Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2001), **21**, 479–492
Printed in the United Kingdom © *2001 Cambridge University Press*

Le théorème limite central pour les suites de R. C. Baker

KATUSI FUKUYAMA† et BERNARD PETIT‡

† *Department of Mathematics, Kobe University, Rokko, Kobe, 657-8501 Japan*
(e-mail: fukuyama@math.kobe-u.ac.jp)
‡ *Département de Mathématiques, Université de Bretagne Occidentale,*
U.F.R. Sciences et Techniques, B.P. 809, 29285 Brest Cedex, France
(e-mail: petit@univ-brest.fr)

(*Received* 29 *October* 1998 *and accepted* 25 *June* 2000)

Abstract. Let $D = (\omega_n)_{n\geq 0}$ be the multiplicative semi-group generated by the coprime integers $q_1, \ldots, q_\tau$ arranged in increasing order. If f is a real-valued 1-periodic function, we consider the sums $S_n f(t) = \sum_{0\leq k<n} f(\omega_k t)$. For a large class of functions, we prove the existence of a limiting variance σ^2 for the sequence $\{S_n f/\sqrt{n}\}$, we give a function characterization for the case when $\sigma = 0$ and finally we prove a central limit theorem.

0. *Introduction*

Le problème du comportement asymptotique des sommes $\sum_{k=0}^{n-1} f(\omega_k t)$ (où f est une fonction réelle 1-périodique de moyenne nulle présentant certaines propriétés de régularité et où $(\omega_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante non bornée de réels ≥ 1) a fait, depuis de nombreuses années, l'objet de multiples études. Sans évidemment prétendre à l'exhaustivité, nous pouvons citer, pour mémoire :

- [**K1**] pour $\omega_k = a^k$, a entier ≥ 2,
- [**K2**] pour $\omega_k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k\to\infty} \omega_{k+1}/\omega_k = +\infty$,

et, pour le cas où les ω_k ne sont plus nécessairement entiers,

- [**Be1**] et [**Be2**] pour $\omega_{k+1}/\omega_k \geq q > 1$,
- [**F**], [**Pe1**] et [**Pe2**] pour une étude détaillée du cas $\omega_k = \theta^k$ où θ est réel > 1.

Récemment, W. Philipp (cf. [**Ph**]) s'est intéressé aux suites de R. C. Baker, i.e. aux suites d'entiers de la forme $q_1^{\alpha_1} \ldots q_\tau^{\alpha_\tau}$ ($q_1, \ldots, q_\tau$ étant des entiers donnés deux à deux premiers entre eux) en établissant, par des méthodes de martingales, une estimation du type logarithme itéré lorsque f est une fonction indicatrice d'intervalle. Le problème du théorème limite central était jusqu'ici sans réponse complète, et il nous est apparu intéressant de nous y attacher compte tenu des résultats rappelés ci-dessus. Nous nous proposons donc d'établir, pour les suites de R. C. Baker, un théorème limite central valable pour une très large classe de fonctions comprenant notamment les fonctions höldériennes.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Ce travail est divisé en quatre parties. Dans la première, nous fixons quelques notations et énonçons nos résultats. La deuxième est consacrée à quelques propriétés de nature arithmétique de la suite $(\omega_k)_{k\geq 0}$. Dans la troisième, nous nous intéressons aux questions de normalisation : détermination de la variance limite et caractérisation des fonctions 'singulières', c'est-à-dire de variance limite nulle. Enfin, dans la dernière, le théorème limite central est établi.

1. *Notations et résultats*

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On se donne $q_1, \ldots, q_\tau$ des entiers > 1 deux à deux premiers entre eux et on note $D = (\omega_k)_{k\geq 0}$ l'ensemble, ordonné selon l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, des entiers de la forme $q_1^{n_1} \ldots q_\tau^{n_\tau}$. Nous notons $\mathbb{Z}_0$ l'ensemble des entiers relatifs premiers à chacun des q_i.

Si f est une fonction réelle 1-périodique, localement intégrable, de moyenne nulle, $\widehat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ désigne son coefficient de Fourier d'indice n et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n f(t) = \sum_{|p|\leq n-1} \hat{f}(p) \exp(2i\pi pt)$$

sa somme partielle de Fourier d'indice n.

Nous poserons $S_n f(t) = \sum_{0\leq k\leq n-1} f(\omega_k t)$. Voici alors les quatre résultats que nous nous proposons de démontrer dans la suite. Le premier de ces résultats permet d'exprimer la variance limite.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction réelle 1-périodique localement intégrable de moyenne nulle vérifiant*

$$S(f) := \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left(\sum_{a\in D} |\hat{f}(ra)| \right)^2 < +\infty. \tag{1.1}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 (S_n f(t))^2 \, dt := \sigma^2 = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left| \sum_{a\in D} \hat{f}(ra) \right|^2$$
$$= \sum_{\substack{(a,b)\in D^2 \\ a\wedge b=1}} \left| \int_0^1 f(at) f(bt) \, dt \right| < +\infty.$$

Si la fonction f est à variation bornée sur $[0, 1]$, on sait que $|\hat{f}(n)| \leq C/|n|$ où C est une constante [**Z**, p. 48] : elle vérifie donc l'hypothèse (1.1). Parmi les fonctions à variation bornée, on peut considérer les fonctions $f_{u,v} = \mathbf{1}_{(u,v)} - (v - u)$ où $0 \leq u < v < 1$ (naturellement prolongée par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$) et chercher des conditions sur u et v pour qu'une telle fonction ait un $\sigma^2 > 0$. La réponse complète à ce problème semble difficile ; nous n'y apportons qu'une solution partielle :

THÉORÈME 2. *Si $\sigma^2_{u,v}$ est la variance limite de $f_{u,v}$, $\sigma^2_{u,v} > 0$ dans chacun des cas suivants :*

(1) *$u = 0$;*

(2) *u ou v est irrationnel.*

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Le troisième résultat permet de donner une caractérisation fonctionnelle des fonctions de variance limite nulle :

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction réelle 1-périodique localement intégrable de moyenne nulle vérifiant*

$$\sum_{n\geq 1} n^{\tau-1}\|f - s_{2^n} f\|_2 < +\infty. \tag{1.2}$$

Alors (1.1) *est satisfaite et $\sigma = 0$ si, et seulement s'il existe $f_1, \ldots, f_\tau \in L^2([0,1])$ telles que chaque g_i ($g_i(t) = f_i(t) - f_i(q_i t)$) vérifie la condition* (1.1) *et que*

$$f(t) = \sum_{1\leq i\leq \tau} (f_i(t) - f_i(q_i t))$$

pour presque tout $t \in [0,1]$.

(N.B. La norme $\|\cdot\|_2$ fait naturellement référence à l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue.)

Enfin, notre dernier résultat est le théorème limite central :

THÉORÈME 4. *Soit f une fonction réelle 1-périodique localement intégrable de moyenne nulle vérifiant* (1.1) *et telle que $\sigma > 0$, alors, pour tout ouvert $U \subset [0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\left\{t \in U \;\middle|\; \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n f(t) \leq x\right\}\right) = \frac{m(U)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$.

Remarques. (1) Des arguments classiques permettent évidemment de généraliser le Théorème 4 au cas où U est seulement Lebesgue-mesurable.

(2) Du fait que (1.2) implique (1.1), il est évident que toute fonction höldérienne obéit à cette dernière condition. Plus précisément, la condition (1.2) équivaut à

$$\int_0^1 (-\ln x)^{\tau-1} \frac{m_2(x)}{x}\, dx < \infty \quad \text{où} \quad m_2(x) = \sup_{|h|\leq x} \left(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Cette équivalence peut être prouvée en utilisant les résultats de Zygmund [**Z**, p. 241, (3.3)] et Bari [**Ba**, p. 160, (2.6)].

Comme nous l'avons annoncé plus haut nous commençons par quelques propriétés de D.

2. *Quelques propriétés de répartition*

Il s'agit pour nous ici de prouver quelques propriétés de cardinalité, somme toute assez intuitives, mais qui joueront, néanmoins, un rôle essentiel dans la suite.

LEMME 1. *Il existe des constantes c_0 et c_1 telles que, pour tout $x \geq 1$:*

$$|\operatorname{card}(\{k \mid \ln \omega_k < x\}) - c_0 x^\tau| \leq c_1 x^{\tau-1}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Ce résultat est facile et peut se prouver, par exemple, par récurrence sur τ en constatant que $\{k \mid \ln \omega_k < x\}$ est en bijection avec $\{(x_1, \ldots, x_\tau) \in \mathbb{N}^\tau \mid \sum_{1 \le i \le \tau} x_i \ln q_i < x\}$. On obtient alors la formule ci-dessus avec $c_0 = (\tau! \ln q_1 \ldots \ln q_\tau)^{-1}$, la valeur de c_1 présentant peu d'intérêt. □

COROLLAIRE 1.
(1) $|n - c_0 \ln^\tau \omega_n| \le c_1 \ln^{\tau-1} \omega_n$.
(2) *Il existe une constante c_2 telle que pour tout $x \ge 1$ et tout $y > 0$:*

$$|\mathrm{card}(\{k \mid x \le \ln \omega_k < x + y\}) - c_0((x+y)^\tau - x^\tau)| \le c_2 (x+y)^{\tau-1}.$$

Démonstration. Pour le premier point il suffit d'appliquer le Lemme 1 avec $x = \ln \omega_n$. Pour le second on applique ce même lemme avec $x + y$ et x successivement et on procède par soustraction. □

LEMME 2. *Pour tout couple $(a, b) \in D^2$, il existe une constante $C(a, b)$ telle que pour tout couple d'entiers (p, q) avec $0 \le p < q$:*

$$|\mathrm{card}(\{(k, l) \mid p \le k, l < q, a\omega_k - b\omega_l = 0\}) - (q - p)| \le C(a, b) q^{(\tau-1)/\tau}.$$

Démonstration. Soit $T = \{(x_1, \ldots, x_\tau) \in \mathbb{R}_+^\tau \mid \ln \omega_p \le \sum_{i=1}^\tau x_i \ln q_i < \ln \omega_q\}$. Si on pose $a = q_1^{\alpha_1} \ldots q_\tau^{\alpha_\tau}$ et $b = q_1^{\beta_1} \ldots q_\tau^{\beta_\tau}$, on voit que l'ensemble $\{a\omega_k \mid p \le k < q\}$ est en bijection avec l'ensemble des points à coordonnées entières de $T' = T + (\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau)$, translaté de T par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau)$; de même, $\{b\omega_k \mid p \le k < q\}$ est en bijection avec $T'' \cap \mathbb{N}^\tau$ où $T'' = T + (\beta_1, \ldots, \beta_\tau)$. Par conséquent :

$$\mathrm{card}(\{(k, l) \mid p \le k, l < q, a\omega_k - b\omega_l = 0\}) = \mathrm{card}(T' \cap T'' \cap \mathbb{N}^\tau).$$

$T' \cap T''$ est le trapèze limité par les plans $x_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$, $\sum_{i=1}^\tau x_i \ln q_i = \ln \omega_p + \max(\ln a, \ln b)$ et $\sum_{i=1}^\tau x_i \ln q_i = \ln \omega_q + \min(\ln a, \ln b)$. Une évaluation, conduite comme au Lemme 1, du nombre de points à coordonnées entières de cet ensemble donne alors :

$$|\mathrm{card}(T' \cap T'' \cap \mathbb{N}^\tau) - c_0(\ln^\tau \omega_q - \ln^\tau \omega_p)| \le c(a, b) \ln^{\tau-1} \omega_q$$

où $c(a, b)$ ne dépend que de a et b. Compte tenu du point 2 du Corollaire précédent, on conclut facilement. □

Rappelons maintenant un résultat, à savoir le théorème de van der Poorten–Schlickewei–Evertse (cf. [**EGST**, pp. 116–117], [**E**] ou [**PS**] par exemple) :

Le nombre de n-uplets $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in (D \cup (-D))^n$ tels que
(1) $\sum_{j=1}^n \omega_j = 0$,
(2) *pour toute partie stricte, J, de $\{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j \in J} \omega_j \ne 0$,*
(3) *et $\bigwedge_{j=1}^n \omega_j = 1$,*
est fini.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Nous en déduisons :

LEMME 3. *Il existe une constante C ne dépendant que de D telle que, pour toute partie finie $E \subset D$:*

$$\sigma(E) := \operatorname{card}\left(\left\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \;\middle|\; \begin{array}{l}\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4 \in E \cup (-E),\\ \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4 = 0,\ \omega_j + \omega_{j'} \neq 0\ (j \neq j')\end{array}\right\}\right) \leq C \operatorname{card}(E).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions $(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$ de l'équation $\sum_{i=1}^4 \omega_i = 0$ pour lesquelles aucune sous-somme stricte n'est nulle ; notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble décrit dans le théorème rappelé ci-dessus. Soit $\Phi : (E \cup (-E)) \times \mathcal{S}_0 \to \mathbb{Q}^4$ définie par

$$\Phi(\omega,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = \left(\omega, \frac{\omega_2}{\omega_1}\omega, \frac{\omega_3}{\omega_1}\omega, \frac{\omega_4}{\omega_1}\omega\right).$$

Il est clair que $\Phi((E \cup (-E)) \times \mathcal{S}_0) \supset \mathcal{S}$; par suite $\operatorname{card}(\mathcal{S}) \leq \operatorname{card}((E \cup (-E)) \times \mathcal{S}_0)$ et la conclusion en découle facilement. □

3. *La normalisation*

Nous poserons $\Delta := \{(a,b) \in D^2 \mid a \wedge b = 1\}$.

LEMME 4. *Si la condition* (1.1) *est satisfaite,*

$$\sum_{(a,b)\in\Delta} \left| \int_0^1 f(at) f(bt)\, dt \right| < +\infty.$$

Démonstration. On a clairement $\int_0^1 f(at) f(bt)\, dt = \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} \hat{f}(ap)\overline{\hat{f}(bp)}$, ce qui peut encore s'écrire :

$$\int_0^1 f(at) f(bt)\, dt = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{c\in D} \hat{f}(rca)\overline{\hat{f}(rcb)}.$$

L'application $(r,c,a,b) \mapsto (r,ac,bc)$ est clairement une bijection de $\mathbb{Z}_0 \times D \times \Delta$ sur $\mathbb{Z}_0 \times D^2$. La condition (1.1) impliquant l'absolue convergence des séries écrites, il vient :

$$\sum_{(a,b)\in\Delta} \left| \int_0^1 f(at) f(bt)\, dt \right| \leq \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left(\sum_{(p,q)\in D^2} |\hat{f}(pr)|\, |\hat{f}(qr)| \right) := S(f). \qquad \square$$

LEMME 5. *Pour toute partie finie de $\mathbb{N}$, P :*

$$\int_0^1 \left(\sum_{i\in P} f(\omega_i t) \right)^2 dt \leq S(f) \operatorname{card}(P).$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Soit $A = \int_0^1 \left(\sum_{i\in P} f(\omega_i t)\right)^2 dt$. On a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(i,j)\in P^2} \int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t)\, dt \\ &= \operatorname{card}(P)\|f\|_2^2 + \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in P^2 \\ i\neq j}} \int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t)\, dt}_{=B}. \end{aligned}$$

Pour $(i, j) \in P^2$:

$$\int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t)\, dt = \sum_{\substack{(r,s)\in \mathbb{Z}^{*2} \\ r\omega_i - s\omega_j = 0}} \hat{f}(r)\overline{\hat{f}(s)}.$$

Si $(r, s) \in \mathbb{Z}^{*2}$ et $r\omega_i - s\omega_j = 0$, on peut écrire, de manière unique, $r = pa$, $s = pb$ avec $p \in \mathbb{Z}_0$ et $(a, b) \in D^2$. On a donc :

$$\int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t)\, dt = \sum_{p\in\mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(a,b)\in D^2 \\ a\omega_i = b\omega_j}} \hat{f}(pa)\overline{\hat{f}(pb)},$$

ce qui nous donne :

$$|B| \le \sum_{p\in\mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(a,b)\in D^2 \\ a\neq b}} \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in P^2 \\ a\omega_i = b\omega_j}} |\hat{f}(pa)||\hat{f}(pb)|}_{=S(p,a,b)}.$$

Mais

$$\begin{aligned} S(p,a,b) &= |\hat{f}(pa)||\hat{f}(pb)| \operatorname{card}(\{(i,j)\in P^2 \mid a\omega_i - b\omega_j = 0\}) \\ &\le |\hat{f}(pa)||\hat{f}(pb)| \operatorname{card}(P). \end{aligned}$$

En observant enfin que $\|f\|_2^2 = \sum_{p\in\mathbb{Z}_0}\sum_{a\in D} |\hat{f}(pa)|^2$, on conclut facilement. □

Démonstration du Théorème 1. Posons $T(f) = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left|\sum_{a\in D} \hat{f}(ra)\right|^2$. La démonstration se fait en deux temps.

(1) On suppose d'abord que f est un polynôme trigonométrique : $f(t) = \sum_{0<|p|\le K} \hat{f}(p) e^{2i\pi pt}$. Alors, en reprenant la démarche du Lemme 5 :

$$\begin{aligned} \|S_n f\|_2^2 &= \sum_{0\le i,j\le n} \int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t)\, dt \\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{(a,b)\in D^2} \hat{f}(ra)\overline{\hat{f}(rb)}\, C_n(r,a,b) \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

où $C_n(r,a,b) = \text{card}(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le i,j \le n-1, a\omega_i - b\omega_j = 0\})$. En vertu du Lemme 2, $\lim_{n\to\infty}(1/n)C_n(r,a,b) = 1$, et, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (r,a,b) pour lesquels $\hat{f}(ra)\overline{\hat{f}(rb)} \neq 0$, il vient clairement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|S_n f\|_2^2 = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{(a,b)\in D^2} \hat{f}(ra)\overline{\hat{f}(rb)} = T(f).$$

(2) Passons maintenant au cas général. On suppose donc que f vérifie la condition (1.1) ; par suite, il est clair que $T(f) < +\infty$. Considérons $f_k(t) = \sum_{|p|\le k} \hat{f}(p)e^{2i\pi pt}$. Alors, grâce au Lemme 5 :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|\|S_n f\|_2 - \|S_n f_k\|_2| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n(f-f_k)\|_2 \le (S(f-f_k))^{1/2}.$$

Par application du théorème de la convergence dominée pour les séries, on a bien clairement $\lim_{k\to\infty} S(f-f_k) = 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc choisir k pour que $(S(f-f_k))^{1/2} < \varepsilon$. On a alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n f_k\|_2 - \varepsilon \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n f\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n f_k\|_2 + \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$(T(f_k))^{1/2} - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n f\|_2 \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n f\|_2 \le (T(f_k))^{1/2} + \varepsilon.$$

Toujours en appliquant le théorème de la convergence dominée, on voit que $\lim_{k\to\infty} T(f_k) = T(f)$, et la conclusion s'ensuit alors aisément. □

Désormais, nous noterons $T(f) = \sigma^2$, $(\sigma \ge 0)$.

Remarque. Compte tenu du Lemme 4, il n'est pas difficile de prouver que :

$$\sigma^2 = \sum_{\substack{(a,b)\in D^2 \\ a\wedge b = 1}} \int_0^1 f(at)f(bt)\,dt.$$

Démonstration du Théorème 2. Soit $F(x) = \sum_{a\in D} e^{-2i\pi ax}/a$. Il est parfaitement évident que, compte tenu des résultats du Théorème 1, $\sigma_{u,v}^2 = 0$ équivaut à $F(ru) = F(rv)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}_0$.

(1) Lorsque $u = 0$, ceci conduirait à

$$\sum_{a\in D} \frac{1-\cos 2\pi arv}{a} = 0$$

pour tout $r \in \mathbb{Z}_0$, qui est clairement impossible lorsque $0 < v < 1$.

(2a) Supposons maintenant que 1, u et v soient algébriquement indépendants (i.e. indépendants sur $\mathbb{Q}$). Soit $q = q_1 q_2 \dots q_\tau$. Alors 1, qu et qv sont encore algébriquement indépendants. Si on pose $r_n = nq + 1$, le théorème d'équidistribution de Weyl prouve que la suite $\{r_n(u,v)\}_{n\ge 0}$ est dense dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. L'égalité $F(r_n u) = F(r_n v)$ pour tout n implique donc que $F(x) = F(y)$ pour tout couple $(x,y) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$; F serait donc constante, ce qui est évidemment absurde.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

(2b) Passons maintenant au cas où 1, u et v sont dépendants sur $\mathbb{Q}$ et plaçons-nous dans le cas où u est irrationnel (rappelons qu'on suppose que l'un au moins des nombres u et v l'est). On peut alors écrire

$$v = \frac{l_1}{m_1}u + \frac{l_2}{m_2}$$

où $l_1 \geq 0$, $m_1, m_2 > 0$, et les rationnels l_2/m_2, et l_1/m_1 lorsque $l_1 > 0$, sont irréductibles. Posons $r_n = nqm_1m_2 + 1$. Alors

$$\begin{aligned} r_n(u, v) &= nqm_2(m_1u, l_1u) + (0, nqm_1l_2) + (u, v) \\ &\equiv nqm_2(m_1u, l_1u) + (u, v) \qquad \mod \mathbb{Z}^2 \\ &:= (\zeta_n, \eta_n). \end{aligned}$$

Si on suppose $\sigma^2_{u,v} = 0$, on voit que $F(\zeta_n) = F(\eta_n)$ pour tout n. Le couple (ζ_n, η_n) appartient à la droite L d'équation $l_1(x - u) = m_2(y - v)$. Comme l_1 et m_2 sont des entiers, $L/\mathbb{Z}^2$ est une courbe de longueur finie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Si $l_1 > 0$, les suites $\{\zeta_n\}$ et $\{\eta_n\}$ sont denses dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et, par conséquent, la suite $\{(\zeta_n, \eta_n)\}$ est dense dans $L/\mathbb{Z}^2$. On en déduit que $F(x) = F(y)$ pour tout $(x, y) \in L/\mathbb{Z}^2$. Nous allons maintenant examiner plusieurs cas.

- Si $l_1 = 0$, alors $r_n(u, v) = (r_nu, v) \mod \mathbb{Z}^2$. On en déduit que $F(x) = F(v)$ pour tout réel x : F serait constante, ce qui est absurde.
- $0 < l_1 < m_1$. Si $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite récurrente $x_0 = x$ et $x_n = (l_1/m_1)(x_{n-1} - u) + v$ pour $n \geq 1$. Il est clair que $(x_{n-1}, x_n) \in L$ pour tout n. La fonction F serait donc constante le long de la suite $\{x_n\}$: $F(x_n) = F(x)$. Mais il est évident que cette suite converge vers $\alpha = (l_1u - m_1v)/(l_1 - m_1)$, limite qui est indépendante de x. On voit, cette fois encore, que F serait constante.
- $m_1 < l_1$. A partir de x, on définit la suite récurrente $\{x_n\}$ par $x_n = (m_1/l_1)(x_{n-1} - v) + u$ (cette opération consiste en fait à 'remonter' la suite précédente). Dans ce cas, chaque $(x_n, x_{n-1}) \in L$. On conclut comme ci-dessus en constatant que cette suite converge vers α.
- Enfin, dans le cas $l_1 = m_1$, on voit que, pour tout x, $F(x) = F(x + l_2/m_2)$. Comme $l_2 \wedge m_2 = 1$ et comme F est 1-périodique, on voit que $F(x) = F(x+1/m_2)$ pour tout x : F admettrait $1/m_2$ pour période. De l'expression qui définit F, et qui est aussi son développement en série de Fourier, on pourrait en conclure que m_2 divise tout $a \in D$, et en particulier tous les q_i. Par hypothèse, ces entiers sont premiers entre eux : on en déduit que $m_2 = 1$. Cette conclusion est absurde puisqu'elle impliquerait $u \equiv v \mod 1$. □

Démonstration du Théorème 3. On commence par un lemme. Nous noterons :

$$D_i(f) = \sum_{k \geq 1} k^{i-1} \|s_{2^{k+1}} f - s_{2^k} f\|_2 \ (i \geq 1) \quad \text{et} \quad \delta(k) = \|s_{2^{k+1}} f - s_{2^k} f\|_2 \ (k \geq 1). \ \square$$

LEMME 6. *Il existe une constante absolue C telle que :*

$$S(f) \leq C D_2(f) D_\tau(f).$$

En particulier (1.2) $\Longrightarrow$ (1.1).

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Il est d'abord clair, par définition de $S(f)$, que

$$S(f) = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0}\Big(\sum_{(a,b)\in D^2} |\hat f(ra)||\hat f(rb)|\Big).$$

Si on définit $\Phi : \mathbb{Z}_0 \times D^2 \to \mathbb{Z}^* \times \Delta$ par $\Phi(r,a,b) = (rd, a', b')$ lorsque $d = a \wedge b$, $a = a'd$ et $b = b'd$, il est facile de voir que Φ est bijective. Il en découle que :

$$S(f) = \sum_{(a,b)\in\Delta}\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} |\hat f(pa)||\hat f(pb)|.$$

Adoptons maintenant les notations suivantes : si $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_\tau) \in \mathbb{N}^\tau$ et $\mathbf{n}' = (n_1',\dots,n_\tau') \in \mathbb{N}^\tau$, on pose $\mathbf{q}^{\mathbf{n}} = q_1^{n_1}\dots q_\tau^{n_\tau}$ et $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}' = (n_1n_1',\dots,n_\tau n_\tau')$. On a alors :

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{\substack{\mathbf{n},\mathbf{n}'\in\mathbb{N}^\tau\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\mathbf{0}}}\Big(\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} |\hat f(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}})||\hat f(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}'})|\Big)\\ &\le 2\sum_{\substack{\mathbf{n},\mathbf{n}'\in\mathbb{N}^\tau\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\mathbf{0}}}\Big(\sum_{k\ge0}\sum_{2^k\le p\le 2^{k+1}} |\hat f(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}})||\hat f(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}'})|\Big)\\ &\le 2\sum_{\substack{\mathbf{n},\mathbf{n}'\in\mathbb{N}^\tau\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\mathbf{0}}}\sum_{k\ge0}\Big(\sum_{2^k\le p\le 2^{k+1}} |\hat f(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}})|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{2^k\le p\le 2^{k+1}} |\hat f(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}'})|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\tau$, notons $\varphi(\mathbf{n})$ l'entier vérifiant $2^{\varphi(\mathbf{n})} \le \mathbf{q}^{\mathbf{n}} < 2^{\varphi(\mathbf{n})+1}$. On voit que :

$$\begin{aligned} S(f) \le 2\sum_{\substack{\mathbf{n},\mathbf{n}'\in\mathbb{N}^\tau\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\mathbf{0}}}\sum_{k\ge0}&(\delta(k+\varphi(\mathbf{n})) + \delta(k+\varphi(\mathbf{n})+1))(\delta(k+\varphi(\mathbf{n}'))\\ &+ \delta(k+\varphi(\mathbf{n}')+1)). \end{aligned}$$

Evaluons alors

$$T = \sum_{\substack{\mathbf{n},\mathbf{n}'\in\mathbb{N}^\tau\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\mathbf{0}}}\sum_{k\ge0}\delta(k+\varphi(\mathbf{n}))\delta(k+\varphi(\mathbf{n}')).$$

Si $\varphi(\mathbf{n}) = i$ et $\varphi(\mathbf{n}') = j$, $2^{i+j} \le \mathbf{q}^{\mathbf{n}+\mathbf{n}'} < 2^{i+j+2}$; en vertu du Corollaire du Lemme 1, le nombre de $\mathbf{m}$ satisfaisant les inégalités $2^{i+j} \le \mathbf{q}^{\mathbf{m}} < 2^{i+j+2}$ est majoré par $C(i+j)^{\tau-1}$: le nombre de couples $(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ satisfaisant les inégalités précédentes et $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}' = \mathbf{0}$ est donc du même ordre. On a par conséquent :

$$T \le C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(i+j)^{\tau-1}\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k+i)\delta(k+j).$$

Comme $i+j \le 2(k+i)$ si $j\le i$, on a :

$$T \le C2^{\tau-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k+j)\sum_{i=0}^{\infty}\delta(k+i)(k+i)^{\tau-1}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Or $\sum_{i=0}^{\infty} \delta(k+i)(k+i)^{\tau-1} \le D_\tau(f)$, donc

$$T \le C2^{\tau-1} D_\tau(f) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k+j) \le C2^{\tau-1} D_\tau(f) \sum_{j=0}^{\infty} j\delta(j).$$

En raisonnant de la même façon avec les trois autres termes on a bien :

$$S(f) \le C D_2(f)\, D_\tau(f).$$

Enfin, comme $D_2(f) \le D_\tau(f)$, il est clair que (1.2) $\Longrightarrow$ (1.1). □

Passons maintenant à la démonstration du Théorème 3. On se donne f satisfaisant (1.2). En vertu du Lemme 6, f satisfait (1.1). Commençons par montrer que la condition est suffisante. On suppose $f = \sum_{1\le i\le\tau} g_i$ où $g_i(t) = f_i(t) - f_i(q_i t)$, $f_i \in L^2$ et g_i vérifiant (1.1). Pour $r \in \mathbb{Z}_0$, on a :

$$\sum_{a\in D} \hat{f}(ra) = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\tau} \widehat{g_i}(r\mathbf{q}^{\mathbf{n}})$$

avec absolue convergence en vertu de (1.1). Pour chaque i, on a :

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\tau} \widehat{g_i}(r\mathbf{q}^{\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{n}_i} \sum_{n_i=0}^{\infty} \widehat{g_i}(r\mathbf{q}^{\mathbf{n}_i} q_i^{n_i}) = 0$$

où $\mathbf{n}_i = (n_1, \dots, n_{i-1}, 0, n_{i+1}, \dots, n_\tau)$. On a donc $\sum_{a\in D} \hat{f}(ra) = 0$, et, par suite $\sigma = 0$.

Inversement, si on suppose $\sigma = 0$, on a, pour tout $r \in \mathbb{Z}_0$, $\sum_{a\in D} \hat{f}(ra) = 0$. Pour $0 \le i \le \tau$, considérons $D_i = \{a \in D \mid a \wedge (q_1 \dots q_i) = 1\}$ ($D_0 = D$ et $D_\tau = \{1\}$). On définit alors, $\widehat{h_0} = \widehat{f}$ et, pour $1 \le i \le \tau$ et $r \in \mathbb{Z}_0$,

$$\widehat{h_i}(ar) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \hat{f}(q_1^{n_1} \dots q_i^{n_i} ar), & \text{si } a \in D_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\widehat{h_\tau} = 0$. Nous allons prouver que chaque $\widehat{h_i} \in \ell^2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ soit $M_i(N) = (\sum_{n\ge N} |\widehat{h_i}(n)|^2)^{1/2}$. Alors :

$$\begin{aligned} M_i(N) &= \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{a\in D, ar\ge N} |\widehat{h_i}(ar)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{a\in D_i, ar\ge N} \left| \sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \hat{f}(q_1^{n_1} \dots q_i^{n_i} ar) \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned} M_i(N) &\le \sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{a\in D_i, ar\ge N} |\hat{f}(q_1^{n_1} \dots q_i^{n_i} ar)|^2 \right)^{1/2} \\ &\le \sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \| f - s_{2^{n_1+\dots+n_i} N} f \|_2. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Donc, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$M_i(2^k) \leq C_i \sum_{k\geq 0} k^{i-1} \|f - s_{2^k} f\|_2$$

qui montre que chaque $\widehat{h_i}$ $(1 \leq i \leq \tau) \in \ell^2$. Si on note h_i la fonction de L^2 correspondante, on a de plus :

$$\sum_{k\geq 0} \|h_i - s_{2^k} h_i\|_2 \leq C_i' \sum_{k\geq 0} k^i \|f - s_{2^k} f\|_2 < +\infty.$$

Posant alors $g_i = h_{i-1} - h_i$ $(1 \leq i \leq \tau)$, il est clair que $f = \sum_{1\leq i\leq \tau} g_i$. Comme pour h_i, on observe que

$$\sum_{k\geq 0} \|g_i - s_{2^k} g_i\|_2 < +\infty.$$

En outre, par construction, on voit que, pour $p \wedge q_i = 1$, $\sum_{n\geq 0} \widehat{g_i}(pq_i^n) = 0$; alors, en vertu d'un résultat prouvé dans [**F**], il existe $f_i \in L^2$ telle que, pour presque tout t, $g_i(t) = f_i(t) - f_i(q_i t)$. Enfin, on peut observer que chaque h_i (et donc chaque g_i) vérifie aussi la condition (1.1) :

$$\begin{aligned}\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D} |\widehat{h_i}(ra)| \Big)^2 &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D_i} |\widehat{h_i}(ra)| \Big)^2 \\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D_i} \Big| \sum_{(n_1,\ldots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \hat{f}(q_1^{n_1} \ldots q_i^{n_i} ar) \Big| \Big)^2 \\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D} |\hat{f}(ra)| \Big)^2\end{aligned}$$

qui prouve notre affirmation puisque (1.2) implique (1.1). □

4. *Le théorème limite central*

Nous allons d'abord réduire le problème aux polynômes trigonométriques. Nous montrerons ensuite comment le théorème limite central peut se déduire d'un résultat de Murai [**M**].

4.1. *Réduction aux polynômes trigonométriques.*

LEMME 7. *Si le Théorème 3 est vrai pour tout polynôme trigonométrique, il est vrai pour toute fonction f satisfaisant $\sigma > 0$ et la condition* (1.1).

Démonstration. On se donne f satisfaisant (1.1) et $\sigma = 1$ (on peut toujours s'y ramener) et on considère $P_N(t) = \sum_{|k|\leq N} \hat{f}(k) e^{2i\pi kt}$. Le théorème de la convergence dominée prouve que $\sigma(P_N) \to 1$ lorsque $N \to \infty$. Soit $\sigma_N = \sigma(P_N)$ et $Q_N = \sigma_N^{-1} P_N$. On a alors :

$$\begin{aligned}&\Big| \int_U \Big(\exp\Big(ix \frac{1}{\sqrt{n}} S_n f(t) \Big) - \exp\Big(ix \frac{1}{\sqrt{n}} S_n Q_N(t) \Big) \Big)\, dt \Big| \\ &\qquad \leq |x| \frac{\sqrt{m(U)}}{\sqrt{n}} \|S_n(f - Q_N)\|_2.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Mais, en vertu du Lemme 5,

$$\|S_n(f-Q_N)\|_2^2 \le n\, S(f-Q_N) = n \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left(\sum_{a\in D} |(\hat{f} - \widehat{Q_N})(ra)| \right)^2.$$

Par définition de Q_N,

$$\hat{f}(p) - \widehat{Q_N}(p) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_N}\right) \hat{f}(p)$$

si $|p| \le N$, et $\hat{f}(p)$ si $|p| > N$. Dès que N est assez grand, on voit que $|\hat{f}(p) - \widehat{Q_N}(p)| \le 2|\hat{f}(p)|$ pour tout p, et le théorème de la convergence dominée prouve donc que $\lim_{N\to\infty} S(f-Q_N) = 0$. On peut donc, pour tout $\varepsilon > 0$, choisir N de telle façon que, pour tout n :

$$\left| \int_U \exp\left(ix \frac{1}{\sqrt{n}} S_n f(t) \right) dt - \int_U \exp\left(ix \frac{1}{\sqrt{n}} S_n Q_N(t) \right) dt \right| < \varepsilon.$$

La conclusion s'ensuit alors de manière élémentaire. □

4.2. *Une version du théorème de Murai.* Commençons par quelques notations. Si $E \subset \mathbb{N}$, on notera $E(n) = E \cap [1,n]$, $E^n = E(q^n)$ (où q est donné > 1), et $\partial E^n = E^n \setminus E^{n-1}$. Soit $\mathcal{R}_\alpha$ la famille des sous-ensembles $E \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_n \frac{\mathrm{card}(\partial E^n)}{(\mathrm{card}(E^n))^\alpha} < +\infty.$$

On pose $\mathcal{R} = \cup_{0\le\alpha<1} \mathcal{R}_\alpha$ et, pour toute partie finie de $\mathbb{N}$, E :

$$\sigma(E) = \mathrm{card}\left(\left\{ (n_1,n_2,n_3,n_4) \in (E \cup (-E))^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} n_1+n_2+n_3+n_4 = 0, \\ n_j + n_{j'} \neq 0 : (j \neq j') \end{array} \right\} \right).$$

Le théorème de Murai s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 5. (Murai [**M**]) *Si $E \in \mathcal{R}$ vérifie $\sigma(E(n)) = o(|E(n)|^2)$ quand $n \to +\infty$ et si la suite de réels $\{a_m\}_{m\in E}$ vérifie $0 < b < |a_m| < B$ pour $m \in E$, pour tout borélien $U \subset [0,1[$, tout $\gamma \in [0, 2\pi[$ et tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_n m\left(\left\{ t \in U \;\middle|\; \frac{1}{A_n} \Sigma_n(t) \le x \right\} \right) = \frac{m(U)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du,$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$ et

$$A_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{m\in E(n)} a_m^2 \quad \text{et} \quad \Sigma_n(t) = \sum_{m\in E(n)} a_m \cos(2\pi m t + \gamma).$$

Murai a démontré ce théorème pour $a_m \equiv 1$ et U intervalle ouvert. Mais il est clair que des arguments élémentaires et le fait que $A_n^2 \asymp \mathrm{card}(E(n))$ permettent d'énoncer la version ci-dessus. C'est donc de cette version du résultat de Murai que nous allons maintenant déduire la preuve de notre théorème limite central.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

4.3. *Démonstration du Théorème 4.* Nous savons déjà que

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}} \left\| \sum_{m\in D(n)} f(m\,\cdot) \right\|_2^2 = \sigma^2 \tag{4.1}$$

et nous voulons prouver la convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}} \sum_{m\in D(n)} f(m\,\cdot) \longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2). \tag{4.2}$$

Si $\sigma = 0$, (4.1) impliquant la convergence vers 0 dans L^2, on a, *a fortiori*, (4.2) ($\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$). Nous supposons donc, dans toute la suite, que $\sigma > 0$. Ecrivons la somme formelle $\sum_{m\in D} f(m\cdot)$ en série trigonométrique : si $f(t) = \sum_{|p|\le K} \hat{f}(p)\, e^{2ik\pi t}$,

$$\sum_{m\in D} f(m\cdot) = \sum_{m\in F} a_m \cos 2\pi m(t+\gamma_m)$$

avec $a_m \neq 0$ et $F \subset \{p\omega_k \mid 0 < p \le K, \omega_k \in D\}$. Ceci est possible puisque, pour tout m, il n'y a qu'un nombre fini de termes de fréquence m ; en outre, puisque f est un polynôme trigonométrique, les a_m ne prennent qu'un nombre fini de valeurs : il existe donc b et B tels que, pour tout m, $0 < b < |a_m| < B < +\infty$. Posons alors

$$\Sigma_n(t) = \sum_{m\in F(n)} a_m \cos 2\pi m(t+\gamma_m) \quad \text{et} \quad A_n = \|\Sigma_n\|_2.$$

Nous allons prouver que

$$\left\| \Sigma_n - \sum_{m\in D(n)} f(m\cdot) \right\|_2 = o(\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}\,). \tag{4.3}$$

Soit $\sum_p |\hat{f}(p)| = M$. On a

$$\begin{aligned} \left\| \Sigma_n - \sum_{m\in F(n)} f(m\cdot) \right\|_2^2 &\le M^2 \operatorname{card}(\{mj \mid m \in D(n), 1 \le j \le K, mj \ge n\}) \\ &\le M^2 \operatorname{card}(\{k \mid n/K \le \ln \omega_k < n\}). \end{aligned}$$

En vertu du Corollaire du Lemme 1, on a alors $\left\| \Sigma_n - \sum_{m\in F(n)} f(m\cdot) \right\|_2^2 \le C(\ln n)^{\tau-1}$. Mais le Lemme 1 prouvant que $\operatorname{card}(D(n)) \sim c_0(\ln n)^\tau$, on a (4.3).

(4.1) et (4.3) impliquent alors

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}} \|\Sigma_n\|_2 = \sigma > 0,$$

et par suite

$$A_n = \|\Sigma_n\|_2 \sim \sigma\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}. \tag{4.4}$$

Du fait de l'encadrement des a_m, on voit que

$$b\sqrt{\operatorname{card}(F(n))} \le A_n\sqrt{2} \le B\sqrt{\operatorname{card}(F(n))}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press

Autrement dit : $\mathrm{card}(F(n)) \asymp \mathrm{card}(D(n))$ quand $n \to +\infty$. Du fait que $D \in \mathcal{R}_{1-1/\tau}$, ou encore $\mathrm{card}(\partial(jD^n)) = O((\mathrm{card}(D^n))^{1-1/\tau})$ pour tout j, si $F' = \bigcup_{1\le j\le K}(jD)$, on voit que $F \subset F'$ et donc que $\mathrm{card}(\partial(F^n)) = O((\mathrm{card}(F^n))^{1-1/\tau})$, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{R}$. Enfin, en vertu du Lemme 3, $\mathrm{card}(\sigma(F(n))) = O(\mathrm{card}(F(n)) = o((\mathrm{card}(F(n)))^2)$. Toutes les hypothèses du théorème de Murai sont donc satisfaites : (4.4) implique donc (4.2), ce qui achève notre preuve. □

REFERENCES

[Ba] N. K. Bari. *Treatise of Trigonometric Series*, Vol. II. Pergamon, Oxford, 1964.

[Be1] I. Berkes. On the asymptotic behaviour of $\sum f(n_k x)$. Main theorems. *Z. Wahr. verw. Gebiete*. **34** (1976), 319–346.

[Be2] I. Berkes. On the asymptotic behaviour of $\sum f(n_k x)$. Applications. *Z. Wahr. verw. Gebiete*. **34** (1976), 347–365.

[E] J.-H. Evertse. On sums of S-units and linear recurrences. *Compositio Math.* **53** (1984), 225–244.

[EGST] J. H. Evertse, K. Győry, C. L. Stewart and R. Tijdeman. S-unit equations and their applications. *New Advances in Transcendance Theory.* Ed. A. Baker. Cambridge University Press, London and New York, 1980, pp. 110–174.

[F] K. Fukuyama. The central limit theorem for Riesz–Raikov sums. *Probab. Theory Related Fields*. **100** (1994), 57–75.

[K1] M. Kac. On the distribution of values of sums of the form $\sum f(2^k t)$. *Ann. Math.* **47** (1946), 33–49.

[K2] M. Kac. Probability methods in some problems of analysis and number theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 641–665.

[M] T. Murai. The central limit theorem for trigonometric series. *Nagoya Math. J.* **87** (1982), 79–94.

[Pe1] B. Petit. Le théorème limite central pour des sommes de Riesz–Raikov. *Prob. Theory Related Fields* **93** (1992), 185–203.

[Pe2] B. Petit. θ-transformations, θ-shifts and limit theorems for some Riesz–Raikov sums. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **16** (1996), 335–364.

[Ph] W. Philipp. Empirical distribution functions and strong approximation theorems for dependent variables. A problem of Baker in probabilistic number theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **345** (1994), 705–727.

[PS] A. J. van der Poorten et H. P. Schlickewei. The growth conditions for recurrence sequences. *Macquarie Math. Reports*. 82-0041, 1982.

[Z] A. Zygmund. *Trigonometric Series I*. Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

https://doi.org/10.1017/S0143385701001237 Published online by Cambridge University Press