \pi''} & B \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_\rho} & \nearrow_{\pi_\rho} & \\ \Omega_\rho \times T_\rho & & \end{array}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

L'application π_ρ est injective par construction. C'est donc un BT-isomorphisme. Le borélien saturé $B_\rho \subset B$, image de π_ρ, est en particulier une pile simpliciale. Nous obtenons ainsi un découpage de B en piles simpliciales B_ρ, où ρ parcourt les relations d'équivalence simpliciales sur le complexe $\Omega' \sqcup \Omega''$. □

Le cas général. On montre ici comment réduire le cas général au cas présenté dans le paragraphe précédent. Pour ce faire nous montrerons que tout borélien simplicial peut être découpé en boréliens qui vérifient les conditions du Lemme 3.3, i.e. qui sont réunion de deux piles simpliciales.

LEMME 3.4. *Tout borélien simplicial B admet un découpage en boréliens simpliciaux vérifiant les conditions du Lemme 3.3.*

Démonstration. On peut toujours supposer que les feuilles de B sont de volume constant. Nous allons procéder par récurrence sur ce volume. Nous avons déjà vu (cf. Remarque 3.1.3) que tout borélien de volume 1 est une pile.

Soit n un entier ≥ 1. Supposons que le Lemme 3.3 est vérifié par tout borélien simplicial de volume $\leq n$. Supposons B de volume constant $n+1$. On note $\hat{B} = \mathcal{K}^2 \cap B$ le borélien des triangles de B. Il existe d'après la Proposition 2.4 un borélien de $\mathcal{J} \subset \hat{B}$ qui rencontre chaque feuille de Π en un seul point.

Le borélien $|\mathcal{J}|$ est de volume 1 et donc une pile simpliciale. Le borélien $|\hat{B} - \mathcal{J}|$ est pour sa part de volume n et admet par hypothèse de récurrence un découpage en piles simpliciales $\hat{B}_i$. On note B_i la réunion des feuilles de B rencontrant $\hat{B}_i$. Chaque feuille de B_i est le réunion d'une plaque de la pile $\hat{B}_i$ et d'un triangle de $|\mathcal{J}|$ et il vérifie donc le Lemme 3.3. Enfin on remarque que puisque B est de volume ≥ 2, toute feuille de B rencontre $|\hat{B} - \mathcal{J}|$. La réunion des B_i est en particulier égale à B. Ceci complète la récurrence. □

3.2. *Hyperfinitude et hypercompacité*

3.2.1. *Relations d'équivalence et laminations hyperfinies.* Une relation d'équivalence borélienne discrète $\mathcal{R}$ sur un espace de Borel standard T est dite *hyperfinie* si elle est limite inductive de relations d'équivalence boréliennes finies. Plus précisément, il existe une suite croissante $\mathcal{R}_n$ de relations d'équivalence boréliennes finies sur T dont la réunion est $\mathcal{R}$. On notera $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$. On remarquera que si $\mathcal{R}$ admet un domaine fondamental borélien, alors elle est hyperfinie.

Rappelons que si T est une transversale borélienne de $(X, \mathcal{F})$, la trace des feuilles de X sur T détermine une relation d'équivalence borélienne discrète que nous notons $\mathcal{F}_T$. La définition suivante est due à Bowen.

Définition [**8**]. On dira que $(X, \mathcal{F})$ est une lamination *hyperfinie* si et seulement si la relation d'équivalence $\mathcal{F}_T$ est hyperfinie quelle que soit la transversale T choisie.

Exemples de feuilletages hyperfinis. Soit V^{n+d} et V^n deux variétés de dimension $n+d$ et n respectivement. Les fibres d'une submersion $p : V^{n+d} \to V^n$ définissent un feuilletage $\mathcal{F}$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

de dimension d sur V^{n+d}. Ce feuilletage est hyperfini. En effet, soit T une transversale borélienne de $\mathcal{F}$. La restriction de la submersion p à T est une application borélienne à fibres dénombrables qui, d'après le théorème de Kallman, admet une section borélienne. L'image de cette section est un domaine fondamental pour la relation $\mathcal{F}_T$, qui est donc hyperfinie.

Le premiers exemples de feuilletages hyperfinis sans domaine fondamental sont les feuilletages linéaires du tore $\mathbb{T}^3$, définis par l'équation différentielle $dz = \alpha dx + \beta dy$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ils sont donnés par une action différentiable de $\mathbb{R}^2$, et sont donc hyperfinis d'après [**19**]. Si α et β sont rationnellement indépendants, alors l'action de $\mathbb{R}^2$ est libre et les feuilles du feuilletage sont des plans.

Un exemple de feuilletage non *hyperfini.* Soit Σ_2 la surface de genre 2. On considère une représentation fidèle du groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_2)$ de Σ_2 dans le groupe SO(3). La suspension de l'action libre correspondante de $\pi_1(\Sigma_2)$ sur SO(3) est une variété compacte V de dimension 5 munie d'un feuilletage par plans $\mathcal{F}$. L'action de $\pi_1(\Sigma_2)$ sur SO(3) préserve la mesure de Haar (finie) de celui-ci et engendre par conséquent une relation d'équivalence discrète qui n'est pas hyperfinie car le groupe $\pi_1(\Sigma_2)$ est non moyennable (cf. [**24**] et [**10**]). Une autre façon de voir que la relation est non hyperfinie consiste à prouver que son *coût* est égale à 2 (cf. [**13**]). Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc *non hyperfini*.

3.2.2. *Laminations hypercompactes.* Rappelons qu'on a fixé une triangulation de $(X, \mathcal{F})$, et que l'ensemble des ses simplexes $\mathcal{K}$ est muni d'une structure de Borel standard donnée par identification de chaque simplexe avec son barycentre dans X. L'espace $\mathcal{K}$ est du coup identifié à une transversale borélienne de $(X, \mathcal{F})$. On note $\hat{\mathcal{F}}$ la relation d'équivalence induite sur l'espace des triangles $\mathcal{K}^2$ par les feuilles de X. La relation $\hat{\mathcal{F}}$ n'est autre que la relation $\mathcal{R}_X^{\mathcal{K}^2}$ introduite dans §2.3. La raison de ce changement de notation sont claires. Si $(X, \mathcal{F})$ est hyperfinie, alors $\hat{\mathcal{F}}$ sera hyperfinie. La réciproque sera montrée ci-dessous.

Définition. Une lamination $(X, \mathcal{F})$ sera dite *hypercompacte* s'il existe une suite B_n de boréliens simpliciaux pour $\mathcal{K}$ de type fini telle que

(1) $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\bigcup_n B_n = X$.

La suite B_n sera appelé une *filtration compacte simpliciale* de $(X, \mathcal{F})$.

THÉORÈME 3.2. *Pour toute lamination borélienne* $(X, \mathcal{F})$ *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $(X, \mathcal{F})$ *est hypercompacte ;*

(b) $(X, \mathcal{F})$ *est hyperfinie.*

3.2.3. *Preuve de* (a) $\Rightarrow$ (b). Soit B_n une filtration compacte de $(X, \mathcal{F})$. Soit T une transversale borélienne et soit $\mathcal{F}_T$ la relation induite par $\mathcal{F}$ sur T. Puisque les B_n sont à feuilles compactes, la relation $\mathcal{R}_n$ induite par $\mathcal{F}$ sur la transversale borélienne $\hat{B}_n = T \cap B_n$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

est une sous-relation borélienne finie de $\mathcal{F}_T$. Puisque $B_n \subset B_{n+1}$ on a $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$. Enfin du fait que $\bigcup_n B_n = X$ on en déduit que $\bigcup_n \mathcal{R}_n = \mathcal{F}_T$. La relation $\mathcal{F}_T$ est donc hyperfinie. Ceci complète la preuve de la première implication.

3.2.4. *Borélien associé à une relation d'équivalence borélienne finie.* Avant d'aborder la preuve de l'implication réciproque, on aura besoin de la construction suivante. On se fixe une sous-relation d'équivalence borélienne finie $\mathcal{R}$ de $\hat{\mathcal{F}}$. Chaque classe d'équivalence $\mathcal{R}(\sigma)$ de $\mathcal{R}$ détermine un domaine simplicial compact $|\mathcal{R}(\sigma)|$ sur la feuille L_σ obtenu par réunion des triangles de $\mathcal{R}(\sigma)$.

On appelle 0-*squelette* de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathrm{sq}^0(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}^0$ formé par les sommets de $\mathcal{K}$ qui sont dans la frontière d'un des domaines $|\mathcal{R}(\sigma)|$. On appelle 1-*squelette* de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathrm{sq}^1(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}^1$ formé par les arêtes de $\mathcal{K}$ dont les sommets sont dans $\mathrm{sq}^0(\mathcal{R})$.

LEMME 3.5. *Pour $i = 0, 1$ le i-squelette $\mathrm{sq}^i(\mathcal{R})$ d'une relation d'équivalence borélienne finie $\mathcal{R} \subset \hat{\mathcal{F}}$ est un borélien de $\mathcal{K}^i$.*

Démonstration. On plonge d'abord $\mathcal{K}^2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ et on plonge ensuite $\mathcal{K}^1$ dans $\mathcal{K}^2 \times \mathcal{K}^2$ en assignant à toute arête la paire de triangles dont elle est la face commune, ceux-ci étant ordonnés de façon croissante par rapport à l'ordre total de $[0, 1]$. Une arête est dans le 1-squelette de $\mathcal{R}$ si et seulement si les deux triangles dont elle est face appartiennent à des $\mathcal{R}$-classes d'équivalence différentes. On a alors $\mathrm{sq}^1(\mathcal{R}) = \mathcal{K}^1 - \mathcal{R}$.

De façon analogue on plonge $\mathcal{K}^1$ dans $\mathcal{K}^0 \times \mathcal{K}^0$ en assignant à toute arête la paire ordonnée de ses sommets. L'ensemble $\mathrm{sq}^1(\mathcal{R})$ est donc un borélien de $\mathcal{K}^0 \times \mathcal{K}^0$. Soit $\pi_1, \pi_2 : \mathcal{K}^0 \times \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^0$ les projections sur le premier et deuxième facteur. La restriction de chaque π_i au borélien $\mathrm{sq}^1(\mathcal{R})$ est à fibres dénombrables, d'où l'on déduit que les $\pi_i(\mathrm{sq}^1(\mathcal{R}))$ sont des boréliens $\mathcal{K}^0$. On remarque enfin que

$$\mathrm{sq}^0(\mathcal{R}) = \pi_1(\mathrm{sq}^1(\mathcal{R})) \cup \pi_2(\mathrm{sq}^1(\mathcal{R})),$$

ce qui complète la preuve du lemme. □

Étant donné une relation d'équivalence borélienne finie $\mathcal{R} \subset \hat{\mathcal{F}}$, on dira qu'un triangle $\sigma \in \mathcal{K}^2$ est *intérieur* à $\mathcal{R}$ s'il ne rencontre pas $|\mathrm{sq}^1(\mathcal{R})|$. On note $\mathrm{int}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}^2$ l'ensemble des triangles de $\mathcal{K}$ intérieurs à $\mathcal{R}$.

LEMME 3.6. *L'ensemble* $\mathrm{int}(\mathcal{R})$ *est un borélien de* $\mathcal{K}^2$.

Démonstration. Il suffit de prouver que, étant donnée une pile génératrice $\Sigma \simeq \Delta^2 \times T$ de $\mathcal{K}$, l'ensemble des triangles de Σ qui sont intérieurs à $\mathcal{R}$ est un borélien de T. Soient v_i les trois sommets de Δ^2 et soit T_i le borélien de T défini par $\mathrm{sq}^0(\mathcal{R}) \cap (\{v_i\} \times T) = \{v_i\} \times T_i$. Alors $T \cap \mathrm{int}(\mathcal{R}) = T_1 \cap T_2 \cap T_3$ est un borélien.

Le borélien de type fini

$$B(\mathcal{R}) = |\mathrm{int}(\mathcal{R})|$$

est appelé le *borélien associé à* $\mathcal{R}$. Il est clair que si $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ alors $B(\mathcal{R}_1) \subset B(\mathcal{R}_2)$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

3.2.5. *Preuve de* (b) $\Rightarrow$ (a). On considère une suite croissante de relations d'équivalence boréliennes finies $\mathcal{R}_n \subset \hat{\mathcal{F}}$ telle que $\bigcup_n \mathcal{R}_n = \hat{\mathcal{F}}$. On pose

$$B_n = |B(\mathcal{R}_n)|, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $B(\mathcal{R}_n)$ est le borélien de type fini construit dans le paragraphe précédent. Puisque la suite $\mathcal{R}_n$ est croissante, il en est de même pour la suite de boréliens simpliciaux B_n. Il reste à montrer qu'il s'agit d'une suite exhaustive. Pour ce faire on considère un triangle quelconque $\sigma \in \mathcal{K}^2$. Puisque σ est intérieur à la feuille L_σ et la suite de compacts simpliciaux $|\mathcal{R}_n(\sigma)|$ ($n \in \mathbb{N}$) est croissante et exhaustive, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma \subset \text{int}(|\mathcal{R}_n(\sigma)|)$. En particulier $\sigma \subset B_n$. Ceci complète la preuve de la deuxième implication et du théorème.

4. *Laminations par plans*

On supposera désormais que $(X, \mathcal{F})$ est une lamination par plans, c'est à dire une lamination dont toutes les feuilles sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Elle est munie d'une triangulation $\mathcal{K}$.

4.1. *Hypercompacité forte.* Une lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ est dite *fortement hypercompacte* si elle admet une filtration compacte simpliciale B_n formée par des boréliens dont toutes les feuilles sont des disques. Le but de cette section est la preuve du théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne par plans. Alors les deux conditions sont équivalentes :*
(a) *$(X, \mathcal{F})$ est fortement hypercompacte ;*
(b) *$(X, \mathcal{F})$ est hyperfinie.*

Tout comme dans la preuve du Théorème 3.2, l'enjeu est de montrer (b) $\Rightarrow$ (a). Nous allons en fait montrer que l'hypercompacité implique, dans le cas des laminations par plans, l'hypercompacité forte. L'idée est simple : il s'agit de prendre une filtration compacte B_n de $(X, \mathcal{F})$ pour ensuite 'boucher les trous' des feuilles des boréliens B_n de façon à obtenir une nouvelle suite de boréliens simpliciaux par disques $\hat{B}_n$. Nous clarifions dans le paragraphe suivant le sens précis de l'expression 'boucher les trous'.

4.2. *Enveloppes*

4.2.1. *Remarques préliminaires*

Remarque A. Soit Ω une surface compacte connexe plongée dans $\mathbb{R}^2$. On appelle *enveloppe de S* le disque topologique $\epsilon(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\epsilon(\Omega) \supset \Omega, \quad \partial\epsilon(\Omega) \subset \partial\Omega.$$

C'est le disque complémentaire de la seule composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 - \Omega$. Il est obtenu en rajoutant à Ω ses 'trous', i.e. les composantes bornés du complémentaire.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Le lecteur remarquera que *si* Ω_1 *et* Ω_2 *sont deux surfaces disjointes ou emboîtées dans* $\mathbb{R}^2$, *alors les disques* $\epsilon(\Omega_1)$ *et* $\epsilon(\Omega_2)$ *sont disjoints ou emboîtés.* En effet, les composantes connexes non bornées de $\mathbb{R}^2 - \Omega_1$ et $\mathbb{R}^2 - \Omega_2$ ne peuvent pas être disjointes. Si elles sont emboîtées alors on a de même pour $\epsilon(\Omega_1)$ et $\epsilon(\Omega_2)$. Sinon on aura $\epsilon(\Omega_1) \cap \epsilon(\Omega_2) = \varnothing$.

Remarque B. Supposons que $\mathbb{R}^2$ est muni d'une triangulation et soit Ω_i une famille dénombrable de surfaces compactes simpliciales deux à deux disjointes dans $\mathbb{R}^2$. Alors *l'ensemble* $\hat{\Omega} = \bigcup_i \epsilon(\Omega_i)$ *est soit une réunion de disques deux à deux disjoints, soit* $\mathbb{R}^2$ *tout entier.* En effet, d'après la remarque précédente les disques simpliciaux $\epsilon(\Omega_i)$ sont deux à deux disjoints ou emboîtés. Puisque les surfaces Ω_i sont disjointes, les bords de leurs enveloppes ne se rencontrent pas. Or il est clair que toute suite croissante de disques simpliciaux emboîtes à bords disjoints est soit finie, soit exhaustive. Si la famille de disques $\epsilon(\Omega_i)$ contient des suites croissantes non finies, alors $\hat{\Omega} = \mathbb{R}^2$. Dans le cas contraire $\hat{\Omega}$ est une réunion disjointe de disques simpliciaux, à savoir les éléments maximaux de la famille $\epsilon(\Omega_i)$.

4.2.2. *Enveloppe d'un borélien simplicial de* $(X, \mathcal{F})$. Soit B un borélien simplicial dont toutes les feuilles sont des surfaces compactes. Soit T l'espace de ses feuilles. Pour tout $t \in T$ on note B_t la feuille de B correspondante. On définit l'enveloppe de B comme l'ensemble

$$\epsilon(B) = \bigcup_{t \in T} \epsilon(B_t)$$

où $\epsilon(B_t)$ est l'enveloppe de la surface compacte B_t dans la feuille de $(X, \mathcal{F})$ qui la contient.

LEMME 4.1. *L'enveloppe* $\epsilon(B)$ *d'un borélien simplicial à feuilles compactes* B *est un borélien simplicial.*

Démonstration. On considère le borélien ouvert

$$C = X - B$$

complémentaire de B dans X. L'adhérence de chaque feuille de C est une surface éventuellement non compacte. On note C_∞ le borélien saturé de C formé par la réunion de ses feuilles non bornées, i.e. non relativement compactes. C'est un borélien en vertu de la Proposition 2.2. De plus :

$$\epsilon(B) = X - C_\infty. \tag{1}$$

En effet, soit L une feuille de $(X, \mathcal{F})$ et soit Ω_i la famille des feuilles de B contenues dans L. Puisque L a un seul bout, $L - B$ a au plus une composante connexe non bornée U, intersection des composantes connexes non bornées de $L - \Omega_i$. Le complémentaire de U dans L est alors la réunion des enveloppes des surfaces Ω_i. Autrement dit, on a :

$$L - C_\infty = L - U = \bigcup_i \epsilon(\Omega_i) = L \cap \epsilon(B).$$

Ceci montre l'identité (1) et donc le lemme.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Le lecteur remarquera que le borélien $\epsilon(B)$ n'est pas forcément à feuilles compactes. Il se peut même que $\epsilon(B) = X$; imaginons un borélien dont la trace sur chaque feuille est une famille de couronnes concentriques disjointes. Pour contourner cette difficulté on introduit la notion de borélien intègre.

On dira que B est un borélien *intègre* si pour toute feuille Ω de B, on a $\epsilon(\Omega) \cap B = \Omega$. Autrement dit, les enveloppes des feuilles de B sont deux à deux disjointes. Ainsi il existe une identification naturelle entre les feuilles de B et les feuilles de $\epsilon(B)$ de sorte que toute feuille de $\epsilon(B)$ est l'enveloppe de la feuille de B correspondante. En particulier, $\epsilon(B)$ est un borélien de disques. Nous montrons d'abord le lemme suivant.

LEMME 4.2. *Tout borélien simplicial B admet un découpage en boréliens intègres.*

Démonstration. L'idée est très simple : le borélien B contient des feuilles 'minimales' dont l'enveloppe ne contient aucune autre feuille de B. On note B_* le saturé de B formé par ces feuilles-là. C'est un ensemble non vide par le lemme de Zorn. Le problème est de montrer qu'il s'agit d'un borélien. Une fois montré ceci on procède par récurrence en posant

$$B^{i+1} = B^i - B^i_*, \quad B^0 = B.$$

Il est clair par construction que les boréliens B^i_* sont tous intègres. Il est aussi facile à voir que la suite B^i_* est exhaustive. En effet, si l'enveloppe d'une feuille donnée B_t contient exactement k autres feuilles de B, alors B_t appartient à B^k_*.

Pour montrer que B_* est borélien, on considère $\overline{C}$ l'adhérence dans X du borélien $C = X - B$. C'est le complémentaire dans X de $\mathrm{int}(B)$, qui est un borélien d'après la Proposition 2.5. Soit E l'ensemble saturé de $\overline{C}$ formé par les feuilles compactes de $\overline{C}$. Il admet un découpage en piles d'après le Théorème 3.1. Soit E_* la réunion des piles de E dont la base est un disque. Les feuilles de E_* ne sont que les 'trous' des feuilles de B_*, et par conséquent B_* est le saturé dans B de l'ensemble

$$\partial E_* = E_* \cap B.$$

Or ∂E_* est un borélien simplicial et le saturé de tout borélien simplicial est borélien (voir le Lemme 3.1). Le lemme est démontré. □

Nous avons besoin d'un dernier lemme technique avant de nous attaquer à la preuve du Théorème 4.1. On se fixe un borélien simplicial à feuilles compactes B et on reprend la notation introduite au début de ce paragraphe. On pose

$$T^{(q)} = \{t \in T \mid \mathrm{vol}(\epsilon(B_t)) \leq q\}, \quad \epsilon_q(B) = \bigcup_{t \in T^{(q)}} \epsilon(B_t).$$

LEMME 4.3. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\epsilon_q(B)$ est un borélien simplicial de $(X, \mathcal{F})$ dont toutes les feuilles sont des disques.*

Démonstration. En vertu du Lemme 4.2, on peut supposer que B est un borélien intègre. Dans ce cas $\epsilon(B)$ est à feuilles compactes et l'ensemble $\epsilon_q(B)$ est le saturé de $\epsilon(B)$ formé par ses feuilles de volume q. C'est un borélien d'après la Proposition 2.2.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

4.3. *Preuve du Théorème 4.1.* On se fixe comme annoncé une suite croissante exhaustive B_n de boréliens simpliciaux de $(X, \mathcal{F})$. On définit maintenant pour tout $q \in N$ le borélien :

$$\hat{B}_q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_q(B_n).$$

On veut montrer que la suite $\hat{B}_q$ est une filtration compacte forte pour la lamination $(X, \mathcal{F})$. Il est clair que $\hat{B}_q \subset \hat{B}_{q+1}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et il ne nous reste donc qu'à vérifier :

(i) $\hat{B}_q$ est un borélien, c'est le Lemme 4.3.

(ii) Toute feuille Ω de $\hat{B}_q$ est un disque de volume $\leq q$; en effet Ω est réunion d'une suite de feuilles $\Omega_{q,n}$ de $\epsilon_q(B_n)$, qui sont, d'après la Remarque B, des disques disjoints ou emboîtés de volume borné par q.

(iii) La suite $\hat{B}_q$ est exhaustive car $\bigcup_{q\in\mathbb{N}} \hat{B}_q \supset \bigcup_n B_n = X$.

Le théorème est démontré. □

5. *Revêtements*

5.1. *Définition.* Soit S une surface compacte. Un *BT-revêtement* de S est une paire (X, ρ) donnée par un BT-espace X et par une BT-application :

$$\rho : X \to S$$

qui est un revêtement de S en restriction à chaque feuille de X. Dans ce cas X est naturellement muni d'une lamination borélienne $\mathcal{F}$ définie par un atlas feuilleté obtenu par image réciproque d'un atlas fini de S. On définit de façon analogue la notion de BT-homéomorphisme local.

Le lecteur remarquera qu'un BT-revêtement n'est rien d'autre qu'un revêtement au sens classique défini sur l'espace topologique sous-jacent à X, avec la particularité d'être globalement borélien.

5.1.1. *Suspensions.* Des nombreux exemples de BT-revêtements sont construits par le procédé de *suspension*, que nous décrivons ici. Soit Γ le groupe fondamental de S. Supposons qu'il agit de façon borélienne sur un espace de Borel standard T. Nous considérons l'action diagonale de Γ sur le prisme $\tilde{X} = \tilde{S} \times T$, où $\tilde{S}$ est le revêtement universel de S. L'espace quotient de cette action $X = \tilde{X}/\Gamma$ est naturellement muni d'une structure MT dont on vérifie aisément qu'elle est standard. La projection sur le premier facteur $p_1 : \tilde{X} \to \tilde{S}$ passe au quotient en une application de revêtement $\rho : X \to S$, comme l'indique le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\hat{q}} & X \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \tilde{S} & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

Le BT-revêtement (X, ρ) est appelé la *suspension* de l'action.

Réciproquement, si (X, ρ) est un BT-revêtement de S, nous pouvons présenter (X, ρ) comme une suspension. On se fixe un point $* \in S$ et on note $T = \rho^{-1}(*)$ la transversale

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

de X préimage de $*$ par l'application de revêtement ρ. Le groupe Γ agit de façon borélienne sur T, et la suspension de cette action nous donne précisément le BT-revêtement (X, ρ) de départ.

5.2. *Laminations hyperfinies et revêtements.* Le but de ce paragraphe est la preuve du résultat suivant.

THÉORÈME 5.1. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne par plans. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$(X, \mathcal{F})$ est hyperfinie ;*
(2) *$(X, \mathcal{F})$ est un BT-revêtement de toute surface de genre ≥ 1 ;*
(3) *$(X, \mathcal{F})$ est un BT-revêtement de $\mathbb{T}^2$;*
(4) *$(X, \mathcal{F})$ est définie par une BT-action libre de $\mathbb{R}^2$.*

Les implications (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) sont immédiates. Le tore $\mathbb{T}^2$ étant une surface de genre 1, la condition (3) est un cas particulier de (2). Si $(X, \mathcal{F})$ est un BT-revêtement de $\mathbb{T}^2$, alors on peut relever l'action naturelle de $\mathbb{R}^2$ sur le tore en une BT-action localement libre sur $(X, \mathcal{F})$. Les feuilles de $(X, \mathcal{F})$ étant par hypothèse des plans, cette action n'a pas de point fixe.

Le lemme suivant, c'est à dire l'implication (4) $\Rightarrow$ (1), est un corollaire d'un résultat de Jackson, Kechris et Louveau [**19**], selon lequel une action borélienne d'un groupe discret moyennable à croissance polynomiale engendre une relation d'équivalence hyperfinie.

LEMME 5.1. *Toute BT-action de $\mathbb{R}^2$ est hyperfinie.*

Démonstration. Soit S une transversale borélienne de $(X, \mathcal{F})$ et on considère $\hat{S}$ le saturé de S par l'action borélienne de $\mathbb{Z}^2$ induite sur X par celle de $\mathbb{R}^2$. Le borélien $\hat{S}$ n'est pas une transversale car en générale non fermé ou non discret. La relation d'équivalence borélienne induite par $\mathcal{F}$ sur $\hat{S}$ est néanmoins à classes dénombrables et hyperfinie d'après [**19**]. La restriction de cette relation au sous-borélien S sera également hyperfinie.

L'implication qui nécessite le plus de travail est (1) $\Rightarrow$ (2), que nous énonçons explicitement dans la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1. *Toute lamination par plans hyperfinie est un BT-revêtement de toute surface de genre non nul.*

L'idée de la preuve est la suivante. Si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination par plans hyperfinie, alors d'après le Théorème 4.1, elle est fortement hypercompacte, ce qui signifie qu'elle admet une filtration compacte simplicial B_n formée par des boréliens dont toutes les feuilles sont des disques. Fixons une surface de genre non nul S. Nous allons construire une BT-application de revêtement $\rho : X \to S$ comme limite d'une suite de BT-homéomorphismes locaux $\rho_n : B_n \to S$ définis sur la filtration B_n.

5.2.1. *Découpages relatifs.* Soit Π et $\hat{\Pi}$ deux piles simpliciales de $(X, \mathcal{F})$. On suppose $\Pi \subset \hat{\Pi}$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

On dira que Π est une *sous-pile pleine de* $\hat{\Pi}$ si toute plaque de $\hat{\Pi}$ rencontre Π et s'il existe un plongement simplicial $f : \Omega \to \hat{\Omega}$ de la base de Π dans la base de $\hat{\Pi}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{i} & \hat{\Pi} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{p}} \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \hat{\Omega} \end{array}$$

où p et $\hat{p}$ sont les projections des piles sur leurs bases respectives. Les trois propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition de sous-pile pleine :

(a) chaque plaque de $\hat{\Pi}$ contient une et une seule plaque de Π. En particulier, les verticales de Π et $\hat{\Pi}$ sont les mêmes ;

(b) l'application $\hat{p} \circ i$ est une application simple au sens de la définition en §3.1.4 ;

(c) les verticales de Π et $\hat{\Pi}$ coïncident, de sorte que tout découpage Π_i de Π détermine un découpage $\hat{\Pi}_i$ de $\hat{\Pi}$.

On généralise la définition ci-dessus à des paires de boréliens à feuilles compactes. On dira qu'un borélien simplicial $B \subset \hat{\Pi}$ est un *sous-borélien plein* de la pile $\hat{\Pi}$ s'il admet un découpage en un nombre fini de sous-piles pleines de $\hat{\Pi}$. Plus généralement, on dira que $B \subset \hat{B}$ est un *sous-borélien plein* de $\hat{B}$ s'il existe un découpage de $\hat{B}$ en piles simpliciales $\hat{\Pi}_j$ tel que $B_j = B \cap \hat{\Pi}_j$ est un sous-borélien plein de la pile $\hat{\Pi}_j$ pour tout j. On appellera cela un découpage de $\hat{B}$ *relatif à* B, ou bien un *découpage relatif* de la paire $(B, \hat{B})$.

On remarque d'abord le fait élémentaire suivant.

LEMME 5.2. *Soient $B_1, B_2 \subset \hat{B}$ deux sous-boréliens disjoints de $\hat{B}$. Si $\hat{\Pi}_i^1$ et $\hat{\Pi}_j^2$ sont des découpages de $\hat{B}$ relatifs à B_1 et B_2 respectivement, alors $\hat{\Pi}_{ij} = \hat{\Pi}_i^1 \cap \hat{\Pi}_j^2$ est un découpage de $\hat{B}$ relatif à $B_1 \cup B_2$.*

Nous prouvons maintenant un analogue du Théorème 3.1 pour des paires de boréliens simpliciaux.

LEMME 5.3. *Toute paire de boréliens simpliciaux à feuilles compactes $B \subset \hat{B}$ admet un découpage relatif.*

Démonstration. Soient T et $\hat{T}$ les espaces de feuilles de B et $\hat{B}$ respectivement. On considère l'application $\nu : \hat{T} \to \mathbb{N}$ qui assigne à chaque $t \in \hat{T}$ le nombre de feuilles de B contenues dans la feuille correspondante $\hat{B}_t$ de B. La mesurabilité de l'application ν se montre de façon analogue à celle de l'application $\sharp$ (voir la Proposition 2.2). On peut alors se ramener au cas où la fonction ν est constante égale à un nombre entier positif $r(B, \hat{B})$ que nous appellerons le *nombre d'intersection* de la paire.

Première étape. On suppose $r(B, \hat{B}) = 1$. Dans ce cas il suffit de montrer que l'application $\hat{p} \circ i$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & \hat{\Pi} \\ & {\scriptstyle \hat{p}\circ i}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \hat{p}} \\ & & \hat{\Omega} \end{array}$$

est semi-simple. Cette BT-application étant simpliciale, cela découle immédiatement du Corollaire 3.1.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Deuxième étape. Nous appliquons maintenant une récurrence sur le nombre d'intersection $r(B, \hat{B})$. On suppose que toute paire de boréliens simpliciaux dont le nombre d'intersection est plus petit ou égale à n vérifie l'énoncé du lemme, et on considère une paire $B \subset \hat{B}$ avec $r(B, \hat{B}) = n + 1$. La projection naturelle de l'espace de feuilles T de B sur l'espace de feuilles $\hat{T}$ de $\hat{B}$ est borélienne et à fibres finies et admet donc une section borélienne d'après le Théorème 2.2. Celle-ci découpe B en deux boréliens saturés B_1 et B_2, le premier correspondant à l'image de cette section et le deuxième étant son complémentaire dans B. Nous avons alors $r(B_1, \hat{B}) = 1$ et $r(B_2, \hat{B}) = n$. Les paires $(B_1, \hat{B})$ et $(B_2, \hat{B})$ admettent alors des découpages relatifs par hypothèse de récurrence. Le Lemme 5.2 permet de conclure.

5.2.2. *Extension d'homéomorphismes locaux.* Le but de ce paragraphe est de montrer le lemme suivant.

LEMME 5.4. *Soient B et $\hat{B}$ deux boréliens simpliciaux par disques, avec $B \subset \mathrm{int}(\hat{B})$. Si $\rho : B \to S$ est un BT-homéomorphisme local semi-simple sur une surface fermée S, alors il admet une BT-extension semi-simple $\hat{\rho} : \hat{B} \to S$.*

Démonstration. Quitte à découper $\hat{B}$ on peut supposer d'après le Lemme 5.3 que celui-ci est une pile simpliciale $\hat{\Pi}$ et que B se découpe à son tour en exactement r piles $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ qui sont pleines dans $\hat{\Pi}$. De plus, on peut supposer que les piles Π_k sont contenues dans une des piles du découpage de B déterminé par l'application semi-simple ρ. En effet, le découpage de ρ sur chaque pile Π_k détermine un découpage de $\hat{\Pi}$ (voir la propriété (c) en §5.2.1). L'intersection de ces découpages nous en donne un dont chaque pile vérifie les conditions requises.

Nous avons donc pour chaque $k = 1, \ldots, r$ une paire de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_k & \xrightarrow{\rho} & S \\ {\scriptstyle p_k}\downarrow & \nearrow_{f_k} & \\ \Omega_k & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Pi_k & \xrightarrow{i} & \hat{\Pi} \\ {\scriptstyle p_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{p}} \\ \Omega_k & \xrightarrow{g_k} & \hat{\Omega} \end{array}$$

où p_k désigne la projection de la pile Π_k sur sa base Ω_k, f_k est l'homéomorphisme local associé à l'application simple $\rho|_{\Pi_k}$, et g_k un plongement simplicial du disque Ω_k dans l'intérieur du disque $\bar{\Omega}$.

Le problème de l'extension semi-simple de ρ est ainsi réduit au problème de l'extension des homéomorphismes locaux $f_k : \Omega_k \to S$ au disque $\bar{\Omega}$. Plus précisément, il suffit de trouver un homéomorphisme local $f : \hat{\Omega} \to S$ tel que $f_k = f \circ g_k$ pour tout k. Pour ce faire on considère le revêtement universel de S :

$$q : \mathbb{R}^2 \to S.$$

On choisit alors des relèvements $\tilde{f_k} : \Omega_k \to \mathbb{R}^2$ des f_k relatifs au revêtement q, dont les images sont des disques $D_1, \ldots, D_r$ de $\mathbb{R}^2$ deux à deux disjoints. On considère ensuite un 'grand' disque D, qui peut être supposé métrique et centré en 0, dont l'intérieur contient

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

les 'petits' disques $D_1, \ldots, D_r$. On remarque que les surfaces planaires

$$\hat{\Omega} - \bigcup_k \Omega_k, \quad D - \bigcup_k D_k$$

sont homéomorphes car elles sont planaires avec le même nombre de composantes connexes dans le bord. Un homéomorphisme entre ces deux surfaces permet d'étendre naturellement les plongements $\tilde{f}_k$ en un plongement $\tilde{f} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$. L'homéomorphisme local $f = q \circ \tilde{f}$ vérifie alors les conditions requises. Ceci complète la preuve du lemme. □

5.2.3. *Rétrécissement d'un borélien simplicial.* On note $\mathrm{sd}_n(\mathcal{K})$ la triangulation de $(X, \mathcal{F})$ obtenue au moyen de la n-ième subdivision barycentrique de $\mathcal{K}$. Pour tout ensemble $A \subset X$, on définit la *n-étoile* de A comme le complémentaire $\mathrm{star}_n(A)$ des triangles de $\mathrm{sd}_n(\mathcal{K})$ qui ne rencontrent pas A. Il n'est pas difficile de vérifier que si A est un borélien de X, il en est de même pour $\mathrm{star}_n(A)$.

Soit Ω une surface simpliciale pour la triangulation $\mathcal{K}$ contenue dans une feuille de $(X, \mathcal{F})$. Pour chaque entier non négatif $n \in \mathbb{N}$ on définit le *n-rétrécissement* de Ω comme étant le fermé

$$\mathrm{ret}_n(\Omega) = \Omega - \mathrm{star}_n(\partial\Omega).$$

Il est réunion des triangles de $\mathrm{sd}_n(\mathcal{K})$ contenus dans Ω et ne rencontrant pas son bord $\partial\Omega$. On remarque que $\mathrm{ret}_n(\Omega)$ est un fermé de Ω contenu dans l'intérieur de $\mathrm{ret}_{n+1}(\Omega)$ et que $\mathrm{int}(\Omega) = \bigcup_n \mathrm{ret}_n(\Omega)$. Pour $n \geq 1$, le n-rétrécissement d'un disque simplicial pour $\mathcal{K}$ est un disque simplicial pour $\mathrm{sd}_n(\mathcal{K})$.

Soit B un borélien simplicial de $(X, \mathcal{F})$. On définit le *n-rétrécissement* de B comme étant l'ensemble $\mathrm{ret}_n(B)$ obtenu par n-rétrécissement de chaque feuille de B. Il est très facile de voir (en tenant compte du Théorème 3.1) que si B est à feuilles compactes alors $\mathrm{ret}_n(B)$ est aussi un borélien (simplicial pour la triangulation $\mathrm{sd}_n(\mathcal{K})$ et à feuilles compactes). En effet, le n-rétrécissement d'une pile simpliciale est clairement une pile simpliciale.

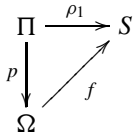
5.2.4. *Preuve de la Proposition 5.1.* La preuve consiste en une application répétée du Lemme 5.4. Reprenons la filtration par disques B_n de la lamination $(X, \mathcal{F})$. Pour chaque n le borélien B_n est contenu dans B_{n+1}, mais il n'est pas contenu dans l'intérieur de B_{n+1} La paire (B_n, B_{n+1}) ne vérifie donc pas les hypothèses du Lemme 5.4. Pour pallier à cette difficulté il suffit de rétrécir convenablement les B_n. On définit

$$\hat{B}_n = \mathrm{ret}_n(B_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les boréliens $\hat{B}_n$ vérifient les conditions d'une filtration compacte forte à l'exception du fait qu'il ne sont pas tous simpliciaux relativement à la même triangulation. Pour tout n la paire $(\hat{B}_n, \hat{B}_{n+1})$ vérifie tout de même les conditions du Lemme 5.4 relativement à la triangulation $\mathrm{sd}_{n+1}(\mathcal{K})$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

On se fixe un découpage en piles de B_1 et on se donne un premier BT-homéomorphisme local $\rho_1 : B_1 \to S$, défini sur chaque pile Π de B_1 par le diagramme suivant :



où p est la projection de Π sur sa base Ω, et $f : \Omega \to S$ un homéomorphisme local quelconque. Le BT-homéomorphisme local ρ_1 est alors semi-simple par construction. On applique le Lemme 5.4 à chaque étape pour obtenir une suite $\rho_n : \Pi_n \to S$ de BT-homéomorphismes locaux semi-simples, chacun étendant le précédent. La limite $\rho = \lim \rho_n$ est alors un BT-homéomorphisme local globalement défini.

Rien n'a été pourtant dit jusqu'à présent qui permette d'assurer que ρ est un BT-revêtement. Pour ce faire il suffit de bien choisir, dans la preuve du Lemme 5.4, les disques métriques D, de sorte que ceux correspondants à l'étape n aient un rayon supérieur ou égal à n. De cette façon on assure la complétude du BT-homéomorphisme local ρ qui devient donc un BT-revêtement. La proposition est démontrée. □

Remarque. Si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination par plans hyperfinie de classe C^p, avec $0 \leq p \leq \infty$, on peut construire le BT-revêtement ρ de classe C^p. Les détails sont laissés au lecteur.

5.3. *Laminations par cylindres.* Une lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ est dite *par cylindres* si toutes ses feuilles sont homéomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

THÉORÈME 5.2. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne par cylindres. Alors $(X, \mathcal{F})$ est un BT-revêtement du tore $\mathbb{T}^2$.*

On remarque d'abord que *toute lamination borélienne par cylindres $(X, \mathcal{F})$ est hyperfinie*, car l'extension compacte d'un flot [**14**]. Plus précisément, il existe une lamination borélienne $(X_1, \mathcal{F}_1)$ de dimension 1 et une BT-application $X \to X_1$ à fibres compactes. La lamination $(X_1, \mathcal{F}_1)$ étant hyperfinie, il en a de même pour $(X, \mathcal{F})$. Ce résultat a été prouvé par Ghys dans [**14**] pour le cas d'une lamination topologique munie d'une mesure harmonique, et il a été adapté au cas d'une mesure quasi-invariante quelconque par Blanc dans [**7**]. Enfin il peut être facilement adapté au cadre purement borélien en utilisant des triangulations.

La preuve du Théorème 5.2 suit la même démarche que celle du Théorème 5.1, mais en remplaçant les filtrations compactes par disques par des filtrations compactes dont les feuilles sont des cylindres compacts $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Les détails seront laissés au lecteur.

Le type d'une lamination par plans. Une autre question se pose naturellement à la vue du Théorème 5.1 : est-ce que toute lamination par plans (non hyperfinie) est un BT-revêtement d'une surface compacte? Le Théorème 5.1 ne répond pas à cette question car il est possible de construire des laminations par plans non hyperfinies (voir l'exemple du §3.2.1). En général, la suspension d'une action borélienne libre et préservant une mesure de Borel

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

finie du groupe fondamental de toute surface de genre ≥ 2 est une lamination par plans non hyperfinie. Or tous ces exemples sont des BT-revêtements de la surface de genre 2, mais le genre de celle ci ne peut pas être réduit d'après le Théorème 5.1. Nous appellerons *type* d'une lamination orientable $(X, \mathcal{F})$ le plus petit nombre réel n tel que $(X, \mathcal{F})$ est un BT-revêtement de la surface compacte orientable de genre n. Si se nombre n'existe pas, on dira $(X, \mathcal{F})$ de *type infini*. On remarquera que, toute surface orientable étant le revêtement d'une surface de genre 0, 1 ou 2, le type d'une lamination par plans ne peut être que 1, 2 ou ∞. D'après le Théorème 5.1, *une lamination par plans est hyperfinie si et seulement elle est de type* 1. Nous ne connaissons pas d'exemples de laminations par plans de type ∞.

6. *Laminations paraboliques*

6.1. *Le théorème d'uniformisation.*

Nous rappelons le théorème classique suivant.

THÉORÈME 6.1. *(*Koebe et Poincaré) Toute surface de Riemann simplement connexe est conformément équivalente à l'une de ces trois surfaces : la sphère de Riemann, le plan euclidien ou le disque de Poincaré.

En particulier pour toute surface S munie d'une métrique de Riemann g, il existe une fonction $u : S \to \mathbb{R}$ telle que la métrique $\exp(u)g$ est à courbure constante égale à $+1$, 0 ou -1. Selon la valeur de cette constante on dira que S est *elliptique*, *parabolique* ou *hyperbolique* respectivement.

Exemple. Une lamination par surfaces $(X, \mathcal{F})$ est dite *holomorphe* si elle est définie par un atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. En particulier les feuilles de $(X, \mathcal{F})$ sont munies d'une structure conforme. Toute lamination holomorphe $(X, \mathcal{F})$ peut être munie d'une métrique de Riemann conforme. Réciproquement, toute métrique de Riemann détermine un atlas holomorphe donné par des systèmes locaux de coordonnées isothermes. On dira qu'une lamination holomorphe $(X, \mathcal{F})$ est *parabolique* si toutes ses feuilles sont paraboliques. Rappelons que les feuilles d'une telle lamination sont des plans, des cylindres ou des tores.

Le lemme suivant est une généralisation du théorème de Koebe et Poincaré aux familles de structures conformes paraboliques. Un résultat analogue se vérifie pour les familles de métriques hyperboliques et elliptiques, mais nous n'en ferons pas usage. Il peut être aussi vu comme une version mesurable du théorème d'Ahlfors et Bers [**1**]. Le lecteur remarquera que, contrairement aux résultats de [**1**], nous n'avons pas besoin ici de supposer que les métriques sont à module borné.

LEMME 6.1. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination parabolique telle qu'il existe un BT-isomorphisme $X \simeq \mathbb{R}^2 \times T$ entre X et un prisme de base $\mathbb{R}^2$. Alors il existe une BT-application :*

$$f : X \to \mathbb{C}$$

qui est une équivalence conforme en restriction à chaque feuille de $(X, \mathcal{F})$.

Démonstration. La donnée de f équivaut à celle d'une famille borélienne d'équivalences conformes $f_t : L_t \to \mathbb{C}$ où L_t est la feuille de $(X, \mathcal{F})$ correspondant au point $t \in T$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

On utilise les cartes locales d'un atlas feuilleté holomorphe de $(X, \mathcal{F})$ pour fixer de façon borélienne un paramètre complexe z_t au voisinage de 0 dans chaque feuille L_t. D'après le théorème de Koebe et Poincaré, il existe une bijection holomorphe non constante $f_t : L_t \to \mathbb{C}$ pour tout $t \in T$. Cette fonction est donnée par $f_t = M_t \circ g_t$, où $g_t : L_t \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une fonction méromorphe non constante et M_t une transformation de Möbius (cf. [**11**, §IV.4.8]). La fonction g_t est définie sous la forme :

$$g_t = u_t + \sqrt{-1}v_t$$

où u_t est une fonction harmonique dans $L_t - \{0\}$ limite d'une suite u_t^n, chacune solution du problème de Dirichlet dans $M_t - \{|z_t| < 1/n\}$ donné par la condition de contour $u_t^n(z) = \mathrm{Re}(1/z_t)$. La fonction v_t est limite de solutions du problème de Dirichlet sur $L_t - \{|z_t| < 1/n\}$ avec $\mathrm{Re}(\sqrt{-1}/z_t)$ comme condition de contour (voir [**11**, §IV.4] pour les détails).

Nous remarquons que la méthode de Perron (voir par exemple [**2**, §III.3]) entraîne la dépendance mesurable des solutions du problème de Dirichlet relativement aux conditions de contour. En effet, si U est une région régulière de M et c est une fonction complexe continue définie sur ∂U, alors il existe une seule extension de c à $\overline{U}$ qui soit harmonique sur U. Cette fonction est donnée par la formule universelle :

$$u(z) = \sup_{v \in \mathcal{V}(c)} v(z)$$

où $\mathcal{V}(c)$ est la famille des fonctions sous-harmoniques sur U telles que :

$$\overline{\lim_{z \in \zeta}}\, v(z) \leq c(\zeta)$$

pour tout $\zeta \in \partial U$. Ceci montre la mesurabilité des familles u_t et v_t, et donc celle de f_t.

6.2. *Groupoïde fondamental.* Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne de dimension n. Un chemin de $(X, \mathcal{F})$ est une application continue $c : [0, 1] \to L$ où L est une feuille de $(X, \mathcal{F})$. On note $\Pi(X, \mathcal{F})$ l'espace formé par les classes d'homotopie de chemins de $(X, \mathcal{F})$. Rappelons que les homotopies considérées sont supposées préserver l'origine et l'extrémité des chemins. Les applications qui associent à tout chemin tangent son origine et son extrémité déterminent donc des applications :

$$\Pi(X, \mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X$$

bien définies au niveau des classes d'homotopie. L'espace $\Pi(X, \mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de groupoïde dont α et β sont les applications source et but respectivement, et dont la loi de composition est donné par passage aux classes d'homotopie de la somme usuelle de chemins. On appelle $\Pi(X, \mathcal{F})$ le *groupoïde fondamental* de la lamination $(X, \mathcal{F})$.

Pour tout $x \in X$, on notera $\tilde{L}_x$ et $\tilde{L}^x$ la α-fibre et la β-fibre de x. Tout élément $\gamma \in \Pi(X, \mathcal{F})$ avec $x = \alpha(\gamma)$ et $y = \beta(\gamma)$ agit à gauche sur les points de $\tilde{L}_y$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

les envoyant sur $\tilde{L}_x$. De façon analogue, il agit à droite sur les points de $\tilde{L}^x$ les envoyant sur $\tilde{L}^y$. On notera ces applications :

$$\tau_\gamma : \tilde{L}_y \to \tilde{L}_x, \quad \rho_\gamma : \tilde{L}^x \to \tilde{L}^y.$$

On peut définir de façon analogue le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ d'un BT-espace standard quelconque X et le munir d'une BT-structure dont les feuilles sont les groupoïdes fondamentaux des feuilles de X. Dans le cas d'une lamination borélienne, nous définirons explicitement la BT-structure du groupoïde fondamental par le biais des cartes d'un atlas feuilleté borélien.

6.2.1. *La structure BT de* $\Pi(X, \mathcal{F})$. Par analogie avec la structure topologique ou différentiable des groupoïdes des feuilletages (cf. [**3**]) nous allons définir une lamination borélienne sur l'espace $\Pi(X, \mathcal{F})$ dont les feuilles sont des variétés de dimension $2n$. Cette lamination est l'analogue borélien des laminations induites $\alpha^*(\mathcal{F}) = \beta^*(\mathcal{F})$ dans le cas différentiable. Les applications source et but seront des BT-submersions dont les fibres définiront des laminations de dimension n sur $\Pi(X, \mathcal{F})$ symétriques relativement à la structure de groupoïde.

Soit $\mathbb{B}^n$ la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$ et T un espace de Borel standard. Soit $\mathbb{B}^n \times T \times \mathbb{B}^n$ un prisme de verticale T. Une BT-application :

$$\mathfrak{c} : [0, 1] \times \mathbb{B}^n \times T \times \mathbb{B}^n \to X$$

est dite un *tube de chemins* de $(X, \mathcal{F})$ si les applications :

$$\mathfrak{c}_0(\cdot, \cdot, y) : \mathbb{B}^n \times T \to X, \quad \mathfrak{c}_1(x, \cdot, \cdot) : T \times \mathbb{B}^n \to X$$

sont des BT-plongements quels que soient $x, y \in \mathbb{B}^n$. Les deux applications ci-dessus représentent des paramétrages locaux de la lamination $(X, \mathcal{F})$. Les applications $\mathfrak{c}.(x, t, y) : [0, 1] \to X$ sont des chemins de $(X, \mathcal{F})$ qui relient les points $\mathfrak{c}_0(x, t, y)$ et $\mathfrak{c}_1(x, t, y)$. Par passage aux classes d'homotopie de chemins nous obtenons une application injective :

$$\hat{\mathfrak{c}} : \mathbb{B}^n \times T \times \mathbb{B}^n \to \Pi(X, \mathcal{F}).$$

On considère une famille dénombrable de tubes de chemins $\mathfrak{c}_i$ et on note U_i l'image dans $\Pi(X, \mathcal{F})$ de chaque $\hat{\mathfrak{c}}_i$. Si la famille U_i recouvre $\Pi(X, \mathcal{F})$ alors les applications

$$\tilde{\varphi}_i = \hat{\mathfrak{c}}_i^{-1} : U_i \to \mathbb{B}^n \times T \times \mathbb{B}^n$$

sont les cartes d'un atlas feuilleté borélien sur $\Pi(X, \mathcal{F})$. On notera $\tilde{\mathcal{F}}$ la lamination borélienne définie par cet atlas. Ceci munit l'espace $\Pi(X, \mathcal{F})$ d'une BT-structure, de sorte que l'inclusion canonique :

$$X \to \Pi(X, \mathcal{F})$$

qui consiste à envoyer le point $x \in X$ sur la classe d'homotopie du lacet constant en x, est en fait un plongement de BT-espaces.

On vérifie aisément que la lamination $(\Pi(X, \mathcal{F}), \tilde{\mathcal{F}})$ peut être donnée par un atlas feuilleté de la même classe que $(X, \mathcal{F})$. Les applications

$$\Pi(X, \mathcal{F}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

sont des BT-applications dont la restriction à chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ est une submersion sur une feuille de $(X, \mathcal{F})$. Remarquons d'ailleurs que les feuilles de cette lamination $(\Pi(X, \mathcal{F}), \tilde{\mathcal{F}})$ ne sont que les groupoïdes fondamentaux des feuilles de $(X, \mathcal{F})$. Les fibres de α (respectivement β) définissent sur $\Pi(X, \mathcal{F})$ une autre lamination plus fine de même classe et dimension que $\mathcal{F}$ que nous noterons $\mathcal{F}_\alpha$ (respectivement $\mathcal{F}_\beta$). Remarquons que les translations à gauche et à droite :

$$\tau_\gamma : \tilde{L}_y \to \tilde{L}_x, \quad \rho_\gamma : \tilde{L}^x \to \tilde{L}^y$$

sont des difféomorphismes de classe maximale entre les feuilles de $\mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\beta$ respectivement.

6.3. *Moyennabilité.* Une *moyenne* sur un espace mesuré standard (T, λ) est par définition un état dans $L^\infty(T, \lambda)$. Autrement dit, une moyenne est une fonctionnelle positive $m : L^\infty(T, \lambda) \to \mathbb{R}$ telle que $m(\mathbf{1}) = 1$.

Définition. Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne différentiable munie d'une mesure transverse quasi-invariante μ. On dira que $(X, \mathcal{F})$ est *μ-moyennable* si elle possède une *moyenne invariante μ-mesurable*, i.e. une application linéaire positive :

$$m : L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) \to L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$$

qui à toute fonction $f \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ associe une fonction $m(f) \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ basique, i.e. constante le long des feuilles, et telle que $m(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Ici $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ désigne l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ qui sont essentiellement bornées relativement à la classe de mesure obtenue en combinant celle de μ et celle de Lebesgue sur les feuilles.

Pour des raisons pratiques, nous allons donner une définition équivalente à celle de moyenne mesurable : celle de système mesurable de moyennes. Un *système mesurable de moyennes* sur $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est une fonction m qui assigne à chaque $x \in X$ une moyenne :

$$m_x \in (L^\infty(L_x, \lambda_x))^*$$

sur la feuille correspondante vérifiant les conditions suivantes :

- $m_x = m_y$ pour x et y dans la même feuille de X ;
- pour toute fonction mesurable $f \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ la fonction $x \mapsto m_x(f)$ est mesurable.

Un système mesurable de moyennes m_x sur X définit sur celui-ci une moyenne m en posant $m(f)(x) = m_x(f)$. De façon analogue, une moyenne définit un système borélien de moyennes par restriction aux feuilles. Les deux notions sont donc équivalentes.

Définition. Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne différentiable munie d'une mesure transverse quasi-invariante μ et soit $\Pi(X, \mathcal{F})$ son groupoïde fondamental. On dira que $\Pi(X, \mathcal{F})$ est *μ-moyennable à gauche* s'il existe un système mesurable de moyennes m sur la lamination $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ tel que

- pour tout $\gamma \in \Pi(X, \mathcal{F})$ avec $x = \alpha(\gamma)$ et $y = \beta(\gamma)$, et toute fonction mesurable $f \in L^\infty(\tilde{L}_x, \mu)$, on a :

$$\tilde{m}_x(f) = \tilde{m}_y(\tau_\gamma^*(f)).$$

On définit de façon analogue la moyennabilité à droite.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Exemple. Si $(X, \mathcal{F})$ est définie par une action borélienne ϕ d'un groupe de Lie moyennable G, alors $(X, \mathcal{F})$ est μ-moyennable pour toute mesure quasi-invariante μ. En effet, si $m \in (L^\infty(G, \nu))^*$ est une moyenne invariante à gauche sur G, alors nous avons sur X un système mesurable de moyennes $\phi_*(m)$ défini par

$$\phi_*(m)_x(f) = m(\phi(\cdot, x)^* f), \quad f \in L^\infty(L_x, \lambda_x).$$

Cet exemple permet d'illustrer le fait suivant.

PROPOSITION 6.1. *Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination différentiable munie d'une mesure transverse quasi-invariante μ. Si son groupoïde fondamental $\Pi(X, \mathcal{F})$ est μ-moyennable à gauche ou à droite, alors $(X, \mathcal{F})$ est μ-moyennable.*

Démonstration. En effet, si $\tilde{m}$ est un système de moyennes invariant à gauche sur $\Pi(X, \mathcal{F})$, on définit $m_x(f) = \tilde{m}_x(\beta_x^*)$, où $\beta_x^* : \tilde{L}_x \to L_x$ est le revêtement conforme de la feuille L_x défini par l'application but β. Le même raisonnement s'applique au cas de la moyennabilité à droite.

Remarquons toutefois que la réciproque n'est pas vraie en général, c'est-à-dire qu'il existe des laminations moyennables dont le groupoïde fondamental est non moyennable.

6.4. *Moyennabilité des laminations paraboliques.* On retourne ici au cas des laminations par surfaces, et plus particulièrement au cas des laminations holomorphes. Ce sont par définition des laminations différentiables, de sorte que sa classe de Lebesgue est bien définie.

THÉORÈME 6.2. *Si $(X, \mathcal{F})$ est une lamination holomorphe parabolique, alors son groupoïde fondamental $\Pi(X, \mathcal{F})$ est μ-moyennable à gauche et à droite pour toute mesure transverse quasi-invariante μ.*

Démonstration. Les feuilles de la lamination $\mathcal{F}_\alpha$, définie sur $\Pi(X, \mathcal{F})$, sont toutes des plans car elles peuvent être identifiées au revêtement universel des feuilles de $\mathcal{F}$. Elle est d'ailleurs clairement hyperfinie car elle admet un domaine fondamental, i.e. un borélien de $\Pi(X, \mathcal{F})$ qui rencontre chaque feuille en un seul point. Elle est donc, d'après le Théorème 5.1, un BT-revêtement du tore $\mathbb{T}^2$.

L'action naturelle de $\mathbb{R}^2$ sur celui-ci se relève en une BT-action localement libre de $\mathbb{R}^2$ sur $\Pi(X, \mathcal{F})$

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times \Pi(X, \mathcal{F}) \to \Pi(X, \mathcal{F})$$

définissant la lamination $\mathcal{F}_\alpha$. Sa restriction à X donne un BT-isomorphisme :

$$\phi|_{\mathbb{R}^2 \times X} : \mathbb{R}^2 \times X \to \Pi(X, \mathcal{F}).$$

Par conséquent le BT-espace $\Pi(X, \mathcal{F})$ est un prisme et $(\Pi(X, \mathcal{F}), \mathcal{F}_\alpha)$ est vérifie les conditions du Lemme 6.1. Il existe une BT-application

$$f : \Pi(X, \mathcal{F}) \to \mathbb{C}$$

qui est une équivalence conforme en restriction à chaque feuille de $\mathcal{F}_\alpha$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

Le groupe G des similitudes du plan euclidien $\mathbb{C}$ est un produit semi-direct de groupes abéliens, donc moyennable. Son action sur $\mathbb{C}$ étant transitive et préservant la classe de la mesure de Lebesgue λ, il existe une moyenne $\tilde{m} \in (L^\infty(\mathbb{C}, \lambda))^*_1$ invariante par G. Le relèvement de la moyenne $\tilde{m}$ par le biais de l'application f nous donne un système mesurable de moyennes $\tilde{m}_x \in (L^\infty(\tilde{L}_x, \lambda))^*$, $x \in X$, sur la lamination $\mathcal{F}_\alpha$. Mais rappelons que, pour tout $\gamma \in \Pi(X, \mathcal{F})$, la translation à gauche $\tau_\gamma : \tilde{L}_y \to \tilde{L}_x$ est une équivalence conforme. L'invariance de $\tilde{m}$ par l'action du groupe conforme G entraîne alors celle de $\tilde{m}_x$ par les translations τ_γ. En d'autres mots, nous avons une moyenne invariante à gauche sur le groupoïde $\Pi(X, \mathcal{F})$. On raisonne de façon analogue pour montrer la moyennabilité à droite. Le théorème est démontré. □

6.5. *Revêtements du tore, métriques plates et actions localement libres de* $\mathbb{R}^2$. Le but de ce paragraphe est de montrer le Théorème 1.3 énoncé dans l'introduction. On supposera que $(X, \mathcal{F})$ est une lamination borélienne orientable munie d'une mesure transverse quasi-invariante μ.

Supposons que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est hyperfinie par plans, tores et cylindres. Ceci signifie qu'il existe un borélien saturé de mesure totale $X' \subset X$ tel que la lamination induite $(X', \mathcal{F}')$ est hyperfinie par plans, tores et cylindres. On peut découper maintenant X' en trois boréliens saturés X'_1, X'_2 et X'_3 réunion respectivement des tores, cylindres et plans de la lamination $\mathcal{F}'$ (voir par exemple [**14**]). Les laminations induites par $\mathcal{F}'$ sur X'_2 et X'_3 sont des BT-revêtements de $\mathbb{T}^2$ d'après les Théorèmes 5.1 et 5.2. Enfin la lamination par tores induite par $\mathcal{F}'$ sur X'_1 est un BT-revêtement car X'_1 admet un découpage en piles (cf. Théorème 3.1). L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est démontrée.

Un BT-revêtement de $\mathbb{T}^2$ est défini par une BT-action localement libre de $\mathbb{R}^2$ relèvement de l'action naturelle de celui-ci sur $\mathbb{T}^2$. Une telle action détermine de manière évidente une métrique plate complète sur les feuilles, qui est parabolique d'après le théorème d'uniformisation de Koebe et Poincaré. Ceci montre les implications (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5).

Enfin si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ admet une métrique de Riemann parabolique alors elle est moyennable d'après le Théorème 6.2. En particulier elle est hyperfinie d'après [**10**]. Presque toutes ses feuilles sont des plans, tores ou cylindres car ce sont les seules trois surfaces admettant une métrique parabolique.

7. *Existence de triangulations*

Nous esquissons ici la preuve du fait que toute lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$ de dimension 2 admet une triangulation. Rappelons qu'une triangulation est donnée par une famille dénombrable de piles de triangles

$$\pi_i : \Delta \times T_i \simeq \Sigma_i$$

de $(X, \mathcal{F})$. Chaque triangle σ est muni d'un paramétrage canonique $\pi_\sigma : \Delta \to \sigma$. On demande les deux conditions suivantes.

(1) Si σ et τ sont deux triangles différents d'intersection non vide, alors ils ont soit une arête, soit un sommet en commun.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

(2) Si $\sigma \cap \tau$ se rencontrent le long d'une arête, alors le changement de paramétrage $\pi_\sigma^{-1} \circ \pi_\tau$ est une bijection affine entre deux arêtes de Δ.

On supposera que la lamination $(X, \mathcal{F})$ est de classe C^1, i.e. elle est donnée par un atlas feuilleté borélien :

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{B} \times T_i$$

dont les changement de plaques $f_{ij}(\cdot, t)$ sont des difféomorphismes locaux de classe C^1. Ici $\mathbb{B}$ désigne la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^2$.

7.1. *Existence de métriques complètes.* Quitte à prendre un raffinement convenable des U_i on peut supposer que les plaques de ceux-ci sont relativement compactes dans les feuilles de $(X, \mathcal{F})$. On définit alors une métrique $g_i = \varphi_i^* |dz|$ sur les plaques de chaque U_i. Une partition de l'unité permet de recoller ces métriques pour obtenir une métrique globalement définie g sur les feuilles de $\mathcal{F}$. Puisque les plaques des U_i sont relativement compactes, la métrique g est complète le long de chaque feuille. Nous avons donc le résultat suivant.

LEMME 7.1. *Toute lamination borélienne de classe C^1 admet une métrique complète.*

7.2. *Existence d'un atlas adapté.* Soit g une métrique complète sur une lamination borélienne $(X, \mathcal{F})$. Un atlas feuilleté borélien de $(X, \mathcal{F})$ est dit *convexe* si toutes ses plaques sont convexes.

LEMME 7.2. *Toute lamination borélienne admet un atlas convexe.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, on note $B_\epsilon(x)$ la boule de rayon ϵ centrée en x. Il est bien connu que pour tout x il existe un rayon $\epsilon(x) > 0$ tel que $B_\delta(x)$ est un voisinage convexe de x pour tout $\delta \leq \epsilon(x)$. Nous laissons au lecteur la tâche très simple de vérifier que l'on peut supposer que la fonction $\epsilon(x)$ est borélienne.

Soit T transversale borélienne de $(X, \mathcal{F})$. Il est possible de découper T en une famille T_i de sorte que, pour tout i et toute paire $x, y \in T_i$, les boules $B_{\epsilon(x)}(x)$ et $B_{\epsilon(y)}(y)$ sont disjointes. On posera :

$$U_i = \bigcup_{x \in T_i} B_{\epsilon(x)}(x)$$

le borélien réunion des ϵ-boules centrés en les points de T_i. On définit alors un paramétrage

$$\pi_i : \mathbb{B} \times T_i \to U_i$$

en normalisant l'application exponentielle relativement à la fonction ϵ. Si l'on choisit la transversale T suffisamment grande pour que la famille de boréliens U_i soit un recouvrement de X, alors les paires (U_i, π_i^{-1}) constituent par construction un atlas feuilleté borélien convexe de $(X, \mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{A}$ un atlas feuilleté de $(X, \mathcal{F})$. On appelle l'*étoile* d'un point $x \in X$ relativement à $\mathcal{A}$ l'ouvert $\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x)$ réunion des plaques de $\mathcal{A}$ qui contiennent x. Un atlas sera dit *adapté* à une métrique g si $\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x)$ est un convexe de g pour tout $x \in X$. Nous avons le résultat suivant, dont la preuve est analogue à celle de Lemme 7.2.

LEMME 7.3. *Toute lamination borélienne admet un atlas adapté.*

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

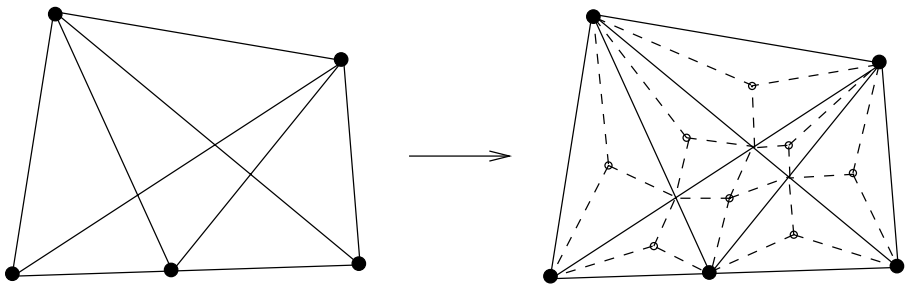


FIGURE 1. Triangulation des laminations.

7.3. *Construction de la triangulation.* Soit $(X, \mathcal{F})$ une lamination borélienne et g une métrique complète. On se fixe un atlas (U_i, φ_i) de $(X, \mathcal{F})$ adapté à la métrique g. On appelle *centre* d'une plaque U_t de U_i le point $b_t = \varphi_i^{-1}(0, t)$, où 0 est le centre de la boule $\mathbb{B}$. Pour chaque paire de plaques U_t et U_s qui se rencontrent, on trace la seule géodésique qui rejoint les centres b_t et b_s. Nous obtenons localement un dessin illustré par la Figuré 1.

Nous avons ainsi une décomposition des feuilles de $(X, \mathcal{F})$ en disques fermés, délimités par des morceaux de géodésique. Nous fixons dans chaque disque son centre de gravité relatif au volume de la métrique g, et nous traçons les géodésiques qui rejoignent le barycentre de chaque disque avec les centres des plaques contenus dans ce disque. Le résultat est une famille de triangulations $\{\mathcal{K}_L \mid L \in \mathcal{F}\}$ des feuilles de $(X, \mathcal{F})$. Chaque triangle peut être identifié à son centre de gravité. L'espace $\mathcal{K}$ de tous les triangles devient ainsi une transversale borélienne de $(X, \mathcal{F})$.

On décompose $\mathcal{K}$ en une famille dénombrable de boréliens T_i de sorte que deux triangles différents d'un même T_i ne se coupent pas. On note

$$\Sigma_i = \bigcup_{\sigma \in T_i} \sigma$$

le borélien réunion de tous les triangles de T_i et on construit des paramétrages

$$\pi_i : \Delta \times T_i \to \Sigma_i$$

qui envoient homothétiquement les arêtes de Δ sur celles de $\mathcal{K}$. Le coefficient de cette homothétie est unique et égal à la longueur de l'arête correspondante. Les changements de paramétrage sont affines par construction. La famille de piles Σ_i est la famille génératrice d'une triangulation de $(X, \mathcal{F})$.

Remerciements. Le premier auteur remercie chaleureusement Fernando Alcalde Cuesta pour ses nombreuses remarques et suggestions et son aide concernant la mise au point des différentes définitions de moyennabilité. Ce travail a été partiellement financé par le Ministerio de Ciencia y Tecnología (Espagne). Projet No. BFM2001-3280.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press

REFERENCES

[1] L. Ahlfors et L. Bers. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. of Math.* (2) **72** (1960), 385–404.

[2] L. V. Ahlfors et L. Sario. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1960.

[3] F. Alcalde Cuesta et G. Hector. Feuilletages en surfaces, cycles evanouissants et varietes de Poisson. *Monatsh. Math.* **124**(3) (1997), 191–213.

[4] W. Ambrose et S. Kakutani. Structure and continuity of measurable flows. *Duke Math. J.* **9** (1942), 25–42.

[5] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault. Amenable groupoids. *Enseign. Math.* (2), 2000.

[6] P. Arnoux, D. S. Ornstein et B. Weiss. Cutting and stacking, interval exchanges and geometric models. *Israel J. Math.* **50**(1–2) (1985), 160–168.

[7] E. Blanc. Propriétés génériques des laminations. *Thèse*, Université Lyon 1, 2002.

[8] R. Bowen. Anosov foliations are hyperfinite. *Ann. of Math.* (2) **106**(3) (1977), 549–565.

[9] A. Candel. Uniformization of surface laminations. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **26** (1993), 489–516.

[10] A. Connes, J. Feldman et B. Weiss. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **1** (1981), 431–450.

[11] H. M. Farkas et I. Kra. *Riemann Surfaces*. Springer, New York, 1980.

[12] J. Feldman et C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **234**(2) (1977), 289–359.

[13] D. Gaboriau. Cout des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.* **139**(1) (2000), 41–98.

[14] É. Ghys. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.* (2) **141**(2) (1995), 387–422.

[15] É. Ghys. Sur l'uniformisation des laminations paraboliques. *Integrable Systems and Foliations/ Feuilletages et Systèmes Intégrables (Montpellier, 1995) (Progress in Mathematics, 145)*. Birkhäuser, Boston, MA, 1997, pp. 73–91.

[16] A. A. Glutsyuk. Simultaneous metric uniformization of foliations by Riemann surfaces. *Comment. Math. Helv.* **79**(4) (2004), 704–752.

[17] P. R. Halmos. *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1950.

[18] G. Hector et U. Hirsch. *Introduction to the Geometry of Foliations. Part A*. Vieweg, Braunschweig, 1981.

[19] S. Jackson, A. S. Kechris et A. Louveau. Countable Borel equivalence relations. *J. Math. Log.* **2**(1) (2002), 1–80.

[20] R. Kallman. Certain quotient spaces are countably separated, III. *J. Funct. Anal.* **22**(3) (1976), 225–241.

[21] J. v. Neumann. Zur operatorenmethode in der klassischen mechanik. *Ann. of Math.* **33** (1932).

[22] H. Rosenberg. Foliations by planes. *Topology* **7** (1968), 131–138.

[23] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.

[24] R. J. Zimmer. *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Birkhäuser, Basel, 1984.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000519 Published online by Cambridge University Press