J. K-Theory **11** (2013), 393–411
doi:10.1017/is013001030jkt213
©2013 ISOPP

Extensions panachées autoduales

par

DANIEL BERTRAND*

Abstract

We study self-duality of Grothendieck's blended extensions in the context of a tannakian category. The set of equivalence classes of symmetric, resp. antisymmetric, blended extensions is naturally endowed with a torsor structure, which enables us to compute the unipotent radical of the associated monodromy groups in various situations.

Résumé

L'article porte sur les extensions panachées au sens de Grothendieck et leurs propriétés d'autodualité, dans le cadre d'une catégorie tannakienne. L'ensemble des classes d'équivalence d'extensions panachées symétriques, ou antisymétriques, est naturellement muni d'une structure de torseur, qui permet de calculer le radical unipotent des groupes de monodromie associés dans diverses situations.

Key Words: extensions panachées; catégories tannakiennes; représentations unipotentes.
Mathematics Subject Classification 2010: 20G05, 20L05.

0. Introduction

La notion d'extension panachée dans une catégorie abélienne **T** a été introduite par Grothendieck [G], en liaison avec la construction d'accouplements de monodromie relatifs à une variété abélienne semi-stable. Nous en rappelons la définition au §1.

Lorsque **T** admet une dualité, on peut parler du dual d'une extension panachée. C'est encore une extension panachée, et nous décrivons au §2 les types d'autodualité qu'elle peut présenter. Même s'il est proche de celui des biextensions, notre point de vue reste linéaire. Il met en valeur la structure de torseur dont est muni l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions panachées autoduales : voir le Théorème 1 du §2. Pour **T** tensorielle rigide, les aspects bilinéaires sont ainsi ramenés à des calculs élémentaires (§2, Lemme 5) sur la dualité dans les extensions ordinaires.

*On trouvera une première version, non publiée, de ce texte dans [B3].

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Une fois établi le caractère autodual d'une extension panachée M, il acquiert automatiquement un signe (§2, Lemme 4), et ce signe permet, quand $\mathbf{T}$ est tannakienne, de cerner la partie unipotente du "groupe de monodromie" G_M auquel M donne naissance. C'est le thème du §3, où nous réduisons la question à la description, classique, de certains sous-groupes paraboliques du groupe orthogonal ou symplectique. Pour un énoncé précis, voir le Théorème 2 du §3, ainsi que son corollaire.

Le texte se conclut par quelques applications de ce corollaire, qui permet non seulement de retrouver les résultats de Ribet [R] sur les représentations ℓ-adiques attachées aux 1-motifs, et ceux de [B2] sur les groupes de Galois de certaines équations différentielles, mais aussi d'en obtenir de nouveaux analogues, par exemple pour les équations aux q-différences.

Pour la commodité du lecteur, on a enfin repris dans un appendice la construction donnée par Grothendieck du torseur des extensions panachées générales, et montré qu'une autre construction naturelle conduit à la même structure.

1. Rappels sur les extensions panachées

Soient $\mathbf{T}$ une catégorie abélienne, et A, B, N trois objets de $\mathbf{T}$. Fixons deux suites exactes de $\mathbf{T}$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} M_1 \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0\ , \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M_2 \xrightarrow{\varpi} B \longrightarrow 0\ .$$

Une *extension panachée* de M_2 par M_1 est, selon Grothendieck ([G], §9.3), la donnée d'un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & M_1 & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\iota}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\tilde{j}} & M & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & M_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varpi}} & & \downarrow{\scriptstyle \varpi} & & \\
 & & & & B & = & B & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}\ ,$$

les deux 1-extensions (horizontale et verticale) où s'inscrit l'objet M vérifiant donc : $\iota^*(M) \simeq M_1, \pi_*(M) \simeq M_2$. Le choix du relèvement $\tilde{\iota}$ de ι et du prolongement $\tilde{\pi}$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

de π fait partie de la définition de l'extension panachée, même si nous la noterons abusivement M. Lorsque **T** vérifie l'hypothèse de dualité décrite au §2, le dual $\check{M}$ de M est naturellement muni d'une structure d'extension panachée $(\check{M}, {}^t\tilde{\varpi}, {}^t\tilde{j})$ de la 1-extension $\check{M}_1$ de $\check{A}$ par $\check{N}$ par la 1-extension $\check{M}_2$ de $\check{N}$ par $\check{B}$.

Un morphisme $F : M \to M'$ entre deux extensions panachées de M_2 par M_1 est un **T**-morphisme induisant l'identité sur M_1 et sur M_2. En particulier, tout endomorphisme d'une extension panachée M est un automorphisme, de la forme $id_M + \tilde{j} \circ f \circ \tilde{\varpi}$ pour un unique élément f de $Hom(B,A)$. Dans le même esprit, les flèches $\psi : M \to \check{M}$ intervenant au §2 dans la définition des extensions panachées autoduales induisent des **T**-morphismes *fixés* $\Phi : M_1 \to \check{M}_2$, $\varepsilon^t\Phi : M_2 \to \check{M}_1$ sur les 1-extensions de départ.

Soit $E \in Ext^2(B,A)$ le produit de Yoneda de la classe de M_1 dans $Ext^1(N,A)$ par celle de M_2 dans $Ext^1(B,N)$. On peut représenter E par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} M_1 \xrightarrow{e} M_2 \xrightarrow{\varpi} B \longrightarrow 0 \ ,$$

où $e = \iota o \pi$. Une autre façon de voir E consiste à considérer la suite exacte :

$$Ext^1(B,A) \xrightarrow{j_*} Ext^1(B,M_1) \xrightarrow{\pi_*} Ext^1(B,N) \xrightarrow{\delta_{M_1}} Ext^2(B,A)$$

attachée à l'extension M_1. On a alors :

$$E \ = \ \delta_{M_1}(M_2),$$

de sorte que E est nulle si et seulement si la classe de M_2 appartient au noyau de δ_{M_1}, c'est-à-dire à l'image de π_* , c'est-à-dire encore si et seulement si M_2 et M_1 sont "panachables". Ainsi :

Lemme 1 ([G], 9.3.8.c) *Les deux 1-extensions M_2, M_1 de* **T** *sont panachables si et seulement si leur produit de Yoneda est nul dans $Ext^2(B,A)$.*

Cet énoncé fournit à rebours un critère commode pour vérifier qu'une 2-extension de B par A, donnée par une suite exacte à 4 termes, est équivalente à la 2-extension triviale.

Comme le note Grothendieck, l'ensemble $Extpan(M_2,M_1)$ des classes d'isomorphisme d'extensions panachées de M_2 par M_1 est naturellement muni d'une action du groupe $Ext^1(B,A)$, définie de la façon suivante. À isomorphisme près, le translaté $M * U$ d'une extension panachée M de M_2 par M_1, par une 1-extension U de B par A, est la somme de Baer de M et de $j_*(U)$, vues comme des 1-extensions de B par M_1 ; puisque $\pi_*(M*U) = \pi_*(M) + \pi_* o\, j_*(U) = \pi_*(M) = M_2$ dans $Ext^1(B,N)$, et que les isomorphismes associés fournissent un prolongement canonique de π à $M * U$, il s'agit là bien d'une extension panachée de M_2 par M_1.

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Lemme 2 ([G], 9.3.8.b) *Pour cette action (et s'il est non vide), l'ensemble* $Extpan(M_2, M_1)$ *des classes d'isomorphisme d'extensions panachées de* M_2 *par* M_1 *est un torseur sous le groupe* $Ext^1(B, A)$.

Nous rappelons dans un appendice comment établir cette propriété, et montrons que l'autre façon naturelle de faire agir $Ext^1(B, A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ conduit à la même construction. En particulier, le Lemme A.1 de l'appendice permettrait, sous l'hypothèse de rigidité décrite ci-dessous, de munir l'ensemble $\mathcal{P}(B, N, A)$ des classes d'équivalence d'extensions panachées d'une 1-extension (non spécifiée) de B par N, par une 1-extension (non spécifiée) de N par A, d'une structure de biextension de $Ext^1(B, N) \times Ext^1(N, A)$ par $Ext^1(B, A)$. Nous n'en ferons pas usage dans ce qui suit.

Signalons dans une direction voisine l'ensemble $\mathcal{F}(B, N, A)$ introduit (dans un cadre plus général) dans [RSZ], §2.3.1, pour étudier les classes d'isomorphisme d'objets M de $\mathbf{T}$ munis d'une filtration à 3 crans à gradués A, N, B donnés. Les automorphismes de M n'induisent plus nécessairement l'identité sur les extensions intermédiaires M_1, M_2, de sorte que des extensions panachées non isomorphes peuvent fournir des objets filtrés isomorphes. Mais si

$$Hom(N, A) = 0 \ , \ Hom(B, N) = 0 \ ,$$

les 1-extensions M_1 et M_2 n'ont pas d'automorphismes non triviaux, et on peut alors identifier $\mathcal{P}(B, N, A)$ et $\mathcal{F}(B, N, A)$. Pour simplifier l'exposé, c'est sous cette hypothèse de rigidité que nous nous plaçons maintenant. Voir également [BK], E.3.2.

2. Extensions panachées autoduales.

On suppose désormais que *la catégorie abélienne* $\mathbf{T}$ *est* $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$*-linéaire, et munie d'une dualité de nature réflexive*, au sens suivant : $\mathbf{T}$ admet un endofoncteur additif contravariant, noté $(X \mapsto \check{X}, f \mapsto {}^t f)$, ainsi qu'un isomorphisme de bidualité naturel $\epsilon_X : X \to \check{\check{X}}$ tels que pour tout objet X de $\mathbf{T}$, le composé de $\epsilon_{\check{X}} : \check{X} \to \check{\check{\check{X}}}$ et du transposé ${}^t\epsilon_X : \check{\check{\check{X}}} \to \check{X}$ de ϵ_X est l'identité de $\check{X}$. Dans ces conditions, le foncteur de dualité est auto-adjoint, donc exact, et le diagramme définissant une extension panachée peut être dualisé. On se propose d'étudier, dans $\mathbf{T}$, les extensions panachées qui sont "autoduales en un sens panaché". Pour simplifier, on identifiera tout objet à son bidual, tout morphisme à son bitransposé, et on écrira Ext au lieu de Ext^1.

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Plus précisément, partons d'objets A, B, N et de 1-extensions M_1, M_2 comme au §1, pour lesquels on suppose dans toute la suite que

$$A \simeq \check{B}\ ,\ N \simeq \check{N}\ ,\ Hom(N,A) = 0 \qquad (0)$$

(de sorte que $Hom(B,N) \simeq Hom(\check{A},\check{N}) \simeq Hom(N,A)$ est également nul), et *fixons* deux isomorphismes $\phi : N \to \check{N}$ et $\lambda : A \to \check{B}$, ainsi qu'un signe $\varepsilon \in \{-1,1\}$, tels que

• *le transposé de* ϕ *vérifie* ${}^t\phi = \varepsilon\phi$;

• *les extensions* $\lambda_* M_1$ *et* $\phi^* \check{M}_2$ *sont égales dans* $Ext(N,\check{B})$ (ou encore, par transposition, $({}^t\phi)_* M_2 = ({}^t\lambda)^* \check{M}_1$ dans $Ext(B,\check{N})$) ; autrement dit, il existe un relèvement $\Phi : M_1 \to \check{M}_2$ de ϕ, *unique* d'après l'hypothèse de rigidité faite sur M_1 et M_2, induisant λ sur A :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & M_1 & \xrightarrow{\pi} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{B} & \xrightarrow{{}^t\varpi} & \check{M}_2 & \xrightarrow{{}^t\iota} & \check{N} & \longrightarrow & 0. \end{array} \qquad (1)$$

Supposons enfin M_2 *et* M_1 *panachables*, et soit M une extension panachée de M_2 par M_1. On dira que M est *autoduale relativement à* Φ (ou, moins précisément, autoduale au sens panaché) si Φ s'étend en un morphisme ψ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mu = \varepsilon^t\lambda} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{M}_2 & \longrightarrow & \check{M} & \longrightarrow & \check{A} & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (2)$$

de M sur $\check{M}$, tel que *le morphisme* μ *induit par* ψ *sur* B *par passage au quotient soit égal à* $\varepsilon^t\lambda$. (Cette deuxième condition découle automatiquement de la première si $Hom(M_1,A) \simeq Hom(B,M_2)$ est trivial.) Dans ces conditions, on désignera par $Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions panachées M de M_2 par M_1 qui sont autoduales relativement à Φ. On verra au Lemme 4 ci-dessous que M est dans ce cas automatiquement munie d'au moins une autodualité $\psi = \varepsilon^t\psi : M \to \check{M}$ de même signe que ϕ.

Notant $Ext_{\pm}(B,\check{B})$ le groupe des classes d'isomorphisme d'extensions C de B par $\check{B}$ telles que $\check{C} \simeq \pm C$, on peut alors préciser le Lemme 2 de la façon suivante.

Théorème 1 $Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$ *est non vide, et est de façon naturelle un torseur sous le groupe* $Ext_\varepsilon(B,\check{B})$. *En particulier, il coïncide avec* $Extpan(M_2,M_1)$ *si* $Ext(B,\check{B}) = Ext_\varepsilon(B,\check{B})$, *et est réduit à un élément si* $Ext(B,\check{B}) = Ext_{-\varepsilon}(B,\check{B})$.

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Démonstration: soit M une extension panachée de M_2 par M_1. L'existence du prolongement ψ de Φ décrit par le diagramme (2) équivaut, après transposition, à l'égalité

$$\lambda_* M = \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} \text{ dans } Ext(M_2, \check{B}).$$

Mais comme le montre le diagramme (4) ci-dessous, les deux extensions en question sont en fait des extensions panachées de M_2 par $\phi^* \check{M}_2$ (c'est clair pour la seconde, et cela résulte pour la première de l'identification canonique $\lambda_* M_1 \xrightarrow{\sim} \phi^* \check{M}_2$ fournie par les hypothèses (1) et (0)). Il existe donc un unique élément

$$\gamma_M = \gamma_{M,\Phi} \in Ext(B, \check{B})$$

tel que

$$\lambda_* M = \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} * \gamma_M$$

dans le $Ext(B, \check{B})$-torseur $Extpan(M_2, \phi^* \check{M}_2)$.

Cette extension γ_M de B par $\check{B}$ mesure ainsi *l'obstruction à l'autodualité* de M relative à Φ. Sa duale dans **T** vérifie :

Lemme 3 *Sous les hypothèses du diagramme* (1)*, on a dans* $Ext(B, \check{B})$ *:*

$$(\check{\gamma_M}) = -\varepsilon \gamma_M .$$

Démonstration: donnons tout d'abord quelques précisions sur la construction, esquissée ci-dessus, de l'extension γ_M. On part de la suite exacte

$$0 = Hom(N, \check{B}) \xrightarrow{(.)_* M_2} Ext(B, \check{B}) \xrightarrow{\varpi^*} Ext(M_2, \check{B}) \xrightarrow{\iota^*} Ext(N, \check{B})$$

attachée à M_2. Les extensions $\lambda_* M$ et $\varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M}$ se projetant respectivement sur $\lambda_* M_1$ et $\varepsilon({}^t\phi)^* \check{M}_2 = \phi^* \check{M}_2$, qui sont égales par hypothèse dans $Ext(N, \check{B})$, l'injectivité ici supposée de ϖ^* permet de définir γ_M comme l'unique élément $\gamma = \gamma_M$ de $Ext(B, \check{B})$ tel que

$$\lambda_* M - \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} = \varpi^* \gamma \text{ dans } Ext(M_2, \check{B}). \qquad (3)$$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Plus précisément, nos extensions sont des extensions panachées de M_2 par $\phi^* \check{M}_2$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \check{B} & \xrightarrow{{}^t\hat{\varpi}} & \{\lambda_* M_1 \overset{\sim}{\longrightarrow} \phi^* \check{M}_2\} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \check{B} & \longrightarrow & \lambda_* M \text{ resp. } \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \quad (4) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \varpi & & \\
 & & & & \check{B} & = & \check{B} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & ,
\end{array}$$

où ${}^t\hat{\varpi}$ désigne le morphisme de $\check{B}$ dans $\phi^* \check{M}_2$ sous-jacent au diagramme (1), et l'on a :

$$\lambda_* M = \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} * \gamma \text{ dans } Extpan(M_2, \phi^* \check{M}_2).$$

D'après le Lemme A.1 de l'appendice, la relation (3) s'écrit donc aussi :

$$\lambda_* M - \varepsilon({}^t\Phi)^* \check{M} = {}^t\hat{\varpi}_* \gamma \text{ dans } Ext(B, \phi^* \check{M}_2).$$

Poussons cette derniere relation dans $Ext(B, \check{M}_2)$ par le morphisme canonique

$$\hat{\phi} : \phi^* \check{M}_2 \to \check{M}_2$$

(avec $\hat{\phi} \circ {}^t\hat{\varpi} = {}^t\varpi : \check{B} \to \check{M}_2$.) Comme $\lambda_* M \in Ext(B, \lambda_* M_1) \xrightarrow{\sim} Ext(B, \phi^* \check{M}_2)$ se pousse sur $\Phi_* M \in Ext(B, \check{M}_2)$, ${}^t\Phi^* \check{M}$ sur ${}^t\lambda^* \check{M}$, et ${}^t\hat{\varpi}_* \gamma$ sur ${}^t\varpi_* \gamma$, on obtient :

$$\Phi_* M - \varepsilon {}^t\lambda^* \check{M} = {}^t\varpi_* \gamma \text{ dans } Ext(B, \check{M}_2),$$

d'où par dualité :

$$\lambda_* M - \varepsilon {}^t\phi^* \check{M} = -\varepsilon \varpi^* \check{\gamma} \text{ dans } Ext(M_2, \check{B}).$$

Cette dernière relation, jointe à (3) et à l'injectivité de ϖ^*, montre bien que $\check{\gamma} = -\varepsilon\gamma$, ce qui conclut la preuve du Lemme 3. □

Fin de la preuve du Théorème 1: pour $\delta \in Ext(B, A)$, posons $\delta' = \lambda_* \delta \in Ext(B, \check{B})$. Montrons d'abord que si on remplace $M \in Extpan(M_2, M_1)$ par $M * \delta$, l'obstruction γ_M à l'autodualité de M devient

$$\gamma_{M*\delta} = \gamma_M + \delta' - \varepsilon \check{\delta}' \in Ext(B, \check{B}).$$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Dans ce passage, M devient en effet $M + \varpi^*\delta$ dans $Ext(M_2, A)$, et $\lambda_* M$ donne $\lambda_* M + \varpi^*\lambda_*\delta$ dans $Ext(M_2, \check{B})$. Comme M devient $M + j_*\delta$ dans $Ext(B, M_2)$, $\check{M}$ donne $\check{M} + {}^t j^*\check{\delta}$ dans $Ext(\check{M_2}, \check{B})$, et ${}^t\Phi^*\check{M}$ devient ${}^t\Phi^*\check{M} + \varpi^*(\check{\lambda_*\delta})$ dans $Ext(M_2, \check{B})$ (rappelons que $\Phi \circ j = {}^t\varpi \circ \lambda$, cf. (1)). Finalement, $\varpi^*\gamma_M = \lambda_* M - \varepsilon^t\phi^*\check{M}$ devient $\varpi^*\gamma_M + \varpi^*\lambda_*\delta - \varepsilon\varpi^*(\check{\lambda_*\delta})$, et γ_M est ainsi bien remplacé par $\gamma_M + \delta' - \varepsilon\check{\delta'}$.

Faisons maintenant agir les éléments $\delta' = \varepsilon\check{\delta'}$ de $Ext_\varepsilon(B, \check{B})$ sur les objets $M \in Extpan(M_2, M_1)$ en posant $M + \delta' = M * \lambda_*^{-1}\delta'$. Si $M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$, i.e. si $\gamma_M = 0$, il en sera de même de l'obstruction $\gamma_{M*\delta} = \gamma_M$ à l'autodualité de $M + \delta'$. Inversement, tout objet M' de $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ s'écrit de façon unique $M * \delta$ dans $Extpan(M_2, M_1)$, où $\lambda_*\delta := \delta'$ vérifie : $\delta' - \varepsilon\check{\delta'} = \gamma_{M'} - \gamma_M = 0$, de sorte qu'on a bien alors $\delta' \in Ext_\varepsilon(B, \check{B})$ et $M' = M + \delta'$.

Enfin, $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$ est non vide : pour tout $M \in Extpan(M_2, M_1)$, l'obst-ruction $\gamma_M \in Ext_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ peut d'après le Lemme 3 s'écrire $\varepsilon\check{\delta'} - \delta'$, avec $\delta' = -\frac{1}{2}\gamma_M$ (la division par 2 a un sens, puisque $\frac{1}{2} \in End(B)$) ; remplaçant M par $M' = M * \lambda_*^{-1}\delta'$, on obtient $\gamma_{M'} = 0$, d'où un élément M' dans $Extpantaut(M_2, M_1, \Phi)$. □

On peut par ailleurs préciser de combien de façons, et avec quel signe, Φ se prolonge de façon panachée aux éléments M de $Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$. Posant $Hom_\pm(B, \check{B}) = \{v \in Hom(B, \check{B}), {}^t v = \pm v\}$, on obtient :

Lemme 4 *Soit $M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi)$. L'ensemble $Isoaut_\varepsilon(M, \Phi)$ des isomorphismes $\psi : M \to \check{M}$ prolongeant de façon panachée Φ avec la parité de ϕ (i.e. tels que ${}^t\psi = \varepsilon\psi$) est non vide, et est naturellement muni d'une struture de torseur sous le groupe $Hom_\varepsilon(B, \check{B})$.*

Démonstration: montrons d'abord que pour tout prolongement panaché ψ de Φ à M, il existe un élément v de $Hom_{-\varepsilon}(B, \check{B})$ tel que

$$\psi = \varepsilon^t\psi + {}^t\tilde{\varpi} v \tilde{\varpi} \in Hom(M, \check{M}).$$

En effet, le diagramme (2) induit :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\tilde{j}} & M & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\psi}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{B} & \xrightarrow{{}^t\tilde{\varpi}} & \check{M} & \longrightarrow & \check{M_1} & \longrightarrow & 0\,, \end{array}$$

ainsi que, par passage au quotient :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{N} & \longrightarrow & \check{M_1} & \longrightarrow & \check{A} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Comme l'extension M_1 n'a pas d'automorphisme et que ${}^t\mu = \varepsilon\lambda$ par définition de ψ, la comparaison de ce dernier diagramme au transposé de (1) donne $\overline{\psi} = \varepsilon^t\Phi$. Ainsi, $\varepsilon\psi^{-1}\,{}^t\psi$ est un automorphisme de l'extension panachée M, donc de la forme $id_M + \tilde{j}u\tilde{\varpi}$ pour un élément u de $Hom(B,A)$. Comme $\psi\tilde{j} = {}^t\tilde{\varpi}\lambda$, on conclut en posant $v = -\lambda u$, qui appartient bien à $Hom_{-\varepsilon}(B,\check{B})$ puisque ${}^t\tilde{\varpi}({}^tv + \varepsilon v)\tilde{\varpi} = 0$.

Dans ces conditions, l'isomorphisme $\psi' := \psi - {}^t\tilde{\varpi}(\frac{1}{2}v)\tilde{\varpi} = \varepsilon^t\psi' : M \to \check{M}$ prolonge encore Φ de façon panachée. Donc $Isoaut_\varepsilon(M,\Phi)$ est non vide, et on vérifie par le même argument que supra que la loi $(\psi,w) \mapsto \psi + {}^t\tilde{\varpi}w\tilde{\varpi}$ en fait un torseur sous $Hom_\varepsilon(B,\check{B})$. □

En liaison avec la description cohomologique qu'en donne B. Kahn dans [K], A.15, calculons pour terminer les groupes structuraux $Ext_\pm(B,\check{B})$ du Théorème 1. Pour cela, nous supposerons que **T** est une *catégorie tensorielle k-linéaire rigide, où k désigne un corps de caractéristique* $\neq 2$. D'après [DM], 1.7, une telle catégorie vérifie bien les hypothèses du début de cette section, avec $\check{X} = \underline{Hom}(X,\mathbf{1})$, où $\mathbf{1}$ est l'objet unité de **T**. Étant donné deux objets A,B de **T** et une extension C de B par A, notons $F(C)$ l'extension de $\mathbf{1}$ par $\check{B}\otimes A \simeq \underline{Hom}(B,A)$, image inverse de l'extension $0 \to \check{B}\otimes A \to \check{B}\otimes C \to \check{B}\otimes B \to 0$ sous le morphisme naturel de $\mathbf{1}$ dans $\check{B}\otimes B$. Pour tout couple A,B, on obtient ainsi un isomorphisme

$$F : Ext(B,A) \xrightarrow{\sim} Ext(\mathbf{1},\check{B}\otimes A).$$

Désignons encore par $t : \check{B}\otimes A \to A\otimes\check{B}$ la contrainte de commutativité, identifiée par l'isomorphisme de bidualité $A \simeq \check{\check{A}}$ à la transposition sur $\underline{Hom}(B,A)$, et, pour $A = \check{B}$ et $\varepsilon = \pm 1$, par $\otimes^2_\varepsilon\check{B}$ le noyau de $t - \varepsilon\, id$ sur $\otimes^2\check{B}$ (autrement dit, $\otimes^2_- = \Lambda^2, \otimes^2_+ = S^2$).

Lemme 5 *i) Pour tout* $C \in Ext(B,A)$, *de duale* $\check{C} \in Ext(\check{A},\check{B})$, *on a*

$$F(\check{C}) = -t_*F(C) \text{ dans } Ext(\mathbf{1},A\otimes\check{B})\ ;$$

ii) en particulier, pour tout $B \in \mathbf{T}$ *et tout* $\varepsilon = \pm 1$, F *induit un isomophisme de* $Ext_\varepsilon(B,\check{B})$ *sur* $Ext(\mathbf{1},\otimes^2_{-\varepsilon}\check{B})$.

Démonstration: i) notons i,p les morphismes sous-jacents à l'extension C. On a, en identifiant $\mathbf{1}$ à son image dans $\check{B}\otimes B$ (et, pour simplifier l'écriture, les objets de **T** à des modules sur une k-algèbre R) :

$$F(C) = \{f \in \underline{Hom}(B,C),\ \exists\,\alpha := \tilde{p}(f) \in R,\ p\circ f = \alpha\, id_B\}.$$

De même, $F(\check{C}) = \{{}^tg \in \underline{Hom}(\check{A},\check{C}),\ \exists\,\beta := \tilde{p}'({}^tg) \in R,\ {}^ti\circ{}^tg = {}^t(g\circ i) = \beta id_{\check{A}}\}$. Considérons alors le morphisme de $F(C)$ dans $F(\check{C})$ qui envoie f sur le transposé de $g := \tilde{p}(f)id_C - f\circ p : C \to A$. Il induit sur le noyau $\underline{Hom}(B,A)$ de $\tilde{p}$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

l'application $f \mapsto {}^t(-f) \in \underline{Hom}(\check{A},\check{B}) = Ker(\tilde{p}')$, et par passage aux quotients, l'application identité sur $\mathbf{1}$, puisque $(\alpha\ id_C - f \circ p) \circ i = \alpha\ id_A$. Par conséquent, $F(\check{C}) = (t \circ [-1])_* F(C) = t_*([-1]_* F(C)) = -t_* F(C)$ dans $Ext(\mathbf{1}, A \otimes \check{B})$.

ii) F définit un isomorphisme de $Ext(B,\check{B})$ sur $Ext(\mathbf{1},\otimes^2\check{B})$, et on déduit de i) que $\check{C} \simeq \varepsilon C$ si et seulement si $t_*(F(C)) \simeq -\varepsilon F(C)$. □

Sous les hypothèses du diagramme (1), on peut donc énoncer, en paraphrase du Théorème 1 :

- *si* $Ext(\mathbf{1},\otimes^2_\varepsilon\check{B}) = 0$, *toute extension panachée de* M_2 *par* M_1 *est autoduale ;*
- *si* $Ext(\mathbf{1},\otimes^2_{-\varepsilon}\check{B}) = 0$, *il existe une unique extension panachée autoduale de* M_2 *par* M_1.

3. Application aux représentations unipotentes

Dans cette dernière partie, on suppose que $\mathbf{T}$ *est une catégorie tannakienne neutre sur un corps* k *de caractéristique nulle*, dont on note ω un foncteur fibre sur k. Soient M une extension panachée dans $\mathbf{T}$, et G_M/k le groupe algébrique à travers lequel le schéma en groupes $\underline{Aut}^{\otimes}_k(\omega)$ agit sur le k-espace vectoriel $\omega(M)$. On reprend les hypothèses (0) et (1) du début du §2, et on suppose que

$$M \in Extpanaut(M_2, M_1, \Phi).$$

On fixe l'un des prolongements panachés et ε-symétriques de Φ à M, soit ψ, dont l'existence est assurée par le Lemme 4. Alors, ψ définit sur $\omega(M)$ une forme bilinéaire non dégénérée ε- symétrique, qu'on notera encore ψ, et $\omega(A) \subset \omega(M)$ est un sous-espace totalement isotrope pour ψ, dont l'orthogonal dans $\omega(M)$ s'identifie à $\omega(M_1)$ (puisque ψ envoie $\omega(M_1)$ (resp. $\omega(A)$) sur l'espace $\omega(\check{M}_2)$ (resp. $\omega(\check{B})$) des équations définissant $\omega(A)$ (resp. $\omega(M_1)$) dans $\omega(M)$). Autrement dit, la filtration naturelle $A \subset M_1 \subset M$ de l'extension panachée M fournit la filtration standard [1] de l'espace ε-symétrique $(\omega(M),\psi)$

$$W_\psi : \omega(A) \subset \omega(A)^\perp = \omega(M_1) \subset \omega(M)$$

attachée à son sous-espace totalement isotrope $\omega(A)$. Le groupe G_M est donc contenu dans le sous-groupe parabolique $P_{\omega(A)} := Aut_{W_\psi}(\omega(M))$ du groupe orthogonal ou symplectique $Aut_\psi(\omega(M))$ attaché à cette filtration. Les radicaux unipotents $W_{-1}G_M \subset W_{-1}P_{\omega(A)}$ de ces groupes sont formés des automorphismes induisant l'identité sur le gradué de W_ψ.

1. La lettre W et les indexations qui suivent sont inspirées de la théorie des 1-motifs, mais notre étude ne nécessite pas de disposer d'une notion de poids.

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Le sous-groupe normal $W_{-2}P_{\omega(A)} = \{g \in P_\omega(A), (g-id)(\omega(M)) \subset \omega(A)\}$ de $W_{-1}P_{\omega(A)}$ intersecte $W_{-1}G_M$ suivant un sous-groupe $W_{-2}G_M$, que nous allons maintenant déterminer, en supposant que $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M \subset W_{-1}P_{\omega(A)}/W_{-2}P_{\omega(A)} \simeq Hom(\omega(B),\omega(N))$ (voir la formule (5) ci-dessous) est aussi gros que possible. Pour tout $\delta' \in Ext(B,\check{B})$, on pose, comme dans la preuve du theorème 1 : $M+\delta' := M * \lambda_*^{-1}\delta'$, et on note $W_{-2}G_{\delta'} = W_{-1}G_{\delta'}$ le radical unipotent du groupe algébrique $G_{\delta'}$.

Théorème 2 *Soit M une extension panachée de M_2 par M_1, munie d'un isomorphisme $\Phi : M_1 \to \check{M}_2$ vérifiant les hypothèses du diagramme* (1) *du §2, et telle que $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M = Hom(\omega(B),\omega(N))$. On suppose N non nul.*

i) Si $M \in Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$, alors $W_{-2}G_M = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B),\omega(\check{B}))$.

ii) De façon générale, il existe un unique élément δ_M de $Ext_{-\varepsilon}(B,\check{B})$ tel $M' = M+\delta_M$ appartienne à $Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$. Alors, $W_{-2}G_{M'} = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B),\omega(\check{B}))$, $W_{-2}G_{\delta_M}$ est contenu dans $Hom_\varepsilon(\omega(B),\omega(\check{B}))$, et $W_{-2}G_M \simeq W_{-2}G_{M'} \oplus W_{-2}G_{\delta_M}$.

La démonstration du Théorème 2 repose sur deux ingrédients. Le premier, qui est classique, donne la structure du parabolique $P_{\mathbf{A}}$ attaché à un sous-espace totalement isotrope $\mathbf{A}$ d'un espace ε-symétrique $(\mathbf{M},\psi)$ (les lettres grasses représentent ici des k-espaces vectoriels). On désigne par ϕ la forme ε-symétrique non dégénérée induite par ψ sur le quotient $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\perp/\mathbf{A}$, par μ l'isomorphisme de $\mathbf{B} = \mathbf{M}/\mathbf{A}^\perp$ sur $\check{\mathbf{A}}$ induit par ψ, et pour ν,ν' dans $Hom(\mathbf{B},\mathbf{N}) \simeq \check{\mathbf{B}} \otimes \mathbf{N}$, par $\Phi(\nu,\nu') : \mathbf{B} \to \check{\mathbf{B}}$ le morphisme $b \mapsto \Phi(\nu,\nu')(b)(.) := \phi(\nu(b),\nu'(.))$

Lemme 6 *Avec les notations précédentes,*

$$W_{-2}P_{\mathbf{A}} = \{\tilde{z} \in Hom(\mathbf{B},\mathbf{A}),\ {}^t\mu o\tilde{z} := z \in Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B},\check{\mathbf{B}})\},$$

et le radical unipotent $W_{-1}P_{\mathbf{A}}$ de $P_{\mathbf{A}}$ est isomorphe au produit semi-direct du groupe $Hom(\mathbf{B},\mathbf{N})$ par le groupe $Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B},\check{\mathbf{B}})$, muni de la loi

$$(z,\nu)(z',\nu') = (z+z'+\frac{1}{2}(\Phi(\nu,\nu')-\Phi(\nu',\nu)),\nu+\nu').$$

Pour $\nu = \beta\otimes n, \nu' = \beta'\otimes n' \in \check{\mathbf{B}}\otimes\mathbf{N}$, on a : $\Phi(\nu,\nu')-\Phi(\nu',\nu) = \phi(n,n')(\beta\otimes\beta' - \varepsilon\beta'\otimes\beta) \in \otimes^2_{-\varepsilon}\check{\mathbf{B}}$. Quand $\mathbf{N}$ est non nul (de sorte que $\phi \not\equiv 0$), le Lemme 6 entraîne donc que le sous-groupe dérivé de $W_{-1}P_{\mathbf{A}}$, qui est engendrée par les $\Phi(\nu,\nu')-\Phi(\nu',\nu)$ où $\nu,\nu' \in Hom(\mathbf{B},\mathbf{N})$, remplit tout $W_{-2}P_{\mathbf{A}}$, et revient à dire que

$$\begin{aligned} W_{-2}P_{\mathbf{A}} &= (W_{-1}P_{\mathbf{A}})^{der} \simeq Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B},\check{\mathbf{B}}) \\ W_{-1}P_{\mathbf{A}}/W_{-2}P_{\mathbf{A}} &= (W_{-1}P_{\mathbf{A}})^{ab} \simeq Hom(\mathbf{B},\mathbf{N}). \end{aligned} \tag{5}$$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Démonstration (voir [Bo], p. 16, ou [Sh], Lemme 2.10): si $a = dim\mathbf{A}, h = dim\mathbf{N}$, il existe une base de $\mathbf{M}$ dans laquelle la matrice représentative de la forme ψ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon\mathbf{I}_a \\ 0 & \mathbf{J}_h & 0 \\ \mathbf{I}_a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où ${}^t\mathbf{J}_h = \varepsilon\mathbf{J}_h$ représente la forme ε-symétrique ϕ sur $\mathbf{N}$, et $\varepsilon\mathbf{I}_a$ l'isomorphisme $\mu = \varepsilon{}^t\lambda$ de $\mathbf{B}$ vers $\check{\mathbf{A}}$. Le parabolique $P_{\mathbf{A}}$ est alors représenté par le groupe des matrices

$$g \in GL_{2a+h}(k), g = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\xi & \zeta \\ 0 & \sigma & \nu \\ 0 & 0 & {}^t\alpha^{-1} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in GL_a(k) \simeq Aut(\mathbf{A})$, $\nu \in M_{h,a}(k) \simeq Hom(\mathbf{B},\mathbf{N})$, $\sigma \in GL_{h,\mathbf{J}_h}(k) \simeq Aut_\phi(\mathbf{N})$, ${}^t\xi = -\alpha{}^t\nu\mathbf{J}_h\sigma$, et enfin $\zeta = \alpha(z - \frac{1}{2}{}^t\nu\mathbf{J}_h\nu)$, où z parcourt le groupe des matrices

$$Z = \{z \in M_{a,a}(k), {}^tz = -\varepsilon z\},$$

i.e. le groupe $\{\tilde{z} \in Hom(\mathbf{B},\mathbf{A}), {}^t\mu o\tilde{z} := z \in Hom_{-\varepsilon}(\mathbf{B},\check{\mathbf{B}})\}$. Son radical unipotent est donc donné par

$$W_{-1}P_{\mathbf{A}} \simeq \{g \in GL_{2a+h}(k), g = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a & {}^t\xi & \zeta \\ 0 & \mathbf{I}_h & \nu \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_a \end{pmatrix}\},$$

avec $\nu \in M_{h,a}(k)$, $\xi = -\varepsilon\mathbf{J}_h\nu$, $\zeta = z - \frac{1}{2}{}^t\nu\mathbf{J}_h\nu$, tandis que $W_{-2}P_{\mathbf{A}} \simeq Z$. □

Le deuxième ingrédient de la preuve est élémentaire (voir [B2], Lemma 2.1) :

Lemme 7 *Soient n une algèbre de Lie nilpotente, d'algèbre dérivée Dn, et g une sous-algèbre de Lie de n. Alors, $g = n$ si (et seulement si) $g/g \cap Dn = n/Dn$.*

Démonstration: : on vérifie par récurrence que la série centrale descendante

$$C^1g = g \supset C^2g = Dg \supset ... \supset C^ig = [C^{i-1}g, g] \supset ...$$

de g vérifie : $C^ig + C^{i+1}n = C^in$, de sorte que $C^ig \to C^in/C^{i+1}n$ est surjective pour tout i. Mais $C^in = 0$ pour $i >> 0$, donc $C^ig = C^in$ pour tout i. □

Démonstration du Théorème 2: i) soit n l'algèbre de Lie du radical unipotent $W_{-1}P_{\omega(A)}$ du groupe parabolique $P_{\omega(A)} = Aut_{W_\psi}(\omega(M))$, et g celle de $W_{-1}G$. Comme $\omega(N) \neq 0$, on déduit des formules (5) que $Dn = LieW_{-2}P_{\omega(A)}$, et $n/Dn \simeq LieHom(\omega(B),\omega(N))$. Mais $W_{-2}G_M = G_M \cap W_{-2}P_{\omega(A)}$, donc l'hypothèse de l'énoncé $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M = Hom(\omega(B),\omega(N))$ revient à dire que $g/g \cap Dn =$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

n/Dn. Le Lemme 7 entraîne alors que $W_{-1}G_M = W_{-1}P_{\omega(A)}$, et qu'en particulier $W_{-2}G_M = W_{-2}P_{\omega(A)} = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B),\omega(\check{B}))$.

ii) on a vu au Théorème 1 que $\delta_M := \delta' = -\frac{1}{2}\gamma_M$ vérifie la condition demandée. Si M s'écrit aussi $M'' - \delta''$ avec $\delta'' \in Ext_{-\varepsilon}(B,\check{B})$ et M'' autoduale, la structure de torseur de $Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$ fournit un élément $\theta \in Ext_{\varepsilon}(B,\check{B})$ tel que $M'' = M' + \theta$, d'où $\theta = \delta_M - \delta''$ dans $Ext(B,\check{B}) = Ext_+(B,\check{B}) \oplus Ext_-(B,\check{B})$, et $\delta_M = \delta''$. Dans ces conditions, $W_{-2}G_{\delta_M} \subset Hom_{\varepsilon}(\omega(B),\omega(\check{B}))$. Les images dans $Hom(\omega(B),\omega(\check{B}))$ de $W_{-2}G_{M'}$ et de $W_{-2}G_{\delta_M}$ sont donc linéairement indépendantes, et $W_{-2}G_M$ s'envoie surjectivement sur chacune d'elles ; en effet, toute extension panachée M de M_2 par M_1 (resp. toute extension δ de B par $\check{B}$) définit un homomorphisme ξ_M (resp. ξ_δ) du sous-schéma en groupes de $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ découpé par $M_1 \simeq \check{M}_2$, à valeurs dans $Hom(\omega(B),\omega(\check{B}))$, dont l'image coïncide précisément avec $W_{-2}G_M$ (resp. $W_{-2}G_\delta$), et qui vérifie : $\xi_{M+\delta} = \xi_M + \xi_\delta$. Enfin, $W_{-2}G_M$ contient $(W_{-1}G_M)^{der} \simeq (W_{-1}G_{M'})^{der}$, qui coincide avec $W_{-2}G_{M'}$ d'après la première partie de la preuve. Donc $W_{-2}G_M$ remplit tout $W_{-2}G_{M'} \oplus W_{-2}G_{\delta_M}$. □

En combinant le Théorème 2 à la remarque donnée à la fin du §2, on obtient enfin :

Corollaire *Sous les hypothèses du Théorème 2,*
i) si $Ext(\mathbf{1},\otimes^2_{\varepsilon}\check{B}) = 0$, *alors* M *appartient à* $Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$, *et par conséquent,* $W_{-2}G_M = Hom_{-\varepsilon}(\omega(B),\omega(\check{B}))$;
ii) si $Ext(\mathbf{1},\otimes^2_{-\varepsilon}\check{B}) = 0$, *il existe un unique élément* δ_M *de* $Ext_{-\varepsilon}(B,\check{B}) \simeq Ext(B,A)$ *tel que* $M' = M + \delta_M \in Extpanaut(M_2,M_1,\Phi)$, *et on a alors :* $W_{-2}G_M \simeq Hom_{-\varepsilon}(\omega(B),\omega(\check{B})) \oplus W_{-2}G_{\delta_M}$.

Applications

Les extensions panachées M qu'on rencontre dans la nature, comme celles qu'aborde C. Bertolin [Be] (resp. C. Hardouin [H]) en liaison avec les 1-motifs (resp. les équations différentielles), ne vérifient en général pas l'hypothèse $M_1 \simeq \check{M}_2$ de notre étude. Ces auteurs fournissent néanmoins des algorithmes généraux pour déterminer le radical unipotent de leur groupe de Galois G_M. Nos méthodes, limitées par les conditions du Théorème 2, ne peuvent évidemment pas atteindre un objectif aussi vaste. Mais les résultats obtenus sous ces conditions sont alors plus explicites. En voici quelques illustrations.

1) Supposons que B soit un objet de $\mathbf{T}$ inversible (par exemple, que $A = B = \mathbf{1}$) et que l'extension $M_1 \simeq \phi^*(\check{M}_2)$ n'admette de section au dessus d'aucun sous-objet non nul de N. L'hypothèse $W_{-1}G_M/W_{-2}G_M \simeq Hom(\omega(B),\omega(N))$ du Théorème

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

2 est alors satisfaite, tandis que B vérifie trivialement : $Ext(\mathbf{1},\Lambda^2\check{B}) = 0$. Le corollaire au Théorème 2 énonce alors que

si $\varepsilon = -1$, l'extension panachée M est automatiquement autoduale, et $W_{-2}G_M = Hom_+(k,k) = k$, alors que

si $\varepsilon = 1$, $W_{-2}G_{M'} = Hom_-(k,k) = 0$, d'où $W_{-2}G_M = W_{-2}G_{\delta_M}$, qui vaut 0 ou k suivant que M est ou non autoduale.

On recouvre ainsi l'ensemble des résultats de [B2], §3, sur le groupe de Galois G_M du produit $M = L_{-2}L_{-1}L_0$ de trois opérateurs différentiels irréductibles, où L_{-2} et L_0 sont d'ordre $\rho = 1$. Nous renvoyons à [H] pour la détermination de $W_{-1}G_M$ quand L_{-2}, L_{-1}, L_0 sont trois opérateurs semi-simples arbitraires.

2) L'analogue aux q-différences des résultats de [B2] fournit un exemple nouveau, bien que proche, d'application du corollaire. Plus précisément soient $q \neq 0, |q| \neq 1$, un nombre complexe, σ l'automorphisme du corps $K = \mathbf{C}(z)$ défini par $\sigma f(z) = f(qz)$, et $\mathbf{T}$ la catégorie des modules à gauche de longeur finie sur l'anneau de Ore $\mathcal{D}_q = K < \sigma, \sigma^{-1} >$ (voir [RSZ], 2.1.2). C'est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbf{C}$, dont le foncteur de dualité provient de l'involution $(z^i\check{\sigma}^j) = \sigma^{-j}z^i$ de $\mathcal{D}_q$. Pour tout $a \in K^*$, posons $\sigma_a = \sigma - \frac{\sigma(a)}{a}$, de sorte que $\check{\sigma_a}$ est équivalent à $\sigma_{1/a}$. On peut alors reprendre mot pour mot l'énoncé du Théorème 3 de [B2], en y remplaçant l'anneau des opérateurs différentiels D_K par $\mathcal{D}_q$ et l'adjonction par cette involution. Par exemple, pour $L \in \mathcal{D}_q$ irréductible d'ordre n, et pour $a, b \in K^*$ tels que $a \notin L(K), \frac{1}{b} \notin \check{L}(K)$, le radical unipotent du groupe de Galois aux q-différences de $M = \sigma_a L \sigma_b$ a pour dimension $2n+1$, $n+1$ ou n, et cette dernière valeur n'est atteinte que si M est symétriquement autodual.

3) En remplaçant $\check{B} = \mathbf{1}$ et $\check{N}$ par leurs tordus à la Tate $\hat{B} = \check{B}(1), \hat{N} = \check{N}(1)$ (et en prenant garde au signe[2] qui apparaît dans l'expression de la bidualité *via* les biextensions de Poincaré, cf. [G], 10.2.8, et [D], 10.2.4), on retrouve également les résultats de K. Ribet [R] sur les dégénérescences des représentations galoisiennes attachées aux 1-motifs de rangs torique et constant égaux à $\rho = 1$, et ceux de [B1] sur le radical unipotent de leurs groupes de Mumford-Tate. L'influence de la relation $\Lambda^2\mathbf{Z} = 0$ sur ces énoncés avait déjà été remarquée par L. Breen (voir, plus généralement, [Br]).

2. Soient M la réalisation de Betti sur $\mathbf{Q}$ d'un 1-motif sur $\mathbf{C}$, $\hat{M} = Hom(M, \mathbf{Q}(1))$ celle de son dual de Cartier, et $<,>_M$: $M \otimes \hat{M} \to \mathbf{Q}(1)$ l'accouplement canonique. En vertu de [D], 10.2.4, l'isomorphisme de bidualité $i_M : M \to \hat{\hat{M}}$ vérifie $< x, \xi >_M = - < \xi, i_M(x) >_{\hat{M}}$. De ce fait, un 1-motif est symétrique au sens de [By], 2.1.4 (ou de [M], 4.2.6) si et seulement si l'extension panachée qui lui correspond est antisymétriquement autoduale ($\varepsilon = -1$) ; les extensions panachées étudiées dans [G], qui proviennent de biextensions symétriques, sont antisymétriques, tandis que les biextensions antisymétriques de [Br] fournissent des extensions panachées symétriques.

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Lorsque $\rho > 1$, les analogues $Ext_{\pm}(B, \hat{B}) = 0$ pour les 1-motifs des hypothèses (i) ou (ii) du corollaire ne sont jamais satisfaits. Mais il existe des 1-motifs autoduaux de rang constant arbitraire, auxquels le Théorème 2 s'appliquera. Ainsi, tout 1-motif symétrique au sens de [By] 2.1.4 (resp. antisymétrique) construit sur ρ points $End(\mathcal{N})$-linéairement indépendants d'une variété abélienne complexe $\mathcal{N}$, admet $Sym^2\mathbf{Q}^\rho$ (resp. $\Lambda^2\mathbf{Q}^\rho$) en cran W_{-2} du radical unipotent de son groupe de Mumford-Tate. Ici encore, nous renvoyons à [Be] pour la détermination de $W_{-1}G_M$ dans le cas général.

4) La version relative des 1-motifs (1-motifs lisses de [D]) conduit, quand la base est une variété algébrique S sur $\mathbf{C}$, à des équations différentielles (connexion de Gauss-Manin) dont le groupe de Galois différentiel contrôle l'indépendance algébrique sur le corps $K = \mathbf{C}(S)$ des "logarithmes" des sections rationnelles de schémas semi-abéliens sur S. La construction de Ribet [R] admet de même une version relative, explicitée dans [B4], qui jette un pont entre les applications (3) et (1) décrites ci-dessus. Les dégénérescences correspondantes, de type $W_{-2}G_M = 0$, fournissent un contre-exemple à la conjecture de Manin-Mumford relative, et peuvent s'interpréter comme une application de (3), de (1), ou, plus directement, du Théorème 2 lui-même : voir [B4], Theorem 1 and Remark 2.(iii).

Appendice

Nous reprenons le cadre général du §1 relatif à la catégorie abélienne $\mathbf{T}$, dont on fixe les objets A, B, N et les 1-extensions M_1, M_2. Notons $\mathbf{Ext}(Q, P)$ la catégorie des 1-extensions dans $\mathbf{T}$ de Q par P, et $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$ celle des extensions panachées de $M_2 \in \mathbf{Ext}(B, N)$ par $M_1 \in \mathbf{Ext}(N, A)$. Comme annoncé dans le texte, l'action de $Ext^1(B, A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ peut se décrire des deux façons équivalentes suivantes.

Lemme A.1 *Soit M une extension panachée de M_2 par M_1 . Pour toute extension U de B par A , les sommes de Baer $M + j_*U$ dans $\mathbf{Ext}(B, M_1)$ et $M + \varpi^*U$ dans $\mathbf{Ext}(M_2, A)$ définissent des extensions panachées M_U et M^U de M_2 par M_1, reliées par un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$.*

Démonstration: les morphismes j et ϖ sont ceux du diagramme du §1 relatif à l'extension panachée M, dont nous reprenons également les notations $\tilde{j} = \tilde{\imath} \circ j$ et $\tilde{\varpi} = \varpi \circ \tilde{\pi}$. Soit par ailleurs

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} U \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

la suite exacte correspondant à U. Alors (et en supposant pour faciliter la lecture que les objets de $\mathbf{T}$ sont des modules sur un anneau), $M_U := M + j_*U = M \times_B^{M_1}$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

$(U \times^A M_1)$ est représenté par

$$\frac{\{(m,u,m_1) \in M \times U \times M_1 \ , \ \tilde{\varpi}(m) = p(u)\}}{\{(-\tilde{\imath}(m_1), -i(a), j(a) + m_1) \ , \ m_1 \in M_1, a \in A\}} \simeq \frac{\{(m,u) \in M \times U \ , \ \tilde{\varpi}(m) = p(u)\}}{\{(\tilde{j}(a), -i(a)) \ , \ a \in A\}},$$

tandis que $M^U := M + \varpi^* U = M \times^A_{M_2} (U \times_B M_2)$ est représenté par

$$\frac{\{(m,u,m_2) \in M \times U \times M_2, \tilde{\pi}(m) = m_2, p(u) = \varpi(m_2)\}}{\{(-\tilde{j}(a), i(a), 0) \ , \ a \in A\}} \simeq \frac{\{(m,u) \in M \times U, p(u) = \tilde{\varpi}(m)\}}{\{(-\tilde{j}(a), i(a)) \ , \ a \in A\}}.$$

Notons F le **T**-isomorphisme canonique de M_U vers M^U auquel l'égalité des termes de droite conduit.

La structure de 1-extension de $M_U \in \mathbf{Ext}(B, M_1)$ est donnée par

$$M_1 \to M_U : m_1 \mapsto \overline{(\tilde{\imath}(m_1), 0)} \ ; \ M_U \to B : \overline{(m,u)} \mapsto \tilde{\varpi}(m) = p(u).$$

En composant le premier morphisme avec j, on voit que M_U est naturellement muni d'une structure de 1-extension de M_2 par A, soit $M_U \in \mathbf{Ext}(M_2, A)$, donnée par :

$$A \to M_U : a \mapsto \overline{(\tilde{j}(a), 0)} = \overline{(0, i(a))} \ ; \ M_U \to M_2 : \overline{(m,u)} \to \tilde{\pi}(m).$$

Ces morphismes permettent d'inscrire M_U dans un diagramme de type (1), et en font donc une extension panachée de M_2 par M_1 (dont la notation $M * U$ du texte représente la classe d'isomorphisme). Un calcul similaire sur M^U entraîne alors que $F : M_U \to M^U$ induit l'identité sur M_1 et sur M_2 ; c'est donc bien un isomorphisme dans $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$. □

(6)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & Hom(B,A) & & & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \varpi^*} & & & & \\
 & & & & Hom(M_2,A) & & & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \iota^*} & & & & \\
 & & & & Hom(N,A) & \longrightarrow & Hom(N,M_1) & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle (.)_* M_2} & & \downarrow & & \\
Hom(B,A) & \xrightarrow{j_*} & Hom(B,M_1) & \xrightarrow{\pi_*} & Hom(B,N) & \xrightarrow{(.)^* M_1} & Ext^1(B,A) & \xrightarrow{j_*} & Ext^1(B,M_1) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varpi^*} & & \downarrow \\
 & & & & Hom(M_2,N) & \longrightarrow & Ext^1(M_2,A) & \longrightarrow & Ext^1(M_2,M_1)
\end{array}$$

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

En dépit du Lemme A.1, la construction asymétrique de la classe d'isomorphisme $M*U \in Extpan(M_2,M_1)$ donnée par M_U (resp. par M^U) peut faire penser que l'action de $Ext^1(B,A)$ sur $Extpan(M_2,M_1)$ passe au quotient par l'image de $Hom(B,N)$ (resp. $Hom(N,A)$) dans $Ext^1(B,A)$: voir la quatrième ligne (resp. colonne) du diagramme (6) ci-dessus. Le lemme suivant (ou son analogue pour M^U) montre qu'il n'en est rien.

Lemme A.2 *Soit $f \in Hom(B,N)$, et soit $U = f^*M_1 \in \mathbf{Ext}(B,A)$, de sorte que $j_*U \in \mathbf{Ext}(B,M_1)$ est munie d'une section canonique s_f. Soit de plus $F : M \xrightarrow{\sim} M_U := M + j_*U$ le $\mathbf{Ext}(B,M_1)$-isomorphisme attaché à s_f. Alors,*

i) F induit sur M_2 l'automorphisme $id_{M_2} - \iota \circ f \circ \varpi$;

ii) M et M_U sont isomorphes dans $\mathbf{Extpan}(M_2,M_1)$ si et seulement si f se relève en un morphisme de B vers M_1, auquel cas la classe de U dans $Ext^1(B,A)$ s'annule.

Démonstration: i) avec les conventions de la preuve précédente, l'extension triviale $j_*f^*M_1 = M_1 \times^A (M_1 \times_{N,f} B)$ est représentée par

$$\frac{\{(m'_1,m_1,b) \in M_1 \times M_1 \times B \ , \pi(m_1) = f(b)\}}{\{(j(a),-j(a),0) \ , \ a \in A\}},$$

qui admet pour section $s_f : B \to j_*f^*M_1 : b \mapsto \overline{(-\mu_1,\mu_1,b)}$, où $\mu_1 \in M_1$ désigne un élément quelconque de la fibre de $f(b)$. De même, $M_U = M + j_*f^*M_1 \in \mathbf{Ext}(B,M_1)$ est représenté par

$$\frac{\{(m,m_1,b) \in M \times M_1 \times B \ , \ \tilde{\varpi}(m) = b, \pi(m_1) = f(b)\}}{\{(\tilde{j}(a),-j(a),0) \ , \ a \in A\}} \simeq \frac{\{(m,m_1) \in M \times M_1 \ , \ \pi(m_1) = f(\tilde{\varpi}(m))\}}{\{(\tilde{j}(a),-j(a)) \ , \ a \in A\}},$$

et l'isomorphisme $F : M \to M_U$ associé à s_f par

$$m \mapsto F(m) = \overline{(m - \tilde{\iota}(\mu_1),\mu_1)}, \text{ pour tout } \mu_1 \text{ tel que } \pi(\mu_1) = f(\tilde{\varpi}(m)).$$

On vérifie que F est bien un morphisme de $\mathbf{Ext}(B,M_1)$. Par ailleurs, la structure d'extension de M_2 par A que porte M_U est maintenant donnée par

$$A \to M_U : a \mapsto \overline{(\tilde{j}(a),0)} = \overline{(0,j(a))} \ ; \ M_U \to M_2 : \overline{(m,m_1)} \to \tilde{\pi}(m).$$

Par passage au quotient par A, F induit un $\mathbf{Ext}(B,N)$-endomorphisme $\tilde{F}$ de M_2, qu'on peut expliciter comme suit. Soit m_2 un élément de M_2, d'image $b = \varpi(m_2)$ dans B, et soient μ (resp. μ_1) un élément de la fibre de M (resp. M_1) au-dessus de

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

m_2 (resp. $f(b)$). Alors, $\pi(\mu_1) = f(b) = f(\tilde{\varpi}(\mu))$, donc $F(\mu) = \overline{(\mu - \tilde{\iota}(\mu_1), \mu_1)}$, et

$$\tilde{F}(m_2) = \tilde{\pi}(\mu - \tilde{\iota}(\mu_1)) = m_2 - \iota(f(b)) = m_2 - \iota f \varpi(m_2).$$

Ainsi, $\tilde{F} = id_{M_2} - \iota \circ f \circ \varpi$.

ii) les extensions panachées M et M_U sont isomorphes si et seulement s'il existe un $\mathbf{T}$-morphisme $F' : M \to M_U$ induisant l'identité sur M_1 et sur M_2. En particulier, $F^{-1} \circ F'$ est alors un $\mathbf{Ext}(B, M_1)$-automorphisme de M, et il existe un élément g de $Hom(B, M_1)$ tel que $F^{-1} \circ F' = id_M + \tilde{\iota} \circ g \circ \tilde{\varpi}$. Dans ces conditions, F' répond à la question si et seulement si le morphisme $\tilde{F}'$ qu'il induit sur M_2 est l'identité. Comme $\tilde{\iota} \circ g \circ \tilde{\varpi}$ induit $\iota \circ \pi_*(g) \circ \varpi$ sur M_2, de sorte que $\tilde{F}' = id_{M_2} + \iota \circ (\pi_*(g) - f) \circ \varpi$, cela revient à demander que f appartienne à l'image de π_* dans $Hom(B, N)$. La dernière assertion découle du diagramme (6). □

On déduit aisément de ce lemme que l'action de $Ext^1(B, A)$ sur $Extpan(M_2, M_1)$ est bien

- libre : soit $U \in \mathbf{Ext}(B, A)$ tel que les extensions panachées M et M_U soient isomorphes. En particulier, leurs classes dans $Ext(B, M_1)$ coïncident, donc il existe $f \in Hom(B, N)$ tel que $U = f^*(M_1)$ dans $Ext^1(B, A)$, et on conclut par le Lemme A.2.ii ;
- et transitive : soient M et M' deux extensions panachées. Leurs images dans $Ext^1(B, N)$ coïncident, donc il existe une 1-extension U' de B par A telle que M' et $M_{U'} = M + j_* U'$ soient liées par un $\mathbf{Ext}(B, M_1)$-isomorphisme Φ. Le $\mathbf{Ext}(B, N)$-automorphisme $\tilde{\Phi}$ de M_2 induit par Φ est de la forme $id_{M_2} + \iota \circ \phi \circ \varpi$, où $\phi \in Hom(B, N)$, et le Lemme A.2.i entraîne que M' est isomorphe dans $\mathbf{Extpan}(M_2, M_1)$ à M_U, où $U = U' + \phi^*(M_1) \in \mathbf{Ext}(B, A)$.

Remerciements: dans la version initiale de l'article, la catégorie $\mathbf{T}$ était supposée dès le départ tannakienne. Les conditions minimales de dualité qui permettent de définir ce qu'est une extension panachée autoduale (voir le début du §2) sont dues au referee, que je remercie pour ses nombreuses suggestions. Je remercie également J-M. Fontaine, qui m'a introduit à la notion d'extension panachée, ainsi que L. Breen, auquel j'ai emprunté la traduction anglaise (*blended extension*) de cette expression, et B. Kahn pour plusieurs discussions.

RÉFÉRENCES

BK. L. Barbieri-Viale, B. Kahn : *On the derived category of* 1*-motives* ; arXiv : math.AG 1009.1900 (voir aussi Prépubl. Math. IHÉS, M/07/22, Juin 2007).

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press

Be. C. Bertolin : *Le radical unipotent du groupe de Galois motivique d'un* 1*-motif* ; Math. Ann. **327** (2003), 585-607.

B1. D. Bertrand : *Relative splittings of one-motives* ; Contemp. Maths **210** (1998), 3–17

B2. D. Bertrand : *Unipotent radicals of differential Galois groups* ; Math. Ann. **321** (2001), 645–666.

B3. D. Bertrand : *Extensions panachées et dualité* ; Prépublications de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, No **287**, Avril 2001 (non publié).

B4. D. Bertrand : *Special points and Poincaré bi-extensions* ; with an *Appendix* by Bas Edixhoven ; arXiv : math.NT 1104.5178v1

Bo. A. Borel : *Linear algebraic groups* ; PSPM AMS, vol. **9** (1966), 3–19.

Br. L. Breen : *Biextensions alternées* ; Compo. Math. **63** (1987), 99–122.

By. J-L. Brylinski : 1*-motifs et formes automorphes* ; Publ. Math. Univ. Paris 7 **15** (1983), 43–106.

D. P. Deligne : *Théorie de Hodge III* ; Publ. Math. IHES **44** (1975), 5–77.

DM. P. Deligne, J. Milne : *Tannakian categories* ; Springer LN **900** (1982), 101–228.

G. A. Grothendieck : *Modèles de Néron et monodromie* ; SGA VII.1, no 9, Springer LN **288** (1968).

H. C. Hardouin : *Calcul du groupe de Galois différentiel du produit de trois opérateurs complètement réductibles* ; CRAS Paris **341** (2005), 349–352.

K. B. Kahn : *Représentations orthogonales et symplectiques sur un corps de caractéristique différente de* 2 ; Comm. in Algebra **31** (2003), 133–196.

M. J. Milne : *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles* ; "Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions", I, ; Perspect. Maths **10** (1990), 283–411. Academic Press.

RSZ. J-P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang : *Local analytic classification of* q*-difference equations* ; arXiv : math.AQ 0903.0853 (à paraître dans Astérisque).

R. K. Ribet : *Cohomological realization of a family of one-motives* ; J. Number Th. **25** (1987), 152–161.

Sh. G. Shimura : *Euler products and Eisenstein series* ; CBMS Regional Conference Series in Maths **93** (1997), AMS.

DANIEL BERTRAND bertrand@math.jussieu.fr

Institut de Mathématiques de Jussieu

Received: February 6, 2011

https://doi.org/10.1017/is013001030jkt213 Published online by Cambridge University Press