Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2002), **22**, 323–327
DOI: 10.1017/S0143385702000160
© *2002 Cambridge University Press*
Printed in the United Kingdom

La propriété de Bernoulli pour les endomorphismes de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$

JEAN-YVES BRIEND

Université de Provence, Laboratoire analyse, topologie et probabilités, CNRS UMR 6632, CMI, 39, rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France
(e-mail: briend@cmi.univ-mrs.fr)

(*Received* 10 *January* 2001 *and accepted in revised form* 27 *March* 2001)

Résumé. Soient f un endomorphisme holomorphe de degré plus grand que 2, et μ sa mesure d'équilibre. Alors (f, μ) possède la propriété de Bernoulli.

Abstract. Let f be a holomorphic self map of $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$, of degree greater than two and let μ be its equilibrium measure. Then (f, μ) is Bernoulli.

0. *Introduction*

Pour montrer qu'un automorphisme d'un espace de Lebesgue possède la propriété de Bernoulli, i.e. est bimesurablement conjugué à un décalage bilatéral, on dispose, depuis 1974 et les travaux de Ornstein et Weiss (voir [**9, 10**]), d'un outil puissant : la propriéte dite 'très faiblement Bernoulli' (ou VWB pour very weak Bernoulli) et le théorème assurant qu'elle implique la propriété de Bernoulli proprement dite. En ce qui concerne les endomorphismes, il a fallu attendre 1998, quand Hoffman et Rudolph (voir [**5**]) ont introduit la notion de système 'très faiblement Bernoulli arborescente' (ou TVWB pour tree-VWB) et montré qu'elle impliquait la propriété de Bernoulli. Ce résultat a été utilisé par Heicklen et Hoffman pour prouver que les fractions rationnelles sont de Bernoulli relativement à leur mesure d'entropie maximale (voir [**4**]). Cela généralise le travail de Mañé qui l'a démontré pour un itéré assez grand de l'application (voir [**8**]). Dans le présent article, nous montrons que la méthode de [**4**] s'applique en toute dimension.

Soit donc f un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$. Hubbard et Papadopol (voir [**6**], ainsi que [**3**]) ont construit une mesure invariante naturelle μ, d'entropie maximale $k \operatorname{Log} d$: la *mesure d'équilibre*, obtenue comme masse de Monge-Ampère d'une fonction de Green dynamique. Cette mesure est mélangeante et de jacobien constant d^k, c'est-à-dire que pour tout presque tout $y \in \mathsf{P}^k(\mathbb{C})$ et tout $x \in f^{-1}(y)$, on a $\mu(x|f(x) = y) = d^{-k}$. Il est alors naturel de conjecturer que (f, μ) est de

https://doi.org/10.1017/S0143385702000160 Published online by Cambridge University Press

Bernoulli, i.e. bimesurablement conjugué au décalage unilatéral sur d^k symboles : $\sum^+ = \{1, \ldots, d^k\}^{\mathbb{Z}}$, σ le décalage à gauche préservant la mesure μ_0 canonique, produit de la mesure de comptage sur $\{1, \ldots, d^k\}$. Dans [**1**], on montrait, en utilisant la propriété VWB, que l'extension naturelle de (f, μ) est de Bernoulli; nous montrons ici, en utilisant TVWB, le théorème plus fort suivant.

THÉORÈME 0.1. *Le système (f, μ) possède la propriété de Bernoulli, i.e. est bimesurablement conjugué au décalage unilatéral canonique sur d^k symboles.*

La preuve suit de près celle d'Heicklen et Hoffman pour les fractions rationnelles. Après avoir introduit la propriété TVWB, nous démontrons le théorème en utilisant le *lemme fondamental*, énoncé au deuxième paragraphe, dont nous donnons la preuve à la fin de l'article. Une variante de ce lemme est utilisée dans un travail en commun avec Duval (voir [**2**]) pour montrer que μ est *l'unique* mesure d'entropie maximale de f.

1. *La propriété TVWB*

Nous nous restreignons au cas des endomorphismes de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$. Pour le cas général, on peut consulter [**5**]. Dans [**2**], il est démontré qu'il existe un ensemble algébrique propre $\mathrm{E} \subset \mathsf{P}^k(\mathbb{C})$ et une unique mesure μ de jacobien d^k tels que $\mu(\mathrm{E}) = 0$ et, pour tout $z \notin \mathrm{E}$, μ reflète la distribution des préimages de z :

$$\mu_{n,z} = \frac{1}{d^{kn}} \sum_{f^n(y)=z} \delta - y \to \mu,$$

où les y sont comptés avec multiplicité. La mesure μ est d'entropie maximale et ne charge pas les ensembles algébriques. En particulier, si l'on désigne par C le lieu critique de f, par PC_l le lieu des valeurs critiques de f^l et PC_∞ l'union des PC_l, on a $\mu(\mathrm{C}) = \mu(\mathsf{PC}_1) = \cdots = \mu(\mathsf{PC}_\infty) = 0$. Ainsi, presque tout point z a un arbre de préimages itérées $\mathcal{T}_z$ qui est un arbre d^k-adique usuel de racine z, de sommets $f^{-n}(z) = \{z_1^n, \ldots, z_{d^{kn}}^n\}$ et des arêtes entre y et $f(y)$. On note $\mathcal{T}_z^n$ l'arbre restreint aux $n+1$ premiers niveaux $z, \ldots, f^{-n}(z)$. La propriété TVWB traduit la proximité combinatoire entre les arbres de deux points génériques z et w. Pour la définir, donnons-nous une partition mesurable finie ξ de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$ et notons $\xi(x)$ l'atome de ξ contenant x. Pour $n > 0$ et z, w génériques, on note

$$t_n^\xi(z, w) = \frac{1}{2^n} \min_{\mathrm{A}} \sum_{j=1}^{d^{kn}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(\{\xi(f^i(z_j^n)) \neq \xi(A(f^i(w_j^n)))\}),$$

où A varie dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_w^n)$ des automorphismes d'arbre de $\mathcal{T}_w^n$. Cette distance mesure donc le taux d'agrément moyen des arbres $\mathcal{T}_z$ et $\mathcal{T}_w$ modulo la partition ξ et après réarrangement des préimages respectant la structure d'arbre.

Définition 1.1. On dit que le couple (f, ξ) vérifie la propriété TVWB si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{N} > 0$ et un borélien G de mesure plus grande que $1 - \varepsilon$ tels que pour tout z, w éléments de G et tout $n \geq \mathrm{N}$, on ait $t_n^\xi(z, w) < \varepsilon$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000160 Published online by Cambridge University Press

Ainsi, après avoir réarrangé les préimages de z et w en respectant les structures d'arbre, les noms des orbites dans la partition ξ sont en moyenne souvent les mêmes. Pour démontrer que (f, μ) possède la propriété de Bernoulli, nous allons utiliser le théorème suivant, corollaire du théorème principal de [**5**].

THÉORÈME 1.1. *S'il existe des partitions ξ de diamètre arbitrairement petit telles que (f, ξ) soit TVWB, alors (f, ξ) est de Bernoulli.*

On appelle ici diamètre d'une partition le diamètre maximal de ses atomes.

2. (f, μ) *est de Bernoulli*

L'idée de la preuve est de montrer, en construisant des branches inverses d'itérées de f et en contrôlant leur diamètre, que beaucoup de préimages de points sont proches à partir d'un certain rang. Nous allons donc utiliser le lemme suivant (voir aussi [**2**]), dit *lemme fondamental*.

LEMME 2.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l \geq 0$ tel que, pour tout disque compact plat générique Δ ne rencontrant pas PC_l, il existe sur Δ au moins $(1-\varepsilon)d^{kn}$ branches inverses f_i^{-n} de f^n, formant un arbre. Si de plus on se fixe $0 < \alpha < 1$, il existe $\mathrm{C} > 0$ et $n_0 \geq 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait*

$$\mathrm{Diam}(f_i^{-n}(\Delta)) \leq \mathrm{C}d^{-\alpha n/2}.$$

Le fait que les branches inverses forment un arbre signifie simplement qu'elles sont construites par induction: $f_i^{-(n+m)}$ est la composée de deux branches f_p^{-m} et f_q^{-n}. Ainsi, si $z \in \Delta$ est un point générique, la famille des $f_i^{-n}(z)$ forme un sous-arbre de $\mathcal{T}_z$. Enfin un disque compact plat générique est un disque topologique compact inclus dans un droite projective L vérifiant $\mathrm{L} \not\subset \mathsf{PC}_\infty$.

Ce lemme permet de mettre en œuvre l'idée exposée plus haut. Soient en effet deux points z, w hors de PC_∞. Traçons, sur la droite reliant z et w, un disque Δ contenant dans son intérieur z et w, et évitant PC_l. On dispose sur Δ d'un arbre de branches inverses avec diamètre des images exponentiellement petit, et l'on peut donc réarranger une majeure partie de l'arbre $\mathcal{T}_w$ de manière à ce que pour $n \geq n_0$, on ait $d(z_i^n, w_i^n) \leq \mathrm{C}d^{-\alpha n/2}$, avec $1 \leq i \leq s_n$ et $s_n \geq (1-\varepsilon)d^{kn}$. En écrivant $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$ sous forme d'une union dénombrable de boréliens indexés par n_0, C, l, on tire du lemme fondamental le fait suivant.

Fait. Pour tout $\varepsilon, \delta > 0$, il existe un borélien G de mesure plus grande que $\sqrt{1-\varepsilon}$, et un entier N tels que pour tout $z, w \in \mathrm{G}$ et tout $n \geq \mathrm{N}$, quitte à réarranger l'arbre $\mathcal{T}_w$, on a

$$d(z_i^n, w_i^n) \leq \delta/3, \quad 1 \leq i \leq s_n \quad \text{et} \quad s_n \geq (1-\varepsilon/3)d^{kn}.$$

Fixons maintenant $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$ par des boules de diamètre inférieur à r, et notons ξ la partition engendrée par $\mathcal{U}$. Quitte à bouger un peu les boules de recouvrement, on peut supposer que $\mu(\partial\xi) = 0$, où $\partial\xi$ désigne l'union des bords des atomes de ξ. Prenons $\delta < \varepsilon/3$ assez petit pour que $\mu(\mathrm{V}_\delta(\partial\xi)) < \varepsilon/4$, où $\mathrm{V}_\delta(\mathrm{X})$ désigne le δ-voisinage de X. D'après [**2**], comme pour $z \in \mathrm{E}$ on a $\mu_{n,z} \to \mu$, il existe un borélien

https://doi.org/10.1017/S0143385702000160 Published online by Cambridge University Press

G′ de mesure plus grande que $\sqrt{1-\varepsilon}$ et un entier N′ tels que pour tout $z \in \mathrm{G}'$ et $n \geq \mathrm{N}'$ on ait

$$\mu_{n,z}(\mathrm{V}_\delta(\delta\xi)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prenons maintenant $z, w \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$ et $n \geq 3\max\{\mathrm{N}, \mathrm{N}'\}/\varepsilon$. Du fait que si $d(u, v) < \delta/3$ et $u, v \notin \mathrm{V}_\delta(\partial\xi)$ alors $\xi(u) = \xi(v)$, on obtient $t_n^\xi(z, w) < \varepsilon$. De plus, $\mu(\mathrm{G} \cap \mathrm{G}') \geq 1 - \varepsilon$. Comme r a été choisi arbitrairement petit, le théorème de Hoffman et Rudolph permet de conclure que (f, μ) est de Bernoulli.

3. *Preuve du lemme fondamental*

Soit τ le degré du lieu des valeurs critiques de f : $\tau = \deg(\mathsf{PC}_1)$. Fixons l assez grand pour que $2\tau d^{-l}(1 - d^{-1})^{-1} < \varepsilon$. Soient L la droite projective générique contenant Δ et Δ' un disque compact vérifiant $\Delta \subset\subset \Delta' \subset\subset \mathrm{L} - \mathsf{PC}_l$. Commençons par construire, par induction, suffisamment de branches inverses. Comme Δ' ne rencontre pas PC_l, on dispose sur ce disque de d^{kl} branches inverses de f^l, produisant d^{kl} disques disjoints $f_i^{-l}(\Delta')$ tracés sur $f^{-l}(\mathrm{L})$. Si un tel disque ne rencontre pas PC_1, il donne naissance, par composition avec f_i^{-l}, à d^k branches inverse de f^{l+1} sur Δ'. Or, par le théorème de Bezout, on a

$$\mathrm{Card}(\mathsf{PC}_1 \cap f^{-l}(\mathrm{L})) \leq \deg(\mathsf{PC}_1)\deg(f^{-l}(\mathrm{L})) = \tau d^{(k-1)l}.$$

On crée donc au moins $d^{k(l+1)}(1 - \tau d^{-l})$ branches inverses de f^{l+1} sur Δ', et on obtient inductivement

$$d^{kn}(1 - \tau d^{-l}(1 + d^{-1} + \cdots + d^{-(n-l)})) \geq d^{kn}(1 - \varepsilon/2)$$

branches inverses de f^n sur Δ', avec une structure d'arbre. Passons maintenant au contrôle des diamètres. Les disques $f_i^{-n}(\Delta')$ sont disjoints et tracés sur $f^{-n}(\mathrm{L})$ qui est une courbe d'aire $d^{(k-1)n}$ pour la forme de Fubini-Study normalisée de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$. Ainsi, au plus $d^{\alpha n}d^{(k-1)n}$ tels disques sont d'aire au moins $d^{-\alpha n}$. Si, comme on l'a fait ci-dessus, on élimine ces disques, en commençant à l'étape n_0, on garde finalement au moins

$$d^{kn}\left(1 - \varepsilon/2 - \sum_{j \geq n_0} d^{-\alpha j}\right)$$

disques d'aire inférieure à $d^{-\alpha n}$ et formant un arbre. En prenant n_0 tel que $2d^{-\alpha n_0}(1 - d^{-\alpha})^{-1} < \varepsilon$, on conserve le nombre de branches inverses désiré. Comme l'anneau $f_i^{-n}(\Delta') - f_i^{-n}(\Delta)$ est de module fixe, celui de $\Delta' - \Delta$, on a le contrôle de diamètre recherché sur $f_i^{-n}(\Delta)$ par le lemme de comparaison aire-diamètre démontré dans l'appendice de [**2**].

LEMME 3.1. *Il existe une constante* $\mathrm{C} > 0$ *telle que, pour toute paire de disques holomorphes* $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}'$ *dans* $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$*, on ait*

$$(\mathrm{Diam}(\mathrm{D}))^2 \leq \mathrm{C}\frac{\mathrm{Aire}(\mathrm{D}')}{\min\{1, \mathrm{Mod}(\mathrm{A})\}},$$

où $\mathrm{Mod}(\mathrm{A})$ *désigne le module de l'anneau* $\mathrm{A} = \mathrm{D}' - \mathrm{D}$.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000160 Published online by Cambridge University Press

Remerciements. Je tiens à remercier Julien Duval pour de nombreuses discussions et ses encouragements.

REFERENCES

[1] J. Y. Briend. Propriété de Bernoulli pour les extensions naturelles des endomorphismes de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **21** (2001), 1001–1007.

[2] J. Y. Briend et J. Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathsf{P}^k(\mathbb{C})$, à paraître dans. *Publ. Math. IHES* **93** (2001), 145–159.

[3] J. E. Fornæss et N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension. *Complex Potential Theory*. Eds. P. M. Gauthier et G. Sabidussi. Kluwer, Dordrecht, 1995, pp. 131–186.

[4] D. Heicklen et C. Hoffman. Rational maps are 1-sided Bernoulli. *Preprint*, 1998. *Ann. Math.* to appear.

[5] C. Hoffman et D. Rudolph. Uniform endomorphisms which are isomorphic to a Bernoulli shift. *Preprint*, 1998. *Ann. Math.* to appear.

[6] J. H. Hubbard et P. Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), 321–365.

[7] M. Ju. Ljubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **3** (1983), 351–385.

[8] R. Mañé. On the Bernoulli property for rational maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 71–88.

[9] D. Ornstein. *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems*. Yale University Press, Yale, MI, 1974.

[10] D. Ornstein et B. Weiss, On the Bernoulli nature of systems with some hyperbolic structure. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), 441–556.

https://doi.org/10.1017/S0143385702000160 Published online by Cambridge University Press