Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2005), **25**, 1857–1880
doi:10.1017/S0143385705000209
© *2005 Cambridge University Press*
Printed in the United Kingdom

Sur la régularité Hölder des convexes divisibles

OLIVIER GUICHARD
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
(e-mail: olivier.guichard@gmail.com)

(*Received* 11 *June* 2004 *and accepted in revised form* 13 *April* 2005)

Résumé. Nous démontrons l'égalité, pour les convexes divisibles, entre la régularité Hölder du bord du convexe et la régularité Hölder du bord du convexe dual.

0. *Introduction*

Un ouvert convexe Ω de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est dit *divisible* s'il existe un sous-groupe Γ de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ agissant proprement sur l'ouvert Ω avec quotient compact (cette terminologie est du à Vey [**12**]).

Ici, nous nous intéresserons seulement au cas où l'ouvert Ω est *saillant*, ce qui signifie qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tel que $H \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ et où de plus l'ouvert Ω est *strictement convexe*, i.e. pour tout hyperplan H ne rencontrant pas Ω, l'adhérence $\overline{\Omega}$ contient au plus un point de H. Un tel ouvert Ω sera appelé *ouvert strictement convexe divisible*. Pour une introduction et un exposé plus complet des propriétés des convexes divisibles se reporter aux articles de Benoist [**4, 5**].

Une première série d'exemples provient des structures projectives convexes sur une surface compacte de genre g plus grand que deux (une variété est dite convexe si dans toute classe d'homotopie à extrémités fixées de chemins il y a une géodésique). Le revêtement universel de la surface s'identifie alors à un ouvert strictement convexe divisible de l'espace projectif (voir le Théorème 3 dans [**9**]). Une étude plus poussée des surfaces projectives a été faite par Goldman et Choi [**8, 6**].

D'autres exemples sont donnés par les variétés compactes à courbure constante égale à -1, dans ce cas l'ouvert Ω de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un ellipsoïde c'est-à-dire l'image dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ du cône du futur pour une forme quadratique $\mathbf{q}$ de signature $(1, n)$ et le groupe Γ est un réseau cocompact de $\mathrm{SO}(\mathbf{q})$. Les déformations de la structure projective de la variété quotient $M := \Gamma\backslash\Omega$ fournissent des exemples non triviaux d'ouverts strictement convexes et divisibles, voir par exemple le Corollaire 2.10 de [**5**] et la Remarque 1.3 de [**2**].

En général, le bord $\partial\Omega$ n'a pas la régularité des ellipsoïdes. Cependant il est α-Hölder pour au moins un réel $1 < \alpha \leq 2$ (Proposition 4.6 de [**5**]). La borne supérieure α_Ω de ces réels α est appelée régularité de Ω. En outre α_Ω est égal à 2 uniquement si l'ouvert Ω est un ellipsoïde (Proposition 6.1 de [**5**]).

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Le but de ce texte est de montrer que, pour un ouvert Ω strictement convexe divisible, les régularités de Ω et de son convexe dual Ω^* coïncident (Théorème 4), ce qui répond à une question posée dans [**5**]. Le point clef consiste à montrer que cette régularité peut être lue à l'aide des valeurs propres des éléments de Γ (Théorème 22).

1. *Convexes divisibles*

Cette partie redonne la définition des convexes divisibles, tout comme quelques unes de leurs propriétés qui nous seront utiles par la suite et énonce le théorème principal. La lettre V désigne un espace vectoriel réel de dimension $n+1$.

Définition 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{P}(V)$.

L'ouvert Ω sera appelé *convexe divisible* s'il vérifie les propriétés suivantes :

(1) l'ouvert Ω est convexe saillant, i.e. l'adhérence de Ω est contenue dans un ouvert affine.

(2) Il existe Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(V)$ laissant stable Ω et le quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est compact.

Remarques

- Dans tout ce texte, nous nous intéresserons uniquement aux ouverts convexes divisibles qui sont de plus strictement convexes, i.e. tout hyperplan H d'intersection vide avec Ω rencontre $\overline{\Omega}$ en au plus un point.
- Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, le groupe Γ sera supposé *sans torsion*. En effet le groupe Γ est de type fini car il est discret et agit de manière cocompact sur Ω, ce qui permet d'appliquer le lemme de Selberg pour trouver un groupe d'indice fini sans torsion [**11**]. Le quotient $M := \Gamma\backslash\Omega$ est donc une *variété* compacte.

1.1. *Convexe dual.*

Définition 2. Le dual Ω^* de Ω est :

$$\Omega^* := \{[f] \in \mathbb{P}(V^*)/f(x) \neq 0 \text{ pour tout } [x] \text{ dans } \overline{\Omega}\}.$$

Si l'ouvert Ω est saillant, alors son dual Ω^* est un ouvert convexe non vide.

PROPOSITION 3. *Il y a équivalence entre :*

(1) Ω *est un ouvert strictement convexe divisible ;*

(2) Ω^* *est un ouvert strictement convexe divisible.*

Démonstration. Par définition, l'ouvert Ω est saillant et donc le dual Ω^* est non vide et ouvert. De plus il est clair que si un groupe Γ laisse stable Ω, alors le groupe ${}^t\Gamma$ laisse stable Ω^*.

L'équivalence entre la compacité de $\Gamma\backslash\Omega$ et celle de ${}^t\Gamma\backslash\Omega^*$ est démontrée dans le Lemme 2.8 de [**5**]. Donc Ω est divisible si, et seulement si, Ω^* est divisible.

Par ailleurs, un convexe divisible Ω est strictement convexe si, et seulement si, le groupe Γ est un groupe hyperbolique au sens de Gromov (Proposition 2.5 et fait 2.4 de [**5**]). Ceci montre l'équivalence entre la stricte convexité de l'ouvert convexe divisible Ω et celle de son dual. □

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

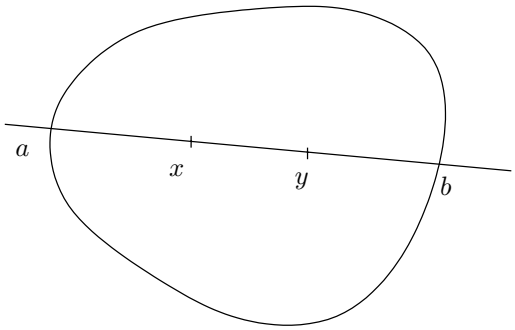


FIGURE 1. La distance de Hilbert.

De plus, on sait que si l'ouvert Ω^* est strictement convexe, le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Un ouvert strictement convexe et divisible a une régularité maximale α_Ω, dont nous donnerons une définition précise dans la §3. Le théorème principal que nous voulons démontrer est le suivant.

THÉORÈME 4. *Soit Ω un ouvert strictement convexe et divisible de $\mathbb{P}(V)$, le dual Ω^* est aussi strictement convexe et divisible par la Proposition 3.*

Les régularités de Ω et Ω^* sont égales :

$$\alpha_\Omega = \alpha_{\Omega^*}.$$

Le Théorème 22 viendra préciser et compléter ce théorème, notamment par le fait que la régularité limite est atteinte et les implications en terme de flot géodésique sur le quotient $\Gamma\backslash\Omega$.

2. *Distance de Hilbert*

Sur un ouvert convexe Ω, en s'inspirant d'une définition de la distance sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, une distance est définie de la façon suivante :

$$\text{pour } x \text{ et } y \text{ dans } \Omega, \quad \begin{cases} \mathrm{d}_\Omega(x, y) = 0 & \text{si } x = y, \\ \mathrm{d}_\Omega(x, y) = |\log(a, b; x, y)| & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

où a et b sont les deux points d'intersection de la droite projective (x, y) avec le bord $\partial\Omega$ (Figure 1), et où $(a, b; x, y)$ désigne le birapport des quatre points a, b, x, y :

$$(a, b; x, y) = \frac{x - a}{x - b}\frac{y - b}{y - a}.$$

La fonction d_Ω ainsi obtenue vérifie bien les axiomes d'une distance.

Cette distance est une métrique finslérienne, elle est définie par une métrique continue sur le fibré tangent. A cette distance, est associé le flot géodésique qui se trouve être ici un flot d'Anosov (§4). La régularité du flot géodésique et celle du bord $\partial\Omega$ sont liées, nous rappellerons précisément comment dans cette §4.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

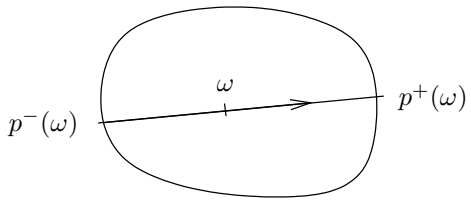


FIGURE 2. La métrique sur Ω.

Récrivons les formules pour la métrique et le flot géodésique. Soit H un hyperplan, avec $\mathbb{P}(H)$ d'intersection vide avec $\overline{\Omega}$, de sorte que Ω s'identifie à un ouvert convexe relativement compact de H et le fibré tangent $\mathrm{T}\Omega$ à $\Omega \times H$.

Soit $\omega = (x, \xi)$ dans $\mathrm{T}\Omega$, il existe alors deux points du bord, $p^+(\omega)$ et $p^-(\omega)$, et deux réels strictement positifs, $\sigma^+(\omega)$ et $\sigma^-(\omega)$, voir Figure 2, tels que

$$\xi = \sigma^+(\omega)(p^+(\omega) - x),$$
$$\xi = \sigma^+(\omega)(x - p^-(\omega)).$$

Les expressions de la norme de ω et du flot sont alors les suivantes :

$$\|\omega\|_\Omega = \sigma^+(\omega) + \sigma^-(\omega),$$
$$\phi^t \cdot \omega = \left(x + \frac{e^t - 1}{\sigma^+(\omega)e^t + \sigma^-(\omega)}\xi,\ \frac{e^t}{(\sigma^+(\omega)e^t + \sigma^-(\omega))^2}\xi\right).$$

Le groupe Γ agit par isométrie sur $(\Omega, \mathrm{d}_\Omega)$. En effet, les éléments de Γ laissent stable l'ouvert Ω et son bord $\partial\Omega$ et les transformations projectives conservent le birapport.

3. *Régularité α-Hölder et β-convexité*

Cette section introduit les notions de régularité α-Hölder et de β-convexité, et donne une caractérisation de la β-convexité pour les fonctions. Les résultats de régularité du bord d'un ouvert strictement convexe divisible sont aussi rappelés.

3.1. *Régularité α-Hölder.*

Définition 5. Soit M une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, M est dite *α-Hölder ou de classe $\mathcal{C}^\alpha$*, pour un réel α, $1 < \alpha \leq 2$, si pour tout compact K de M, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\mathrm{d}(x, \mathrm{T}_y M) \leq C_K \mathrm{d}(x, y)^\alpha \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } K.$$

Remarques

- Les distances considérées ici sont déduites d'une norme sur $\mathbb{R}^n$ et l'espace tangent $\mathrm{T}_y M$ a été implicitement considéré comme un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$.
- Dans le cas où la variété M est le graphe d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, cette définition équivaut à la régularité $(\alpha-1)$-Hölder de la différentielle de f. La fonction f est dite aussi α-Hölder.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Ici, le bord $\partial\Omega$ est aussi naturellement une hypersurface d'un espace vectoriel, car l'adhérence de Ω est incluse dans un ouvert affine de $\mathbb{P}(V)$, on parlera de régularité $\mathcal{C}^\alpha$ pour $\partial\Omega$ et la définition ne dépend pas de l'ouvert affine considéré (la régularité Hölder est en fait une propriété locale).

On sait que le bord des ouverts strictement convexes divisibles est α-Hölder.

PROPOSITION 6. (Proposition 4.6 de [**5**]) *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible de $\mathbb{P}(V)$. Il existe un réel α, $1 < \alpha \leq 2$ pour lequel le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^\alpha$.*

On posera

$$\alpha_\Omega = \sup\{\alpha \leq 2 / \partial\Omega \text{ est de classe } \mathcal{C}^\alpha\}.$$

Par la proposition, α_Ω est strictement supérieur à un. Une des conséquences de ce que nous montrerons est que le bord de Ω est α_Ω-Hölder, c'est-à-dire que la valeur limite est atteinte.

3.2. *β-convexité.*

Définition 7. Soit M une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, M est dite *β-convexe* pour un réel β plus grand ou égal à deux si, pour tout compact K inclus dans M, il existe une constante C_K strictement positive telle que

$$\mathrm{d}(x, \mathrm{T}_y M) \geq C_K \mathrm{d}(x, y)^\beta \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } K.$$

Remarques

- Là encore, cette définition s'applique au bord $\partial\Omega$.
- Lorsque M est le graphe d'une fonction f convexe et de classe $\mathcal{C}^1$, la β-convexité de M est équivalent à la β-convexité de f (voir la Définition 10).

Commençons par faire le lien avec la régularité Hölder.

LEMME 8. *Soient Ω un ouvert strictement convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$, Ω^* son dual dans $\mathbb{P}(V^*)$ et α, β des réels, $1 < \alpha \leq 2 \leq \beta < \infty$, vérifiant l'égalité*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Les deux énoncés suivants sont alors équivalents :

(1) *$\partial\Omega$ est β-convexe ;*

(2) *$\partial\Omega^*$ est de classe $\mathcal{C}^\alpha$.*

Démonstration. Elle utilise les deux points suivants :

- si $\Omega \subset \Omega'$, alors $\Omega'^* \subset \Omega^*$;
- le dual de l'ouvert

$$\Omega_1 = \{[x, y, 1] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) / |y| > |x|^\beta\}$$

est

$$\Omega_1^* = \{[u, 1, v] \in \mathbb{P}((\mathbb{R}^3)^*) / |v| > |u|^\alpha\}. \qquad \square$$

Ce lemme, combiné à la Proposition 6, a pour conséquence la proposition suivante.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 9. *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, alors il existe un réel β, $\beta \geq 2$, pour lequel le bord $\partial\Omega$ est β-convexe.*

Si nous posons

$$\beta_\Omega = \inf\{\beta \geq 2 / \partial\Omega \text{ est } \beta\text{-convexe}\},$$

nous avons alors, par le Lemme 8, la relation

$$\frac{1}{\alpha_{\Omega^*}} + \frac{1}{\beta_\Omega} = 1.$$

Dans toute la suite du texte, la β-convexité sera privilégiée pour des raisons de commodité. Cependant, c'est en terme de régularité α-Hölder du bord et de régularité du flot géodésique qu'il faut en penser les conséquences (cf. la §4 et le Théorème 22). Nous monterons donc l'égalité suivante, équivalente au Théorème 4

$$\beta_\Omega = \beta_{\Omega^*},$$

si Ω est un ouvert strictement convexe divisible et Ω^* son dual.

3.3. *Fonctions β-convexes.* Ce paragraphe donne une caractérisation (et une définition) des fonctions β-convexes, qui sera utile dans la §5.

Définition 10. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$, β un réel plus grand ou égal à deux. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe une constante C_1 strictement positive telle que, pour tous x et y appartenant à U,
$$|f(y) - f(x) - Df_x(y-x)| \geq C_1 \|y-x\|^\beta;$$

(2) il existe une constante C_2 strictement positive telle que, pour tous x et y appartenant à U,
$$\left| f(y) + f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \geq C_2 \|y-x\|^\beta.$$

La fonction f sera alors dite *β-convexe*, si elle vérifie une de ces deux conditions.

Démonstration. L'implication directe (1) $\Rightarrow$ (2) est facile.

Pour l'implication réciproque nous pouvons supposer $x = 0$ et $Df_0 = 0$. Comme la fonction f est convexe, pour tout y appartenant à U, nous avons

$$f(0) + f(y) - 2f\left(\frac{y}{2}\right) = \left| f(0) + f(y) - 2f\left(\frac{y}{2}\right)\right| \geq C_2\|y\|^\beta,$$

$$f(y) - f(0) \geq C_2\|y\|^\beta + 2\left(f\left(\frac{y}{2}\right) - f(0)\right).$$

Par récurrence, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$f(y) - f(0) \geq C_2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-\beta)}\|y\|^\beta + 2^n\left(f\left(\frac{y}{2^n}\right) - f(0)\right)$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

mais le terme de droite admet une limite quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\left(f\left(\frac{y}{2^n}\right) - f(0)\right) = Df_0(y) = 0,$$

donc

$$|f(y) - f(0) - Df_0(y)| = f(y) - f(0) \geq \frac{C_2}{1-2^{1-\beta}}\|y\|^\beta.$$

La constante $C_1 = C_2/(1-2^{1-\beta}) > 0$ convient alors. □

4. *Flot géodésique*

Nous rappelons ici, sans démonstration, les régularités du flot géodésique ϕ^t sur la variété quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$, quand Ω est un ouvert strictement convexe divisé par le groupe Γ.

4.1. *La propriété d'Anosov.*

Définition 11. Soit W une variété compacte, munie d'une métrique riemannienne $\|\cdot\|_W$, et soit ϕ^t un flot sur W défini par un champ de vecteur X.

Le flot ϕ^t est dit *d'Anosov* s'il existe une décomposition continue du fibré tangent $TW = E^+ \oplus \mathbb{R}X \oplus E^-$ invariante par le flot et s'il existe des constantes a et A strictement positives telles que, pour tout $t > 0$, v^+ dans E^+, v^- dans E^-, on a :

$$\|D\phi^{-t}(v^+)\|_W \leq Ae^{-at}\|v^+\|_W \quad \text{et} \quad \|D\phi^t(v^-)\|_W \leq Ae^{-at}\|v^-\|_W. \tag{a}$$

La distribution E^+ est appelée distribution instable, la distribution E^- est la distribution stable.

La borne supérieure des réels a vérifiant les inégalités (a) est notée a_ϕ.

La variété W étant compacte, il existe des constantes b et B strictement positives telles que, pour tout $t > 0$, v^+ dans E^+ et v^- dans E^-, on a

$$\|D\phi^{-t}(v^+)\|_W \geq Be^{-bt}\|v^+\|_W \quad \text{et} \quad \|D\phi^t(v^-)\|_W \geq Be^{-bt}\|v^-\|_W. \tag{b}$$

La borne inférieure de ces réels b est notée b_ϕ.

4.2. *Les distributions stables et instables.*

Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, $M = \Gamma\backslash\Omega$ la variété quotient.

Dans ce cas, les distributions E^+ et E^- sur T^1M, pour lesquelles le flot géodésique ϕ^t est d'Anosov (voir la Proposition suivante 12), sont en fait explicites. Plutôt ce sont les relevés $\widetilde{E}^+$ et $\widetilde{E}^-$ de ces distributions au fibré unitaire $T^1\Omega$ qui se formulent plus facilement (§3.2.5 de [**5**]).

Soit H un hyperplan d'intersection vide avec $\overline{\Omega}$. L'ouvert Ω s'identifie à un ouvert de H, le fibré tangent $T\Omega$ à $\Omega \times H$ et, pour tout $\omega = (x, \xi)$ dans $T\Omega$, l'espace tangent $T_\omega(T\Omega)$ s'identifie à $H \times H$. On reprend aussi $p^+(\omega)$, $p^-(\omega)$, $\sigma^+(\omega)$ et $\sigma^-(\omega)$ comme dans la §2. Appelons aussi H_ω^+ et H_ω^- les hyperplans tangents à $\partial\Omega$ aux points $p^+(\omega)$ et $p^-(\omega)$, I_ω leur intersection et enfin H_ω l'hyperplan contenant x et I_ω (voir Figure 3).

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

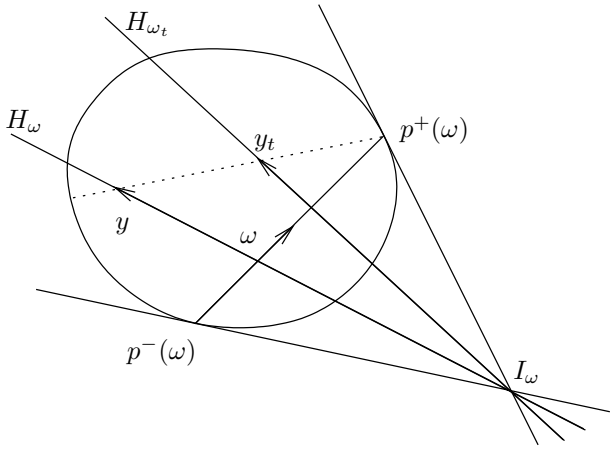


FIGURE 3. La distribution stable et le flot.

Les distributions instables et stables ont alors les expressions suivantes :

$$\widetilde{E}^+_\omega = \{v^+ \in \mathrm{T}_\omega(\mathrm{T}^1\Omega)/v^+ = (y, \sigma^-(\omega)y) \text{ avec } y \in \mathrm{T}_x H_\omega\},$$
$$\widetilde{E}^-_\omega = \{v^- \in \mathrm{T}_\omega(\mathrm{T}^1\Omega)/v^- = (y, -\sigma^+(\omega)y) \text{ avec } y \in \mathrm{T}_x H_\omega\}.$$

Par ailleurs, l'action du flot sur ces distributions admet la description géométrique suivante (§3.2.6 de [**5**]). Soit $\omega = (x, \xi)$ dans $\mathrm{T}^1\Omega$, $\omega_t = \phi^t \cdot \omega = (x_t, \xi_t)$ la géodésique passant ω et soit $v^- = (y, -\sigma^+(\omega)y)$ un point de $\widetilde{E}^-_\omega$. On a alors $D\phi^t(v^-) = (y_t, -\sigma^+(\omega_t)y_t)$. L'élément y_t est l'unique vecteur de $\mathrm{T}_{x_t} H_{\omega_t}$ tel que les trois points $x+y$, $x_t + y_t$ et $p^+(\omega)$ sont alignés.

4.3. *Le flot géodésique est d'Anosov.*

PROPOSITION 12. (Lemme 3.6 et Proposition 4.6 de [**5**]) *Soit Ω un ouvert strictement convexe et divisible, et Γ un groupe (supposé sans torsion) tel que le quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$ est une variété compact.*

Le flot géodésique ϕ^t sur le fibré unitaire tangent T^1M est alors un flot d'Anosov. Les distributions stables et instables sont E^- et E^+ données au paragraphe précédent. En outre, on a les équivalences suivantes :

- *le bord $\partial\Omega$ est α-Hölder $\Leftrightarrow$ la distribution E^- est $(\alpha - 1)$-Hölder ;*
- *si $\alpha > 1$, le bord est α-Hölder $\Leftrightarrow$ les inégalités* (a) *sont vérifiées pour $a = 1-(1/\alpha)$;*
- *le bord est β-convexe $\Leftrightarrow$ les inégalités* (b) *sont vraies pour $b = 1 - (1/\beta)$.*

En particulier, on a les égalités :

$$a_\phi = 1 - \frac{1}{\alpha_\Omega} \quad et \quad b_\phi = 1 - \frac{1}{\beta_\Omega}.$$

Une des conséquences du Théorème 22 sera alors que les valeurs limites a_ϕ et b_ϕ sont atteintes et que $a_\phi + b_\phi = 1$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

4.4. *La propriété d'Anosov sur les géodésiques fermées.* Soit W une variété compacte sur laquelle agit un flot d'Anosov ϕ^t.

Notons a'_ϕ la borne supérieure des réels a tels que les inégalités (a) sont vérifiées restreintes aux orbites périodiques du flot sur W. Autrement dit, pour tout $a < a'_\phi$ et pour toute orbite fermée $\sigma \subset W$, il existe une constante $A = A(a, \sigma)$ telle que (a) vaut pour tout $t > 0$, v^+ dans $E^+_{|\sigma}$, v^- dans $E^-_{|\sigma}$. La constante A n'a ici pas de raison d'être uniforme sur toutes ces orbites.

Une conséquence peut-être plus frappante du Théorème principal 22 est le corollaire suivant.

COROLLAIRE 13. *On reprend les hypothèses de la proposition précédente et les notations ci-dessus. Alors on a l'égalité :*

$$a'_\phi = a_\phi.$$

5. *β-convexité et distance de Hilbert*

La distance de Hilbert étant définie grâce aux points de $\partial\Omega$, il est naturel de rapprocher les propriétés de $\partial\Omega$ et celles de la distance d_Ω. C'est ce que nous faisons dans cette partie en reliant la β-convexité de $\partial\Omega$ et la 'forme' des boules de l'ouvert Ω pour la distance de Hilbert.

Dans ce paragraphe, Ω désigne un ouvert strictement convexe et saillant de $\mathbb{P}(V)$ (ici Ω n'est pas nécessairement supposé divisible).

5.1. *Formes des boules.* Pour toute la suite nous fixons un réel r_0 strictement positif. Nous nous intéressons à la forme des boules pour la distance de Hilbert, si x_0 appartient à Ω

$$B_\Omega(x_0, r_0) := \{x \in \Omega / \mathrm{d}_\Omega(x_0, x) \leq r_0\}.$$

Pour quantifier cette idée, soit δ une distance définissant la topologie sur le fermé $\overline{\Omega}$ et posons, pour β plus grand ou égal à deux,

$$\begin{aligned} \phi^\delta_\beta : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \longmapsto \phi^\delta_\beta(x_0) &= \inf\left\{ \frac{\delta(x_0, y)}{\delta(x_0, x)^\beta} / \mathrm{d}_\Omega(x_0, y) = \mathrm{d}_\Omega(x_0, x) = r_0 \right\} \\ &= \frac{\inf\{\delta(x_0, x) / \mathrm{d}_\Omega(x_0, x) = r_0\}}{\sup\{\delta(x_0, y)^\beta / \mathrm{d}_\Omega(x_0, y) = r_0\}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi^\delta : [2, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \psi^\delta(\beta) := \inf\{\phi^\delta_\beta(x_0) / x_0 \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Intuitivement, on compare le rapport du 'petit axe', $a = \inf_{y \in \partial B_\Omega(y_0, r_0)} \delta(y_0, y)$, et du 'grand axe', $b = \sup_{x \in \partial B_\Omega(y_0, r_0)} \delta(y_0, x)$, de ces boules quand le point x_0 se rapproche du bord $\partial\Omega$ et, plus précisément, si le ratio a/b^β reste minoré.

Ces fonctions dépendent de la distance choisie de la manière suivante.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

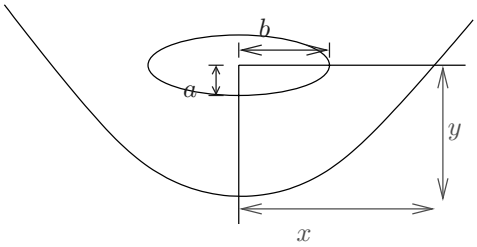


FIGURE 4. Idée de la démonstration.

LEMME 14. *Soient δ et δ' deux distances équivalentes sur $\overline{\Omega}$, alors pour tout x_0 dans Ω,*

$$\frac{1}{C^{1+\beta}}\phi_\beta^\delta(x_0) \leq \phi_\beta^{\delta'}(x_0) \leq C^{1+\beta}\phi_\beta^\delta(x_0),$$

où la constante C est la constante d'équivalence des distances :

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } \overline{\Omega}, \quad \frac{1}{C}\delta(x,y) \leq \delta'(x,y) \leq C\delta(x,y).$$

La démonstration est directe. Ce lemme permettra dans la suite d'adapter les distances sur $\overline{\Omega}$ pour en choisir de plus commode à chaque étape, il montre aussi que l'énoncé '$\psi^\delta(\beta)$ est strictement positif' ne dépend pas de la distance δ.

Décrivons les distances sur $\overline{\Omega}$ que nous allons utiliser. Soit H un hyperplan de V tel que l'intersection de $\mathbb{P}(H)$ et de $\overline{\Omega}$ soit vide. Le fermé $\overline{\Omega}$ s'identifie à un compact de H et on le munit de la métrique δ_H induite par une norme $\|\cdot\|_H$ sur H. Il est facile de voir que la classe d'équivalence de la métrique ainsi définie ne dépend ni de $\|\cdot\|_H$ ni de H.

5.2. *β-convexité et formes de boules.* La proposition suivante prouve le lien annoncé avec la β-convexité.

PROPOSITION 15. *Soient Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et β un réel plus grand ou égal à deux. Si pour un (tout) hyperplan H, pour lequel $\mathbb{P}(H) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, $\psi^{\delta_H}(\beta)$ est strictement positif, alors le bord $\partial\Omega$ est β-convexe.*

Démonstration. L'idée est approximativement la suivante : lorsque la boule se rapproche du bord (Figure 4), le 'petit diamètre' a devient équivalent à Ky, où K est une constante et le 'grand diamètre' b devient équivalent à $K'x$. Mais, par hypothèse, il existe C tel que $a \geq Cb^\beta$. Ceci implique l'existence d'un réel C' tel que $y \geq C'x^\beta$. Le reste de la démonstration rend ce raisonnement rigoureux.

Nous chercherons à appliquer le point (2) de la définition des fonctions β-convexes (Définition 10).

Nous travaillons dans l'ouvert affine défini par l'hyperplan H. Soit $\|\cdot\|_H$ une norme euclidienne sur H.

Soit p_0 un point de $\partial\Omega$, il suffit de prouver la β-convexité dans un voisinage de p_0 (la propriété est locale). Il existe un voisinage U de p_0 dans l'espace tangent $\mathrm{T}_{p_0}\partial\Omega$, un voisinage U' de p_0 dans l'orthogonal $\mathrm{T}_{p_0}\partial\Omega^\perp \simeq \mathbb{R}$ et une fonction $f : U \to U'$ vérifiant :

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

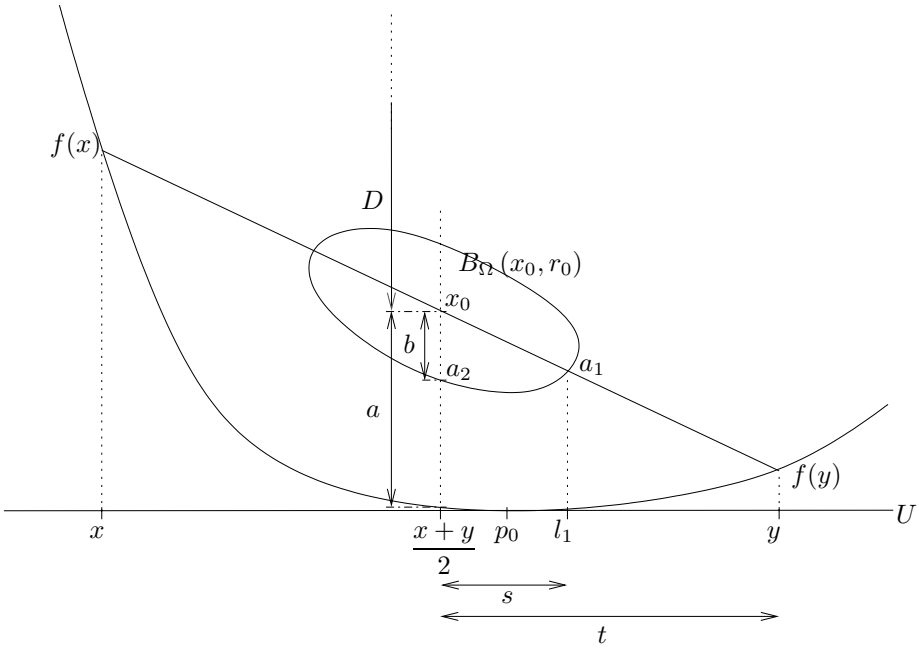


FIGURE 5. β-convexité du bord.

- $U \times U'$ est un voisinage de p_0 dans H;
- $\partial\Omega \cap (U \times U') = \{(x, f(x))/x \in U\}$.

La fonction f est convexe car l'ouvert Ω est convexe. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ car le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soient x et y appartenant à U.

Notons x_0 le milieu de $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, a_1 un des points d'intersection du bord $\partial B_\Omega(x_0, r_0)$ (r_0 a été fixé précédemment) et de la droite passant par les deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, prenons, par exemple, pour a_1 le point le plus proche de y et notons a_2 le point du bord $\partial B_\Omega(x_0, r_0)$ d'abscisse $(x + y)/2$ et d'ordonnée minimale.

Les longueurs a, b, s, t et D sont indiquées sur la Figure 5, D est la distance de x_0 au second point d'intersection de la verticale passant par x_0 avec le bord $\partial\Omega$.

Calculons $\mathrm{d}_\Omega(x_0, a_1)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\Omega(x_0, a_1) &= |\log((x, f(x)), (y, f(y)); x_0, a_1)| \\
&= \left|\log\left(x, y; \frac{x+y}{2}, l_1\right)\right| \\
&= \left|\log \frac{t-s}{t} \frac{t}{t+s}\right|, \\
r_0 &= -\log \frac{t-s}{t+s}.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

La deuxième égalité vaut par l'invariance du birapport par projection. Ceci donne

$$t = s\frac{1+e^{-r_0}}{1-e^{-r_0}},$$

par ailleurs,

$$t = \frac{\|x-y\|_H}{2}.$$

Il existe donc une constante C_1, indépendante de x et y, telle que

$$\|x-y\|_H^\beta = C_1 s^\beta$$

mais s est plus petit que $\|x_0 - a_1\|_H = \delta_H(x_0, a_1)$. Nous obtenons

$$\|x-y\|_H^\beta \le C_1 \delta_H(x_0,a_1)^\beta. \tag{c}$$

Calculons également $\mathrm{d}_\Omega(x_0, a_2)$:

$$\mathrm{d}_\Omega(x_0,a_2) = \left|\log \frac{b+D}{D}\frac{a}{a-b}\right|$$
$$\text{avec } a = \left|\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|.$$

Après calcul, il vient :

$$a = b\frac{e^{r_0}}{e^{r_0}-1-(b/D)}.$$

Il est aussi facile de voir que la distance D, qui est une fonction continue du couple (x, y) appartenant à $U \times U$, est minorée uniformément sur $U \times U$. De même, nous pouvons supposer, quitte à restreindre U, que la distance b est majorée par une constante aussi petite que l'on veut. Il existe donc une constante C_2 strictement positive, indépendante de x et y, et telle que

$$\frac{e^{r_0}}{e^{r_0}-1-(b/D)} \ge C_2,$$

comme b est égal à $\delta_H(x_0, a_2)$, ceci montre

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge C_2\delta_H(x_0,a_2). \tag{d}$$

Des inégalités (c) et (d) se déduit

$$\frac{1}{\|x-y\|_H^\beta}\left|\left(f(x)+f(y)-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\right| \ge 2\frac{C_2}{C_1}\frac{\delta_H(x_0,a_2)}{\delta_H(x_0,a_1)^\beta}$$
$$\ge 2\frac{C_2}{C_1}\phi_\beta^{\delta_H}(x_0) \ge 2\frac{C_2}{C_1}\psi^{\delta_H}(\beta) = C$$

et C est un réel strictement positif. Au final, pour tous x et y dans U, nous avons

$$\left|f(x)+f(y)-2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \ge C\|x-y\|^\beta$$

c'est-à-dire, la fonction f est β-convexe. □

Remarque. On a aussi la proposition réciproque, i.e. la β-convexité implique que $\psi^\delta(\beta)$ soit strictement positif, mais ce ne sera pas utile dans la suite.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

6. *Eléments (r, ε)-loxodromiques et distance de Hilbert*

Le but de cette partie est de donner quelques propriétés des éléments loxodromiques. Ces propriétés nous servirons pour la démonstration du Théorème 22. Nous commençons par rappeler les définitions d'éléments proximal et loxodromique.

6.1. *Proximalité.* Fixons sur V une structure euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est muni d'une distance δ_0, associée à la norme $\| \cdot \|$ sur V, si x et y sont dans $\mathbb{P}(V)$,

$$\delta_0(x, y) := \inf\{\|u - v\| / u \in x,\ v \in y \text{ et } \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

Soit g un élément de $\mathrm{PGL}(V)$, g est dit *proximal* si g a une unique valeur propre de plus grand module. Cette valeur propre est réelle et on notera x_g^+ la droite propre associée, soit aussi $V_g^<$ l'hyperplan supplémentaire stable par g.

L'action de g sur $\mathbb{P}(V)$ a alors un unique point attracteur x_g^+ et le bassin d'attraction est le complémentaire de l'hyperplan $X_g^< = \mathbb{P}(V_g^<)$.

Réciproquement, un élément g qui admet un point attracteur sur $\mathbb{P}(V)$ est proximal.

Définition 16. Soit g un élément proximal et $r \geq \varepsilon > 0$. Posons

$$b_g^{\varepsilon,\delta_0} = B(x_g^+, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{P}(V) / \delta_0(x, x_g^+) \leq \varepsilon\},$$

et

$$B_g^{\varepsilon,\delta_0} = \{x \in \mathbb{P}(V) / \delta_0(x, X_g^<) \geq \varepsilon\}.$$

On dit que g est (r, ε)-*proximal* si :

- $\delta_0(x_g^+, X_g^<) \geq 2r$;
- $g(B_g^{\varepsilon,\delta_0}) \subset b_g^{\varepsilon,\delta_0}$;
- la restriction de g à $B_g^{\varepsilon,\delta_0}$ est ε-lipschitzienne.

6.2. *Eléments loxodromiques.* Soit g un élément de $\mathrm{PGL}(V)$, g est dit *loxodromique* (on dit aussi $\mathbb{R}$-régulier), si les valeurs propres de g, comptées avec multiplicité, sont deux à deux de modules distincts. Nous les notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ (elles sont nécessairement réelles) avec $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_{n+1}|$, et soient $v_1, \ldots, v_{n+1}$ des vecteurs propres associés.

Pour $i = 1, \ldots, n+1$ notons V_i la puissance extérieure i-ème de V, $V_i = \bigwedge^i V$, alors l'action de g sur $\mathbb{P}(V_i)$ est proximal de point fixe attracteur $x_i^+ = \mathbb{R}v_1 \wedge \cdots \wedge v_i$ et le bassin d'attraction est le complémentaire de $\mathbb{P}(V_i^<)$, où

$$V_i^< = \langle v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_i} / k_1 < \cdots < k_i \text{ et } k_i > i \rangle.$$

Réciproquement, un élément g, dont l'action est proximal sur $\mathbb{P}(V_i)$ pour tout i, est loxodromique.

La structure euclidienne sur V induit une structure euclidienne sur chaque V_i, $i = 1, \ldots, n+1$, par la formule :

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_i, w_1 \wedge \cdots \wedge w_i \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i} \varepsilon(\sigma) \langle v_1, w_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle v_i, w_{\sigma(i)} \rangle.$$

Si $(e_i)_{i=1,\ldots,n+1}$ est une base orthonormée de V, alors une base orthonormée de V_i est $(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_i})_{1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq n+1}$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Définition 17. Un élément g de $\mathrm{PGL}(V)$ sera dit (r, ε)-loxodromique si l'action de g sur $\mathbb{P}(V_i)$ est (r, ε)-proximal pour tout i.

Dans la suite, les vecteurs propres de g seront normalisés, i.e. $\|v_1\| = \cdots = \|v_{n+1}\| = 1$.

6.3. *Eléments loxodromiques et distance sur* $\mathbb{P}(V)$. Soit g loxodromique, notons encore $v_1, \ldots, v_{n+1}$ les vecteurs propres de g, normalisés, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ classées par module décroissant.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ le produit scalaire pour lequel $v_1, \ldots, v_{n+1}$ est une base orthonormée, et δ_g la distance induite sur $\mathbb{P}(V)$,

$$\delta_g(x, y) = \inf\{\|u - v\|_g / u \in x,\ v \in y \text{ et } \|u\|_g = \|v\|_g = 1\}.$$

Comme l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est compact, la distance δ_g est évidemment équivalente à δ_0.

Le but de ce paragraphe est de montrer que, lorsque g est (r, ε)-loxodromique, les constantes qui interviennent dans l'équivalence des distances peuvent être choisies indépendamment de g.

On sait qu'il existe une base orthonormée (e_i) de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et une matrice T triangulaire inférieure, à diagonale strictement positive, telles que

$${}^t(v_1, \ldots, v_{n+1}) = T\, {}^t(e_1, \ldots, e_{n+1}).$$

(C'est le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.) Nous noterons $T(g)$ la matrice triangulaire inférieure ainsi associée à g.

PROPOSITION 18. *Soit $r > 0$. Il existe un compact K_r de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que, si g est (r, ε)-loxodromique, alors la matrice $T(g)$ appartient au compact K_r.*

Démonstration. Soit $S(V)$ la sphère unité de V pour la norme $\|\cdot\|$. Soit U l'ouvert de $S(V)^{n+1}$ des $(n+1)$-uplets de vecteurs indépendants.

Notons F_r l'ensemble des $(n+1)$-uplets $(w_1, \ldots, w_{n+1})$ vérifiant les équations suivantes :

$$\delta_0(\mathbb{R}w_1, \mathbb{P}(W_1^<)) \geq 2r$$
$$\delta_0(\mathbb{R}w_1 \wedge w_2, \mathbb{P}(W_2^<)) \geq 2r$$
$$\cdots$$
$$\delta_0(\mathbb{R}w_1 \wedge \cdots \wedge w_k, \mathbb{P}(W_k^<)) \geq 2r$$
$$\cdots$$

où $W_k^< = \langle w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} / i_1 < \cdots < i_k \text{ et } i_k > k \rangle$, et δ_0 est la distance sur les $\mathbb{P}(V_i)$ induite par la structure euclidienne.

L'ensemble F_r est compact et inclus dans U. Notons aussi T l'application

$$U \longrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$
$$(w_1, \ldots, w_{n+1}) \longmapsto T(w_1, \ldots, w_{n+1})$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

où $T(w_1, \dots, w_{n+1})$ est la matrice issue du procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Cette application T est continue, donc l'image de F_r est un compact K_r.

Si g est un élément (r, ε)-loxodromique, alors, avec (v_i) ses vecteurs propres comme ci-dessus, le $(n+1)$-uplets $(v_1, \dots, v_{n+1})$ appartient à F_r. Par conséquent la matrice $T(g)$ associée à g appartient à ce compact K_r. □

De cette proposition, nous déduisons le corollaire :

COROLLAIRE 19. *Soit $r > 0$. Il existe une constante C_r strictement positive et telle que, pour g appartenant à* $\mathrm{PGL}(V)$*, si g est (r, ε)-loxodromique, alors*

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } \mathbb{P}(V), \quad \frac{1}{C_r}\delta_g(x, y) \leq \delta_0(x, y) \leq C_r \delta_g(x, y).$$

δ_g est la distance, associée à la norme $\|\cdot\|_g$, introduite plus haut.

7. *Egalité des régularités Hölder*

Nous démontrons maintenant le théorème annoncé dans la première partie (Théorème 4). Nous montrons en fait le Théorème 22 qui est plus précis.

Dans le reste de cette partie Ω désigne un ouvert ouvert strictement convexe divisible, et Γ le sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(V)$ correspondant.

7.1. *Notations.* Introduisons quelques notations relatives au groupe Γ.

Soit g appartenant à $\mathrm{PGL}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ les valeurs propres de g classées par modules décroissants. Les logarithmes des modules de ces valeurs propres sont notés $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{n+1}$.

Si g est biproximal, c'est-à-dire g et g^{-1} sont proximaux, on pose alors

$$\alpha_g := \frac{l_1 - l_{n+1}}{l_1 - l_n}, \quad \beta_g := \frac{l_1 - l_{n+1}}{l_1 - l_2}.$$

De plus, définissons

$$\beta_\Gamma := \sup_{g \in \Gamma,\ g \text{ proximal}} \beta_g \quad \text{et} \quad \alpha_\Gamma := \inf_{g \in \Gamma,\ g^{-1} \text{ proximal}} \alpha_g.$$

Lorsque g appartient à $\Gamma - \{\mathrm{id}\}$, on sait que g est proximal (Proposition 5.1 de [**5**]), et de même g^{-1}, alors

$$\frac{1}{\alpha_{g^{-1}}} + \frac{1}{\beta_g} = 1.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{\alpha_\Gamma} + \frac{1}{\beta_\Gamma} = 1. \tag{e}$$

De même, nous avons $\alpha_{{}^t g} = \alpha_g$ et $\beta_{{}^t g} = \beta_g$, et donc

$$\alpha_\Gamma = \alpha_{{}^t\Gamma} \quad \text{et} \quad \beta_\Gamma = \beta_{{}^t\Gamma}. \tag{f}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

7.2. *Proximalité et régularité.* Ces réels α_Γ et β_Γ sont liés avec la régularité du bord par les inégalités suivantes :

PROPOSITION 20. (Corollaire 5.3 de [**5**]) *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, divisé par le groupe Γ. Avec les notations ci-dessus, nous avons les inégalités*

$$1 < \alpha_\Omega \leq \alpha_\Gamma \leq 2 \leq \beta_\Gamma \leq \beta_\Omega < \infty.$$

Nous reproduisons la démonstration pour la commodité du lecteur.

Démonstration. Soit $g \neq \mathrm{id}$ dans Γ. On sait que g est biproximal. Notons x_g^+ et x_g^- les droites propres associées aux valeurs propres de plus grand et de plus petit module respectivement. Et soit W_g un supplémentaire g-invariant de ces droites. La matrice de g dans une base adaptée à la décomposition $x_g^+ \oplus W_g \oplus x_g^-$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_g & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de g sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, et on note encore $l_1 \geq \cdots \geq l_{n+1}$ les logarithmes de leurs modules. En outre, d'après la Proposition 5.1 de [**5**], on sait que x_g^+ appartient au bord $\partial\Omega$ et que l'hyperplan tangent $\mathrm{T}_{x_g^+}\partial\Omega$ est $V_g^> = x_g^+ \oplus W_g$.

Dans l'ouvert affine défini par $V_g^< = W_g \oplus v_g^-$, on peut placer le point x_g^+ à l'origine et l'hyperplan tangent est alors le sous-espace vectoriel W_g. Dans cette carte g agit par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} A_g & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1}\lambda_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Il existe alors des éléments p du bord $\partial\Omega$ tels que :

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \log \delta_0(g^q \cdot p, x_g^+) = l_n - l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \log \delta_0(g^q \cdot p, V_g^>) = l_{n+1} - l_1.$$

La régularité Hölder montre alors que $\alpha_g \geq \alpha_\Omega$ et donc $\alpha_\Gamma \geq \alpha_\Omega$. L'autre inégalité se montre de manière similaire. □

Le flot géodésique et les valeurs propres des éléments de Γ sont liés.

PROPOSITION 21. *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, Γ un groupe sans torsion divisant Ω. Soit encore a'_ϕ la constante associée au flot géodésique ϕ^t sur le quotient $M = \Gamma\backslash\Omega$ comme dans le Corollaire 13.*

On alors l'égalité

$$a'_\phi = \frac{1}{\beta_\Gamma} = 1 - \frac{1}{\alpha_\Gamma}.$$

Démonstration. a'_ϕ est la constante de contraction associée aux géodésiques périodiques. Soit $a < 1/\beta_\Gamma$.

Les géodésiques fermées de $\mathrm{T}^1 M$ correspondent aux géodésiques $(\omega_s)_{s\in\mathbb{R}}$ de $\mathrm{T}^1\Omega$ telles qu'il existe g non nul dans Γ avec $g \cdot (\omega_s)_{s\in\mathbb{R}} = (\omega_s)_{s\in\mathbb{R}}$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Munissons le fibré $\mathrm{T}^1\Omega$ d'une métrique riemannienne $\|\cdot\|_{\mathrm{T}^1\Omega}$ Γ-équivariante. Pour une telle géodésique $(\omega_s)_{s\in\mathbb{R}}$, il faut donc montrer qu'il existe A tel que, pour tout s, pour tout $t>0$, pour tout v^- dans $\widetilde{E}^-_{\omega_s}$:

$$\|(D\phi^t)_{\omega_s} v^-\|_{\mathrm{T}^1\Omega} \leq Ae^{-at}\|v^-\|_{\mathrm{T}^1\Omega}.$$

(La même démonstration tiendra aussi pour $\widetilde{E}^+$.)

Les logarithmes des modules des valeurs propres de l'élément g, tel que $g\cdot(\omega_s)=(\omega_s)$, sont notés $l_1\geq\cdots\geq l_{n+1}$. On a donc, pour tout s, $g\cdot\omega_s=\omega_{s+l_1-l_{n+1}}$, ceci vient de la formule de la distance de Hilbert sur Ω. Par g-invariance, il suffit donc de montrer l'égalité plus haut pour s dans l'intervalle $[0, l_1-l_{n+1}]$. Par compacité, on se ramène à montrer cette inégalité pour $s=0$ et $t=q(l_1-l_{n+1})$ avec q dans $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire qu'il existe A tel que, pour tout q dans $\mathbb{N}^*$ et v^- dans $\widetilde{E}^-_{\omega_0}$, $t=q(l_1-l_{n+1})$,

$$\|(D\phi^t)_{\omega_0} v^-\|_{\mathrm{T}^1\Omega} \leq Ae^{-at}\|v^-\|_{\mathrm{T}^1\Omega}.$$

Soit H un hyperplan, tel que $\mathbb{P}(H)$ est d'intersection vide avec $\overline{\Omega}$, muni d'une norme $\|\cdot\|_H$. Comme dans la §2, Ω est identifié à un ouvert de H, le fibré tangent $\mathrm{T}\Omega$ s'identifie à $\Omega\times H$ et, pour ω dans $\mathrm{T}\Omega$, $\mathrm{T}_\omega(\mathrm{T}\Omega)$ à $H\times H$. On reprend aussi les notations de cette partie $(p^+, p^-, \sigma^+, \sigma^-)$.

Pour $\omega=\omega_0=(x,\xi)$, on a ici $p^+(\omega)=x_g^+$ la droite propre de g associée à la valeur propre de module λ_1 et $p^-(\omega)=x_g^-$. Le supplémentaire g-invariant à ces droites x_g^+ et x_g^- est noté W_g. L'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en x_g^+ est $x_g^+\oplus W_g$, celui en x_g^- est $x_g^-\oplus W_g$.

Soit maintenant $v^-=(y,-\sigma^+(\omega)y)$ dans $\widetilde{E}^-_\omega$, où y appartient à $\mathrm{T}_x H_\omega$ (cf. Figure 3 où $I_\omega=W_g$, $p^+(\omega)=x_g^+$ et $p^-(\omega)=x_g^-$). Ici H_ω et l'hyperplan contenant x et W_g. On a alors $D\phi^t(v^-)=(y_t,-\sigma^+(\omega_t)y_t)$ et y_t est l'élément de $\mathrm{T}_{x_t}H_{\omega_t}$ tel que $x+y$, x_t+y_t et x_g^+ sont alignés (cf. §4.2). L'hyperplan H_{ω_t} contient x_t et W_g.

D'après le Lemme 3.5 de [**5**], il existe une constante $C>0$ telle que

$$C^{-1}\|y_t\|_\Omega \leq \|D\phi^t(v^-)\|_{\mathrm{T}^1\Omega} \leq C\|y_t\|_\Omega$$

($\|\cdot\|_\Omega$ est la métrique sur Ω définie par la distance de Hilbert).

Il faut donc trouver une constante A telle que, pour tout y et tout $t=q(l_1-l_{n+1})$, on a $\|y_t\|_\Omega\leq Ae^{-at}\|y\|_\Omega$. Par définition de $\|\cdot\|_\Omega$, il suffit alors d'avoir une telle inégalité avec σ^+ et σ^-.

Mais

$$\sigma^+(y_t)=\frac{\|y_t\|_H}{\mathrm{d}_H(p^+(y_t),x_t)},$$
$$\sigma^+(y)=\frac{\|y\|_H}{\mathrm{d}_H(p^+(y),x)}.$$

Alors

$$\frac{\sigma^+(y_t)}{\sigma^+(y)}\leq\frac{\|y_t\|_H}{\|y\|_H}\frac{\max_{p\in H_\omega\cap\partial\Omega}\mathrm{d}_H(p,x)}{\min_{p\in H_{\omega_t}\cap\partial\Omega}\mathrm{d}_H(p,x_t)}.$$

Par la construction même de y_t, on remarque que, pour tout t positif, $\|y_t\|_H/\|y\|_H\leq ke^{-t}$, pour une certaine constante k. De plus, pour $t=q(l_1-l_{n+1})$, on remarque que g^q

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

envoie $H_\omega \cap \partial\Omega$ sur $H_{\omega_t} \cap \partial\Omega$ et on obtient facilement la minoration suivante, pour tout $q > 0$ et $t = q(l_1 - l_{n+1})$,

$$\min_{p \in H_{\omega_t} \cap \partial\Omega} \mathrm{d}_H(p, x_t) \geq K e^{q(l_n - l_1)} \min_{p \in H_\omega \cap \partial\Omega} \mathrm{d}_H(p, x)$$

pour une constante K (par exemple en utilisant la carte affine de la démonstration précédente).

Ce qui donne l'existence d'une constante A telle que

$$\frac{\sigma^+(y_t)}{\sigma^+(y)} \leq A e^{-t(1-1/\alpha_g)},$$

et comme $a < 1 - 1/\alpha_g$, cette dernière égalité conclut. On obtient donc que $a'_\phi \geq 1/\beta_\Gamma$.

Réciproquement, il existe des vecteurs y tels que, pour tout $t = q(l_1 - l_{n+1})$, on a

$$\mathrm{d}_H(p^+(y_t), x_t) \geq K e^{q(l_1 - l_n)},$$
$$\|y_t\|_H \geq k e^{-t} \|y\|_H,$$

et le même calcul montre qu'alors $a'_\phi \leq 1 - 1/\alpha_g$ et on obtient bien l'égalité $a'_\phi = 1 - 1/\alpha_\Gamma$. □

7.3. *Conclusion.* Il reste à démontrer que les inégalités dans la Proposition 20 sont en fait des égalités, ce qui impliquera facilement le résultat voulu (Théorème 4) par les équations (f).

THÉORÈME 22. *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, divisé par le groupe Γ. Notons encore α_Ω et β_Ω les régularités de Ω, α_Γ et β_Γ les constantes associées au groupe Γ au §7.1, enfin a_ϕ et a'_ϕ les constantes relatives au flot géodésiques définies au §4.4.*

Alors :

(1) *le bord $\partial\Omega$ est α_Γ-Hölder, en particulier $\alpha_\Omega = \alpha_\Gamma$;*
(2) *le bord $\partial\Omega$ est β_Γ-convexe, et donc $\beta_\Omega = \beta_\Gamma$;*
(3) *les constantes de contraction du flot sont égales, $a_\phi = a'_\phi = 1/\beta_\Omega$;*
(4) *les régularités de Ω et de son dual coïncident, $\alpha_\Omega = \alpha_{\Omega^*}$, $\beta_\Omega = \beta_{\Omega^*}$.*

Le Lemme 8 et les égalités (f) établissent l'équivalence des points (1) et (2) du théorème. Les points (3) et (4) se déduisent alors des deux premiers, des Propositions 12 et 21 et de l'égalité (f).

Nous sommes amenés à démontrer uniquement la proposition suivante.

PROPOSITION 23. *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisé par Γ.*

Soit β un réel supérieur ou égal à β_Γ, alors le bord $\partial\Omega$ est β-convexe.

Démonstration. On suppose que l'ouvert Ω n'est pas un ellipsoïde. Nous disposons du fait suivant :

$$\text{il existe } r \geq \varepsilon > 0 \text{ et un compact } K \text{ de } \Omega, \text{ pour lesquels :}$$
$$\text{pour tout } x \text{ dans } \Omega, \text{ il existe } y \text{ dans } K \text{ et } g \text{ dans } \Gamma, \text{ tels que}$$
$$g \text{ est } (r, \varepsilon)\text{-loxodromique et } x = g \cdot y$$

dont la démonstration est reportée (Proposition 26).

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Soit β plus grand que β_Γ, d'après la Proposition 15, il suffit de démontrer que $\psi^{\delta_0}(\beta)$ est strictement positif, c'est-à-dire que la fonction $\phi_\beta^{\delta_0}$, introduite dans la §5, est minorée sur l'ouvert Ω.

Cette fonction est continue et donc minorée sur le compact K par un réel strictement positif c. Soit C_r la constante d'équivalence des distances, donnée par le Corollaire 19, et posons $D = C_r^{1+\beta}$, alors, d'après le Lemme 14, pour tout g (r,ε)-loxodromique et tout x_0 dans Ω

$$\frac{1}{D}\phi_\beta^{\delta_g}(x_0) \leq \phi_\beta^{\delta_0}(x_0) \leq D\phi_\beta^{\delta_g}(x_0),$$

et donc la fonction $\phi_\beta^{\delta_g}$ est minorée sur K par c/D (δ_g est la distance, associée à g, introduite dans la §6).

Soit g (r,ε)-loxodromique, $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ ses valeurs propres ordonnées par modules décroissant, $v_1,\dots,v_{n+1}$ des vecteurs propres associés et $l_1,\dots,l_{n+1}$ les logarithmes des modules des valeurs propres.

La droite $x_g^+ = \mathbb{R}v_1$ appartient à $\partial\Omega$ et est l'élément attracteur de g dans $\mathbb{P}(V)$, de même $x_g^- = \mathbb{R}v_{n+1}$ est dans $\partial\Omega$ et l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en x_g^- est $\mathbb{P}(V_g^<)$ avec $V_g^< = \langle v_2,\dots,v_{n+1}\rangle$. Le bassin d'attraction de g est l'ouvert affine $B_g^+ = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(V_g^<)$:

$$\begin{aligned}\varphi_g : V_g^< &\longrightarrow B_g^+\\ v &\longmapsto [v_1+v].\end{aligned}$$

L'action de g se lit facilement dans cette carte affine :

$$g * v_i := \varphi_g^{-1}\circ g\circ\varphi_g(v_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}v_i \quad \text{pour tout } i>1.$$

L'espace vectoriel $V_g^<$ est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_g'$ pour laquelle $\{v_2,\dots,v_{n+1}\}$ est une base orthonormée. De la formule ci-dessus, il vient immédiatement

$$\begin{aligned}\text{pour tout } v \text{ dans } V_g^<,\quad \left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1}\right|\|v\|_g' &\leq \|g*v\|_g'\\ &\leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|\|v\|_g', e^{l_{n+1}-l_1} \leq \frac{\|g*v\|_g'}{\|v\|_g'} \leq e^{l_2-l_1}. \qquad \text{(g)}\end{aligned}$$

Cette norme induit une distance sur l'ouvert affine B_g^+, que nous notons δ_g'. Elle n'induit pas une distance sur $\overline{\Omega}$, car l'intersection $\mathbb{P}(V_g^<)\cap\overline{\Omega} = \{x_g^-\}$ n'est pas vide, mais elle induit tout de même une distance sur Ω. On peut donc calculer $\phi_\beta^{\delta_g'}$ mais le Lemme 14 ne s'applique plus.

Avec cette distance δ_g', les calculs se simplifient, pour y_0 dans Ω

$$\begin{aligned}\phi_\beta^{\delta_g'}(g\cdot y_0) &= \inf\left\{\frac{\delta_g'(g\cdot y_0, y)}{\delta_g'(g\cdot y_0, x)^\beta}/x, y\in\partial B_\Omega(g\cdot y_0, r_0)\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\delta_g'(g\cdot y_0, g\cdot y)}{\delta_g'(g\cdot y_0, g\cdot x)^\beta}/x, y\in\partial B_\Omega(y_0, r_0)\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\|g*(\varphi_g^{-1}(y_0)-\varphi_g^{-1}(y))\|_g'}{\|g*(\varphi_g^{-1}(y_0)-\varphi_g^{-1}(x))\|_g'^\beta}/x, y\in\partial B_\Omega(y_0, r_0)\right\}\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

car g est une isométrie du bord $\partial B_\Omega(y_0, r_0)$ sur le bord $\partial B_\Omega(g \cdot y_0, r_0)$. Ensuite, utilisant les majorations (g)

$$\geq e^{l_{n+1}-l_1}(e^{l_2-l_1})^{-\beta} \inf\left\{ \frac{\|\varphi_g^{-1}(y_0) - \varphi_g^{-1}(y)\|'_g}{\|\varphi_g^{-1}(y_0) - \varphi_g^{-1}(x)\|'^{\beta}_g} / x, y \in \partial B_\Omega(y_0, r_0) \right\}$$
$$\geq e^{(\beta-\beta_g)(l_1-l_2)} \phi_\beta^{\delta'_g}(y_0)$$

donc comme $(\beta - \beta_g)(l_1 - l_2) \geq 0$, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\phi_\beta^{\delta'_g}(g \cdot y_0) \geq \phi_\beta^{\delta'_g}(y_0). \tag{h}$$

Si y_0 appartient à K, il nous reste à comparer $\phi_\beta^{\delta'_g}(y_0)$ et $\phi_\beta^{\delta_g}(y_0)$ et de même avec $\phi_\beta^{\delta'_g}(g \cdot y_0)$ et $\phi_\beta^{\delta_g}(g \cdot y_0)$, lorsque l'élément g est (r, ε)-loxodromique. C'est ce que fait le lemme suivant.

LEMME 24. *Il existe une constante $E > 0$, telle que pour tout g (r, ε)-loxodromique et pour tout y_0 appartenant à K*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E}\phi_\beta^{\delta'_g}(y_0) \leq \phi_\beta^{\delta_g}(y_0) \leq E\phi_\beta^{\delta'_g}(y_0) \\ \text{et} \quad &\frac{1}{E}\phi_\beta^{\delta'_g}(g \cdot y_0) \leq \phi_\beta^{\delta_g}(g \cdot y_0) \leq E\phi_\beta^{\delta'_g}(g \cdot y_0). \end{aligned} \tag{i}$$

Démonstration. Posons

$$K' = \{x \in \Omega / \mathrm{d}_\Omega(x, K) \leq r_0\},$$

alors l'intersection de K' avec le bord $\partial\Omega$ est vide, donc il existe un réel e tel que $\delta_0(K', \partial\Omega) \geq e > 0$. Si g est (r, ε)-loxodromique, avec la constante C_r du Corollaire 19

$$\delta_g(K', \partial\Omega) \geq \frac{e}{C_r}.$$

Ceci signifie que, si y_0 appartient à K, la boule $B_\Omega(y_0, r_0)$ est loin de $\mathbb{P}(V_g^<)$ (distance supérieure à e/C_r), ce qui impliquera la même propriété pour $B_\Omega(g \cdot y_0, r_0)$ et aussi l'équivalence des distances. Plus précisément nous avons le lemme suivant.

LEMME 25. *Soit $\eta > 0$. Soit g un élément loxodromique, on pose*

$$B_g^{\eta,\delta_g} = \{x \in \mathbb{P}(V) / \delta_g(x, \mathbb{P}(V_g^<)) \geq \eta\}.$$

Il existe une constante $F > 0$ ne dépendant pas de g, pour laquelle les distances δ_g et δ'_g sont équivalents sur l'ensemble B_g^{η,δ_g} :

$$\textit{pour tous } x,\ y \in B_g^{\eta,\delta_g}, \quad \frac{1}{F}\delta_g(x, y) \leq \delta'_g(x, y) \leq F\delta_g(x, y).$$

Démonstration. Notons $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1} = W$. Le norme euclidienne usuelle sur W définit une distance δ sur $\mathbb{P}(W)$.

Soit aussi $W^< := \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_{n+1}$. La restriction de la norme euclidienne à $W^<$ définit une distance δ' sur l'ouvert affine $\mathbb{P}(W) - \mathbb{P}(W^<)$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Soit g est un élément loxodromique de $\mathrm{PGL}(V)$, avec $v_1, \ldots, v_{n+1}$ les vecteurs propres (normalisés) de g. L'application linéaire de V dans W qui envoie v_i sur e_i induit une bijection de B_g^{η,δ_g} sur

$$B^{\eta,\delta} := \{x \in \mathbb{P}(W)/\delta(x, \mathbb{P}(W^<)) \geq \eta\}.$$

Cette bijection est de plus une isométrie de $(B_g^{\eta,\delta_g}, \delta_g)$ sur $(B^{\eta,\delta}, \delta)$ mais aussi une isométrie de $(B_g^{\eta,\delta_g}, \delta'_g)$ sur $(B^{\eta,\delta}, \delta')$. La constante F d'équivalence des distances δ et δ' convient. □

Le réel η est dorénavant fixé à e/C_r. Alors pour tout y_0 dans K et tout g (r,ε)-loxodromique, la boule $B_\Omega(y_0, r_0)$ est incluse dans B_g^{η,δ_g}.

La boule B_g^{η,δ_g} est l'image par la carte affine φ_g de la boule de $(V_g^<, \|\cdot\|'_g)$ centrée en 0 et de rayon

$$R = \frac{2-\eta^2}{\sqrt{4\eta^2-\eta^4}}.$$

Comme l'action de g sur $V_g^<$ est contractante, l'image par g de la boule $B_\Omega(y_0, r_0)$ est encore incluse dans l'ensemble B_g^{η,δ_g}.

Donc sur les boules $B_\Omega(y_0, r_0)$ et $B_\Omega(g\cdot y_0, r_0)$ les distances δ_g et δ'_g sont équivalentes avec la constante F du lemme précédent, ce qui implique, avec $E = F^{1+\beta}$,

$$\frac{1}{E}\phi_\beta^{\delta'_g}(y_0) \leq \phi_\beta^{\delta_g}(y_0) \leq E\phi_\beta^{\delta'_g}(y_0)$$
$$\text{et} \quad \frac{1}{E}\phi_\beta^{\delta'_g}(g\cdot y_0) \leq \phi_\beta^{\delta_g}(g\cdot y_0) \leq E\phi_\beta^{\delta'_g}(g\cdot y_0).$$

Ce qui conclut pour le Lemme 24. □

Nous pouvons maintenant conclure : pour tout x_0 dans Ω, il existe y_0 dans K et g (r,ε)-loxodromique dans Γ tels que $x_0 = g\cdot y_0$, alors d'après les équations (h) et (i),

$$\begin{aligned}\phi_\beta^{\delta_0}(x_0) &\geq \frac{1}{D}\phi_\beta^{\delta_g}(x_0) \geq \frac{1}{DE}\phi_\beta^{\delta'_g}(x_0)\\ &\geq \frac{1}{DE}\phi_\beta^{\delta'_g}(y_0) \geq \frac{1}{(DE)^2}\phi_\beta^{\delta_0}(y_0)\\ &\geq \frac{c}{(DE)^2}\end{aligned}$$

donc $\psi^{\delta_0}(\beta)$ est strictement positif et le bord $\partial\Omega$ est β-convexe, ce qui termine la démonstration de la Proposition 23. □

Pour être complet, il faut encore démontrer ce dernier fait laissé en suspend.

PROPOSITION 26. *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible, divisé par le groupe Γ. Si l'ouvert Ω n'est pas un ellipsoïde, alors il existe des réels $r \geq \varepsilon > 0$ et un compact K de Ω tels que :*

pour tout x_0 dans Ω, il existe y_0 dans K et g dans Γ, avec
g (r,ε)-loxodromique et $x_0 = g\cdot y_0$.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. D'après le Théorème 3.6 de [**2**], le groupe Γ est Zariski-dense et contient donc un élément loxodromique [**10**]. C'est alors une conséquence directe du théorème d'Abels, Margulis et Soĭfer [**1**] qu'il existe une partie finie F de Γ et $r \geq \varepsilon > 0$ pour lesquels on a la propriété :

$$\text{pour tout } g \text{ dans } \Gamma, \text{ il existe } h \text{ dans } F \text{ tel que}$$
$$gh^{-1} \text{ est } (r, \varepsilon) - \text{loxodromique.}$$

De plus, par hypothèse, il existe un compact K_0 de Ω tel que $\Omega = \Gamma \cdot K_0$. Le compact $K = F \cdot K_0$ vérifie les conclusions de la proposition. □

A. *Appendix. Quasi-isométries*

Les idées utilisées ici s'adaptent facilement pour montrer que l'injection de Γ dans $\mathrm{PSL}(V)$ est un plongement quasi-isométrique.

Définition A1. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.

Une application φ de X dans Y est un *plongement quasi isométrique* s'il existe $(\mathcal{K}, C)$, tel que, pour tous x, x' dans X

$$\frac{1}{\mathcal{K}}\mathrm{d}_X(x, x') - C \leq \mathrm{d}_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \mathcal{K}\mathrm{d}_X(x, x') + C.$$

On dira aussi $(\mathcal{K}, C)$-plongement quasi-isométrique.

De plus, φ est une *quasi-isométrie* si, pour tout y dans Y, il existe x dans X avec $\mathrm{d}_Y(y, \varphi(x)) \leq C$.

Si Γ est un groupe de type fini, il est muni de la distance d_Γ définie par la longueur des mots sur une partie finie génératrice S. La classe de quasi-isométrie de cette distance ne dépend pas de la partie génératrice [**7**].

Soit g dans $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})$. On note $\mu_+ = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$, avec $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n+1}$ sa composante de Cartan, i.e. $g = k \exp(\mu_+) l$ avec k et l dans $\mathrm{PSO}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Les deux lemmes suivants nous seront utiles.

LEMME A2. *Soit* $\mathrm{d}_{\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})}$ *une distance sur* $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *invariante à gauche et provenant d'une métrique riemanienne,* $\|\cdot\|$ *une norme sur les matrices diagonales de trace nulle.*

Il existe alors $(\mathcal{K}, C)$ *tel que, pour tout* g, μ_+ *la composante de Cartan de* g *:*

$$\frac{1}{\mathcal{K}}\|\mu_+\| - C \leq \mathrm{d}_{\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})}(g, \mathrm{id}) \leq \mathcal{K}\|\mu_+\| + C.$$

Démonstration. Par invariance et compacité de $\mathrm{PSO}_{n+1}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer ces inégalités pour le sous-groupe des matrices diagonales. Ceci revient ensuite à l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie. □

LEMME A3. *Pour tout* $r \geq \varepsilon > 0$*, il existe une constante* c *telle que, pour tout* g (r, ε)*-proximal dans* $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})$*,* l_1 *le logarithme du module de la plus grande valeur propre de* g*,* μ_1 *la plus grande valeur propre de la composante de Cartan de* g*, on a :*

$$c\mu_1 \leq l_1 \leq \mu_1.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. C'est le Lemme 1.3 de [**3**]. □

PROPOSITION A4. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *un ouvert strictement convexe divisible,* Γ *un sous groupe de* $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *divisant* Ω.

L'injection de Γ *dans* $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *est alors un plongement quasi isométrique.*

Démonstration. En fait, seule l'inégalité de gauche dans la Définition A1 n'est pas immédiate.

Comme le groupe Γ agit proprement sur Ω avec quotient compact, l'application orbitale

$$(\Gamma, \mathrm{d}_\Gamma) \longrightarrow (\Omega, \mathrm{d}_\Omega)$$
$$g \longmapsto g \cdot x$$

est une quasi-isométrie (x est un point quelconque de Ω). Il existe donc une constante K telle que, pour tout g dans Γ

$$\mathrm{d}_\Omega(g \cdot x, x) \geq \frac{1}{K}\ell_\Gamma(g).$$

(ℓ_Γ est la longueur des mots dans Γ).

D'après le théorème d'Abels, Margulis et Soĭfer, il existe $r \geq \varepsilon > 0$ et une partie finie F de Γ tels que, pour tout g dans Γ, il existe h dans F avec gh^{-1} (r, ε)-proximal.

Par ailleurs, il est facile de voir qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout g dans Γ, si g^{-1} est (r, ε)-proximal, x_g^+ et x_g^- les points fixes attracteur et répulseur de g dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, alors il existe y appartenant à l'intersection de Ω et de la droite (x_g^+, x_g^-) tel que $\mathrm{d}_\Omega(y, x) \leq R$. Soient $l_1 \geq \cdots \geq l_{n+1}$ les logarithmes des modules des valeurs propres de g, on a alors

$$\mathrm{d}_\Omega(g \cdot y, y) = l_1 - l_{n+1},$$

donc

$$l_1 - l_{n+1} \geq \mathrm{d}_\Omega(g \cdot x, x) - 2R \geq \frac{1}{K}\ell_\Gamma(g) - 2R.$$

Mais le Lemme A3 appliqué à g^{-1} permet de montrer que

$$\|\mu_+\| := |\mu_1 - \mu_{n+1}| \geq \frac{1}{c}(l_1 - l_{n+1}).$$

Soit $(\mathcal{K}, C)$ les constantes du Lemme A2. Soit maintenant g dans Γ, il existe donc h dans F tel que $g^{-1}h$ est (r, ε)-proximal, en conséquence

$$\mathcal{K}\mathrm{d}_{\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})}(h^{-1}g, \mathrm{id}) + C \geq \frac{1}{c}\left(\frac{1}{K}\ell_\Gamma(h^{-1}g) - 2R\right),$$

et ayant :

$$\ell_\Gamma(h^{-1}g) \geq \ell_\Gamma(g) - \max_{h \in F} \ell_\Gamma(h)$$
$$\mathrm{d}_{\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})}(g, \mathrm{id}) \geq \mathrm{d}_{\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})}(h^{-1}g, \mathrm{id}) - \max_{h \in F} \mathrm{d}_{\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{R})}(h, \mathrm{id})$$

on obtient bien la conclusion voulue. □

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press

RÉFÉRENCES

[1] H. Abels, G. A. Margulis et G. A. Soĭfer. Semigroups containing proximal linear maps. *Israel J. Math.*, **91** (1995), 1–30.

[2] Y. Benoist. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.* **141** (2000), 149–193.

[3] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. II. *Adv. Stud. Pure Math.* **26** (2000), 33–48.

[4] Y. Benoist. Convexes divisibles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), 387–390.

[5] Y. Benoist. Convexes divisibles I, Algebraic groups and arithmetic. *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.* **17** (2004), 339–374.

[6] S. Choi et W. M. Goldman. The classification of real projective structures on compact surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **34** (1997), 161–171.

[7] É. Ghys et P. de la Harpe (Eds). *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Progress in Mathematics, 83)*. Birkhäuser, 1988.

[8] W. M. Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Diff. Geom.* **31** (1990), 791–845.

[9] N. H. Kuiper. On convex locally-projective spaces. *Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Italia*. Edizioni Cremonese, Roma, 1954, pp. 200–213.

[10] G. Prasad. **R**-regular elements in Zariski-dense subgroups. *Q. J. Math. Oxford Ser.* **45** (1994), 541–545.

[11] A. Selberg. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. *Contributions to Function Theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay)*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, pp. 147–164.

[12] J. Vey. Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **24** (1970), 641–665.

https://doi.org/10.1017/S0143385705000209 Published online by Cambridge University Press