QUADRATISATION DE CERTAINES STRUCTURES DE POISSON

A. HARAKI

Résumé

On sait associer à certaines structures de Poisson sur $\mathbb{R}^n$, de 1-jet nul en 0, des actions de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, données par le 'rotationnel' de leur partie quadratique et un autre champ de vecteurs. Lorsque ces actions sont 'non résonantes' et 'hyperboliques', on montre que ces structures sont 'quadratisables', en ce sens qu'il existe des coordonnées dans lesquelles, elles sont quadratiques. Dans le cas de la dimension 3, nos résultats mènent à la 'non-dégénérescence' générique des structures de Poisson quadratiques à rotationnels inversibles.

Abstract

We can associate with some Poisson structures defined on $\mathbb{R}^n$ with a zero 1-jet at zero, actions from $\mathbb{R}^2$ on $\mathbb{R}^n$, given by the 'curl' of their quadratic part and another vector field. Assuming that those actions are 'hyperbolics' and without 'resonances', we give a normal form for those structures. On $\mathbb{R}^3$, we prove that every quadratic Poisson structure with invertible curl, is generically 'non degenerate'.

1. *Introduction*

Une *structure de Poisson* sur une variété différentiable V, est la donnée d'une application bilinéaire sur l'espace des fonctions différentiables sur V, notée $\{\,,\,\}:(f,g)\mapsto\{f,g\}$, et appelée *crochet de Poisson*; vérifiant, pour toutes fonctions f, g et h, les propriétés suivantes [**13**, **20**]:

$\{f,g\}=-\{g,f\}$ (antisymétrie),

$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$ (identité de Jacobi),

$\{fg,h\}=f\{g,h\}+\{f,h\}g$ (identité de Leibniz).

Une variété V munie d'une telle structure est appelée *variété de Poisson*.

En utilisant la dernière identité, on montre que la donnée d'une structure de Poisson $\{\,,\,\}$ est équivalente à celle d'un 2-vecteur Π, appelé 2-*tenseur de Poisson*, défini pour toutes fonctions f et g, par la relation: $\{f,g\}=\Pi(df\wedge dg)$. L'identité de Jacobi se traduit [**13**] alors par $[\Pi,\Pi]=0$, où $[\,,\,]$ est le crochet de Schouten [**15**, **17**] qui généralise le crochet habituel des champs de vecteurs.

Lorsque la variété V est de dimension finie n, on peut exprimer localement ces structures. En effet, si $(x_1,\dots,x_n)$ est un système de coordonnées locales de V, alors on a:

$$\{f,g\}=\sum_{i,j}\{x_i,x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\quad\text{et}\quad\Pi=\sum_{i<j}\Pi_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $\Pi_{ij}=\{x_i,x_j\}$ sont les composantes de Π, pour lesquelles, l'identité de Jacobi s'écrit:

$$\sum_l\left(\Pi_{il}\frac{\partial\Pi_{jk}}{\partial x_l}+\Pi_{jl}\frac{\partial\Pi_{ki}}{\partial x_l}+\Pi_{kl}\frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_l}\right)=0\quad\text{pous tous } i,j \text{ et } k.$$

Received 8 June 1994; revised 2 June 1995.

1991 *Mathematics Subject Classification* 58F05.

J. London Math. Soc. (2) 56 (1997) 384–394

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

Le théorème de décomposition locale [**20**] des structures de Poisson assure l'existence, au voisinage de tout point $x_0 \in V$, d'un système de coordonnées locales $(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, x_1, \dots, x_s)$, tel que:

$$\Pi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant s} \Pi_{ij}(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}$$

et où les $\Pi_{ij}(x_1, \dots, x_s)$ sont des fonctions nulles en x_0, et ne dépendant que des variables $x_1, \dots, x_s$.

Ainsi, toute structure de Poisson sur V se décompose localement dans le produit d'une structure symplectique par une structure de Poisson nulle en 0. L'étude locale des structures de Poisson se réduit par conséquent à l'étude dans un voisinage de 0, des structures nulles en 0. Nous pouvons alors écrire les développements de Taylor des crochets:

$$\{x_i, x_j\} = \sum_k c_{ij}^k x_k + \sum_{rs} c_{ij}^{rs} x_r x_s + \cdots \tag{1}$$

et s'intéresser au problème des formes normales de ces structures. Sommairement ceci consiste à chercher des systèmes de coordonnées locales dans lesquels les crochets de Poisson s'écrivent le 'plus simplement possible'.

Le premier problème de ce type est celui de la 'linéarisation' où l'on cherche des systèmes de coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans lesquels les crochets $\{x_i, x_j\}$ seraient réduits à leurs parties linéaires $\{x_i, x_j\}^{(1)} = \sum c_{ij}^k x_k$. On obtiendrait alors, des structures de Poisson intrinséquement définies sur l'espace tangent à V en 0, dites *linéaires* (c'est à dire, le crochet de deux formes linéaires est encore linéaire).

L'étude de ce problème a donné lieu à plusieurs résultats dont [**1**, **4**, **5**, **6**, **7**, **9**, **20**, **21**].

Dans le présent article, on s'intéresse plutôt à l'étape, suivante de 'quadratisation', où l'on considère des structures de Poisson Π dont le 1-jet est nul en 0 en ce sens qu'elles sont nulles en 0 et sans parties linéaires (c'est à dire, tous les c_{ij}^k de la formule (1) sont nuls). Puis on cherche des systèmes de coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans lesquels les crochets seraient réduits à leurs parties quadratiques $\{x_i, x_j\}^{(2)} = \sum_{rs} c_{ij}^{rs} x_r x_s$. On obtiendrait ainsi des structures de Poisson '*quadratiques*' notés $\Pi^{(2)}$ définies intrinséquement sur l'espace tangent à V en 0, et appelées *parties quadratiques* des structures initiales.

En fait, une *structure de Poisson quadratique* sur un espace vectoriel V de dimension finie, est la donnée d'un 2-tenseur de Poisson homogène de degré 2 (c'est à dire, les composantes de $\Pi^{(2)}$ dans un—et donc dans tous—système de coordonnées linéaires, sont des formes quadratiques). Ces structures apparaissent dans différentes situations de la physique mathématique [**12**, **18**, **19**].

A présent, rappelons la notion de 'rotationnel d'un p-vecteur', introduite dans [**8**]. Cette notion a permis un début d'étude des structures de Poisson quadratiques [**8**, **11**, **14**], et va nous être utile pour énoncer et prouver nos résultats.

Supposons que la variété V est munie d'une forme volume Ω. On sait que celle-ci induit, par contraction, des isomorphismes $\Omega^\flat : u \mapsto i_u \Omega$ de l'espace des p-vecteurs de V sur l'espace des (n-p)-formes de V. On note $\Omega^\sharp$ les isomorphismes réciproques, et on considère l'opérateur: $D_\Omega = \Omega^\sharp \circ d \circ \Omega^\flat$, où d désigne la différentiation.

On appelle alors, *rotationnel* (relativement à la forme volume Ω) d'un p-vecteur A, le (p-1)-vecteur $D_\Omega(A)$.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

REMARQUE 1.1. Le rotationnel $D_\Omega(\Pi)$ (relativement à une forme volume Ω) d'un 2-vecteur Π, est un champ de vecteurs à divergence nulle, en ce sens que son flot conserve la forme volume Ω.

LEMME 1.1 [**11**]. *Le crochet de Schouten s'exprime à partir de l'opérateur D_Ω à l'aide de la formule*:

$$[A, B] = (-1)^b D_\Omega(A \wedge B) - D_\Omega(A) \wedge B - (-1)^b A \wedge D_\Omega(B) \tag{2}$$

quels que soient le a-vecteur A et le b-vecteur B.

De sa définition et de la formule (2), on déduit que le rotationnel $D_\Omega(\Pi)$ (relativement à une forme volume Ω) d'un 2-tenseur de Poisson Π, est un isomorphisme infinitésimal de la structure, en ce sens que:

$$[D_\Omega(\Pi), \Pi] = 0. \tag{3}$$

De plus, à addition près d'un hamiltonien, ce rotationnel est indépendant de la forme volume choisie. Plus précisement, on a:

$$D_{f\Omega}(\Pi) = D_\Omega(\Pi) + X_{\ln|f|}, \tag{4}$$

où X_f désigne le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction f (c'est à dire, $X_f(g) = [\Pi, f](g)$).

Par ailleurs, la formule suivante traduit le comportement du rotationnel vis à vis des difféomorphismes ϕ:

$$D_{\phi^*\Omega}(\phi_* \Pi) = \phi_* D_\Omega(\Pi), \tag{5}$$

ou encore:

$$D_\Omega \mathscr{J}_{\phi^{-1}} \phi_*(\Pi) = \mathscr{J}_{\phi^{-1}} \phi_*(D_\Omega(\Pi)), \tag{5'}$$

où $\mathscr{J}_{\phi^{-1}}$ désigne la jacobienne de ϕ^{-1}.

Dans le cas quadratique, la formule (4) assure que le rotationnel relativement à une forme volume $\Omega \in \Lambda V$, à coefficients constants, d'une structure de Poisson quadratique, est un champ de vecteurs linéaire à trace nulle indépendant de Ω.

De plus, la formule (5) montre que tout isomorphisme linéaire ϕ qui échange deux structures de Poisson quadratiques Π_1 et Π_2 (c'est à dire $\phi_* \Pi_1 = \Pi_2$), conjugue forcément leur rotationnels (c'est à dire $\phi_* D(\Pi_1) = D(\Pi_2)$). Ainsi la forme de Jordan du rotationnel est un invariant pour la classification des structures de Poisson quadratiques à isomorphismes linéaires près.

LEMME 1.2. *La partie semi-simple S du rotationnel X d'une structure de Poisson quadratique* Π, *est un isomorphisme infinitésimal de la structure.*

Preuve. On note N la partie nilpotente du rotationnel, et on considère les opérateurs $\mathscr{S}$: $\Lambda \mapsto [S, \Lambda]$ et $\mathscr{N}$: $\Lambda \mapsto [N, \Lambda]$ définis sur l'espace des 2-vecteurs quadratiques sur V. L'idée de la preuve consiste à établir que $\mathrm{Ker}(\mathscr{S} + \mathscr{N}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{S}) \cap \mathrm{Ker}(\mathscr{N})$. Pour cela, on montre d'abord que $\mathscr{S}$ est semi-simple, $\mathscr{N}$ nilpotent et que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{N}$ commutent.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

(i) L'opérateur $\mathscr{S}$ est semi-simple, car dans la base $(\varepsilon_{ij}^{rs})_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{1\leqslant r<s\leqslant n}$, donnée par

$$\varepsilon_{ij}^{rs} = x_r x_s \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

on a $\mathscr{S}(\varepsilon_{ij}^{rs}) = (\lambda_i + \lambda_j - \lambda_r - \lambda_s)\,\varepsilon_{ij}^{rs}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S (c'est à dire, celles du rotationnel).

(ii) L'opérateur $\mathscr{N}$ est nilpotent. En effet, on se restreint (compte tenu de la bilinéarité du crochet) aux 2-vecteurs quadratiques de la forme $X \wedge Y$, où X et Y sont des champs de vecteurs linéaires, puis on vérifie que l'on a :

$$\mathscr{N}(X \wedge Y) = \mathscr{N}_1(X) \wedge Y + X \wedge \mathscr{N}_1(Y), \quad \text{où } \mathscr{N}_1(Z) = [N, Z],$$

quel que soit le champ de vecteurs linéaire Z. On en déduit que

$$\mathscr{N}^q(X \wedge Y) = \sum_{p=0}^{q} C_q^p \mathscr{N}_1^p(X) \wedge \mathscr{N}_1^{q-p}(Y),$$

où C_q^p est le coefficient binômial et $\mathscr{N}_1^p$ est la composition de $\mathscr{N}_1$ avec lui-même p fois. Or, quel que soit $r \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{N}_1^r(X) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s C_r^s N^{r-s} X N^s$, ce qui permet en utilisant la nilpotence de N et en choisissant q assez grand, d'avoir $\mathscr{N}^q(X \wedge Y) = 0$. D'où, $\mathscr{N}$ est nilpotent.

(iii) Les opérateurs $\mathscr{S}$ et $\mathscr{N}$ commutent. On vérifie ceci en se restreignant encore aux 2-vecteurs quadratiques de la forme $X \wedge Y$ où X et Y sont des champs de vecteurs linéaires, et en utilisant l'égalité (déduite de l'identité de Jacobi) $[N, [S, Z]] + [S, [Z, N]] = 0$ où Z est un champ de vecteurs.

En conséquence, il existe une base de l'espace des 2-vecteurs quadratiques, dans laquelle les opérateurs $\mathscr{S}$ et $\mathscr{N}$ s'écrivent sous leurs formes de Jordan. On en déduit alors, que $\mathrm{Ker}(\mathscr{S} + \mathscr{N}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{S}) \cap \mathrm{Ker}(\mathscr{N})$, ce qui mène au résultat compte tenu de la formule (3).

Tous ces résultats, permettent d'établir une stratégie de classification des structures de Poisson quadratiques à isomorphismes linéaires près, consistant à :

(1) choisir dans chaque classe d'équivalence de champ de vecteurs, un représentant $X = S + N$ à trace nulle, pris sous sa forme de Jordan, et ayant pour partie semi-simple S;
(2) chercher les 2-tenseurs Π tels que $[S, \Pi] = 0$, puis en garder ceux dont le rotationnel est X;
(3) simplifier les expressions des Π, à l'aide des isomorphismes linéaires qui conservent X, puis, traiter les identités $[X, \Pi] = 0$ et $[\Pi, \Pi] = 0$.

Dans le cas de la dimension trois, on a en plus le lemme suivant.

LEMME 1.3. *Soit* Π *un* 2*-tenseur dans* $\mathbb{R}^3$, *nul en* 0 *et de rotationnel* $D_\Omega(\Pi)$. *Alors*, Π *est un* 2*-tenseur de Poisson, si et seulement si l'une des deux identités suivantes est vérifiée* :

(i) $[D_\Omega(\Pi), \Pi] = 0$,
(ii) $D_\Omega(\Pi) \wedge \Pi = 0$.

Preuve. Si Π est un 2-tenseur de Poisson, alors $[D_\Omega(\Pi), \Pi] = 0$ (formule (3)).

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

Montrons à présent, que (i) implique (ii). Il existe au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^3$ des coordonnées locales (x_1, x_2, x_3) telles que $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ de telle sorte que $D_\Omega(\Pi) \wedge \Pi = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. D'autre part, l'hypothèse $[D_\Omega(\Pi), \Pi] = 0$, mène a $df = 0$. D'où f est localement constante. Comme $f(0) = 0$, il vient que $D_\Omega(\Pi) \wedge \Pi$ est localement nul. On en déduit que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^3$ tel que $(D_\Omega(\Pi) \wedge \Pi)(x) = 0\}$ est à la fois ouvert et fermé. Par connexité de $\mathbb{R}^3$, on a $E = \mathbb{R}^3$.

Enfin, on vérifie que la condition (ii) assure l'identité de Jacobi. En effet, en écrivant (2), et compte tenu de l'hypothèse et de $\Pi \wedge \Pi = 0$ (dimension trois), on a $[\Pi, \Pi] = D_\Omega(\Pi \wedge \Pi) - 2D_\Omega(\Pi) \wedge \Pi = 0$.

En utilisant ce lemme et la stratégie précédante, on obtient une classification complète des structures de Poisson quadratiques en dimension trois, et on met en évidence dans cette dimension deux 'catégories fréquentes' de structures de Poisson quadratiques:

celle correspondant à un rotationnel nul; les structures sont alors données par:

$$\{x, y\} = \frac{\partial(P)}{\partial z} \quad \{y, z\} = \frac{\partial(P)}{\partial x} \quad \{z, x\} = \frac{\partial(P)}{\partial y}$$

où P est un polynôme en x, y et z, homogène de degré 3;

celle correspondant à un rotationnel dont les valeurs propres sont 'les plus génériques possible'; les structures sont alors dites *diagonales* en ce sens qu'elles sont toutes isomorphes à des structures données par:

$$\{x, y\} = cxy \quad \{y, z\} = ayz \quad \{z, x\} = bzx \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

REMARQUE 1.2. Dans le paragraphe 4 on s'intéressera au problème de quadratisation des structures de Poisson de 1-jet nul en 0 et dont la partie quadratique est une structure de Poisson diagonale.

2. *Présentation des résultats*

On travaillera dans $V = \mathbb{R}^n$, muni de sa forme volume standard Ω, et on ne considèrera que des structures de Poisson à 1-jet nul en 0. Nous montrerons alors qu'une structure $\Pi = \Pi^{(2)} + \cdots$ telle que

$$D_\Omega(\Pi) \wedge \Pi = 0 \tag{6}$$

et dont la partie quadratique $\Pi^{(2)}$ admet un rotationnel $D(\Pi^{(2)})$ inversible, est génériquement quadratisable. Ceci nous permettera, dans le cas spécifique de la dimension 3, de déduire que génériquement une structure de Poisson quadratique $\Pi^{(2)}$ à rotationnel inversible est *non-dégénérée*, en ce sens que toute structure de Poisson $\Pi = \Pi^{(2)} + \cdots$ de partie quadratique $\Pi^{(2)}$ est isomorphe à $\Pi^{(2)}$ (c'est à dire, il existe un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi_* \Pi = \Pi^{(2)}$).

L'idée de preuve de ces résultats utilise essentiellement le fait qu'on peut associer à de telles structures des actions infinitésimales de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, qu'on linéarise via le théorème de M. Chaperon [**3**]. En fait, on procédera en trois étapes.

(1) D'abord, on associera à la partie quadratique $\Pi^{(2)}$ une action infinitésimale $\Psi^{(1)}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, donnée par le rotationnel et un autre champ de vecteurs linéaire $Y^{(1)}$.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

(2) Puis, en supposant que cette action est 'non-résonante' et 'hyperbolique', et en utilisant le théorème de M. Chaperon, on montrera que la structure de Poisson Π est quadratisable modulo une fonction différentiable f non nulle en 0.

(3) Enfin, on éliminera la fonction f en associant à Π une action infinitésimale Ψ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, de linéarisée $\Psi^{(1)}$. Pour ceci, on 'perturbera' les champs $D(\Pi^{(2)})$ et $Y^{(1)}$ et on utilisera les méthodes dues à R. Roussarie [**16**] de résolution des équations différentielles du type $A(g) = h$ où A est un champ de vecteurs, h et g respectivement une fonction donnée et une fonction à déterminer. Ainsi, on aboutit à la quadratisation de la structure de Poisson Π, en linéarisant l'action Ψ.

Dans cette dernière étape, on pourra éliminer la fonction f en utilisant l'outil classique de 'la méthode du chemin'.

Rapellons les notions de poids, de non-résonance, et d'hyperbolicité d'une action infinitésimale Ψ de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ qui commutent et qui sont nuls à l'origine. On note $\Psi^{(1)}$ l'action infinitésimale linéarisée de Ψ. C'est l'action infinitésimale donnée par les parties linéaires $X_1^{(1)}, \ldots, X_p^{(1)}$ des champs X_i.

On appelle *poids* de l'action Ψ toute forme linéaire P de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que:

$$\Psi_v^{(1)}(e) = P(v)\, e$$

quelque soit $v \in \mathbb{R}^p$ et pour au moins un vecteur non nul $e \in \mathbb{R}^n$.

En fait, il existe n poids $P_1, \ldots, P_n$, comptés avec leur multiplicité, définis pour tout j par:

$$\Psi_v^{(1)}(e_j) = P_j(v)\, e_j$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, qui 'triangularise' simultanément les matrices $A_1, \ldots, A_p$, associées aux champs de vecteurs linéaires $X_1^{(1)}, \ldots, X_p^{(1)}$.

On dira que l'action Ψ est *non-résonante* si et seulement si, les poids $P_1, \ldots, P_n$ sont *non-résonants*, en ce sens qu'ils ne vérifient aucune relation du type: $P_i = \sum_j n_j P_j$, où les n_j sont des entiers naturels de somme supérieure ou égale à 2.

On dira que l'action Ψ est *fortement hyperbolique* (respectivement *faiblement hyperbolique*) si et seulement si, les parties réelles des poids $P_1, \ldots P_n$ sont telles que q d'entre elles sont indépendantes quelque soit $q \leqslant p$ (respectivement l'enveloppe convexe de q d'entre elles ne contient pas 0 quelque soit $q \leqslant p$).

Remarquons au passage que l'hyperbolicité forte assure l'hyperbolicité faible.

THÉORÈME DE M. CHAPERON [**3**]. *Si une action infinitésimale Ψ de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$, donnée par p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ est non résonante et hyperbolique (fortement ou faiblement), alors, il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que*:

$$\varphi^*(\Psi) = \Psi^{(1)} \text{ où } \Psi^{(1)} \text{ est la linéarisée de } \Psi.$$

Autrement dit, et compte tenu du fait que $\Psi^{(1)}$ est donnée par les parties linéaires $X_1^{(1)}, \ldots, X_p^{(1)}$ des champs $X_1, \ldots, X_p$, on a pour tout $i \leqslant p$: $\varphi_* X_i = X_i^{(1)}$.

Dans le cas $p = 2$ et Ψ fortement hyperbolique, ce théorème est dû à F. Dumortier et R. Roussari [**10**].

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

3. *Quadratisation de certaines structures de Poisson*

Soit $\Pi = \Pi^{(2)} + \cdots$ une structure de Poisson sur $\mathbb{R}^n$, et X son rotationnel $D_\Omega(\Pi)$ relativement à la forme volume standard Ω. On suppose dorénavant que l'on a (6) et que le rotationnel $D(\Pi^{(2)})$, noté $X^{(1)}$, de la partie quadratique $\Pi^{(2)}$ est inversible (le champ $X^{(1)}$ étant identifié à la matrice associée). Alors on a le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Il existe un champ de vecteurs Y tel que*:

$$\Pi = X \wedge Y \quad et \quad \Pi^{(2)} = X^{(1)} \wedge Y^{(1)},$$

où $Y^{(1)}$ est la partie linéaire de Y. De plus,

$$[X, Y] = (D_\Omega(Y) - 1)\, X \quad et \quad [X^{(1)}, Y^{(1)}] = 0.$$

Preuve. Un calcul élémentaire utilisant le fait que les composantes de X forment un système de coordonnées locales, et tenant compte de (6), assure l'existence d'un champ de vecteurs Y tel que $\Pi = X \wedge Y$. On peut voir ce résultat comme étant un cas particulier du théorème de division de De Rham [**2**]. En effet, le champ de vecteurs $X^{(1)}$ étant inversible, le champ de vecteurs X est à singularité algébriquement isolée en $0 \in \mathbb{R}^n$ en ce sens que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}^n)/[X]$ est de dimension finie ($[X]$ étant l'idéal engendré par les germes en 0 des composantes de X). Or, dans $\mathbb{R}^n$ tout champ de vecteurs X à singularité algébriquement isolée en 0, possède la propriété de division c'est à dire que pour tout p-vecteur A où $p \in \{1, 2, \ldots, (n-1)\}$ tel que $X \wedge A = 0$, il existe un $(p-1)$-vecteur B tel que $A = X \wedge B$. Ainsi, on a le résultat en utilisant (6).

En vertu de (2) on a: $[X, Y] = (D_\Omega(Y) - 1)\, X$. En écrivant ces égalités pour les termes de plus bas degré, on obtient: $\Pi^{(2)} = X^{(1)} \wedge Y^{(1)}$. Et (2) mène à:

$$[X^{(1)}, Y^{(1)}] = X^{(1)} Y^{(1)} - Y^{(1)} X^{(1)} = \lambda X^{(1)},$$

où $\lambda = \mathrm{div}(Y^{(1)}) - 1$, et $\mathrm{div}(Y^{(1)})$ la divergence de $Y^{(1)}$.

On en déduit $Y^{(1)} - (X^{(1)})^{-1}\, Y^{(1)} X^{(1)} = \lambda I$, où I désigne le champ de vecteurs $\sum_i x_i (\partial/\partial x_i)$. En passant aux traces, on obtient la nullité de λ. D'où $[X^{(1)}, Y^{(1)}] = 0$.

Ce lemme permet d'associer à la partie quadratique $\Pi^{(2)}$ de la structure de Poisson Π, une action infinitésimale notée désormais $\Psi^{(1)}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, donnée par les champs de vecteurs $X^{(1)}$ et $Y^{(1)}$.

LEMME 3.2. *Si l'action $\Psi^{(1)}$ est non résonante et hyperbolique* (*faiblement ou fortement*), *alors, il existe un difféomorphisme ρ de $\mathbb{R}^n$, nul en* 0 *et tangent en l'identité tel que*:

$$\rho_* \Pi = f \Pi^{(2)},$$

où f est une fonction différentiable non nulle en 0.

Remarquons que pour une action de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, la propriété d'être non résonant et hyperbolique est 'générique' [**3**, **10**].

Preuve. Pour tous $a \in \mathbb{R}$, on pose:

$$\bar{X} = X \quad \text{et} \quad \bar{Y} = aX + Y,$$

de telle sorte que $\Pi = \bar{X} \wedge \bar{Y}$.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

Ainsi, pour un bon choix de la valeur de a, on peut supposer que la partie linéaire $\bar{Y}^{(1)} = aX^{(1)} + Y^{(1)}$ de $\bar{Y}$, ne vérifie aucune relation de résonance (c'est à dire, les valeurs propres γ_i de $\overline{Y^{(1)}}$ ne sont liées par aucune relation du type $\gamma_i = \sum_j n_j \gamma_j$ où les $n_j \in \mathbb{N}$ de somme supérieure ou égale à 2). Le théorème de S. Sternberg sur les formes normales des champs de vecteurs, assure qu'il existe un difféomorphisme ξ de $\mathbb{R}^n$, tangent à l'identité et tel que: $\xi_* \bar{Y} = \bar{Y}^{(1)}$. Ainsi, on a:

$$\xi_* \Pi = \xi_* \bar{X} \wedge \xi_* \bar{Y} = \xi_* D_\Omega(\Pi) \wedge \bar{Y}^{(1)} = D_{\xi_*\Omega}(\xi_* \Pi) \wedge \bar{Y}^{(1)}.$$

En notant $\mathscr{J}_{\xi^{-1}}$ la matrice jacobiene de ξ^{-1}, et en utilisant la formule (5′), il vient que:

$$\mathscr{J}_{\xi^{-1}} \xi_*(\Pi) = \mathscr{J}_{\xi^{-1}}(D_{\xi_*\Omega}(\xi_* \Pi)) \wedge \bar{Y}^{(1)} = D_\Omega(\mathscr{J}_{\xi^{-1}} \xi_*(\Pi)) \wedge \bar{Y}^{(1)} = Z \wedge \bar{Y}^{(1)},$$

où $Z = D_\Omega(\mathscr{J}_{\xi^{-1}} \xi_*(\Pi))$ est le rotationnel de $\mathscr{J}_{\xi^{-1}} \xi_*(\Pi)$, relativement à Ω. D'où l'égalité:

$$[Z, \bar{Y}^{(1)}] = \lambda Z \tag{7}$$

où $\lambda = \operatorname{div}(\bar{Y}^{(1)}) - 1$. Or ξ est tangent à l'identité, donc le champ de vecteurs Z admet $X^{(1)}$ comme partie linéaire. Par conséquent, l'égalité (7) écrite pour $X^{(1)}$ et $Y^{(1)}$ mène à la nullité de λ. D'où: $[Z, \bar{Y}^{(1)}] = 0$.

Ainsi, on peut associer à $\bar{\Pi}$, une action infinitésimale non résonante et hyperbolique $\bar{\Psi}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, donnée par les champs Z et $\bar{Y}^{(1)}$. Le théorème de M. Chaperon, permet l'existence d'un difféomorphisme φ tel que $\varphi_* \bar{Y}^{(1)} = \bar{Y}^{(1)}$ et $\varphi_* Z = X^{(1)}$. D'où:

$$\varphi_* \mathscr{J}_{\xi^{-1}} \xi_* \Pi = X^{(1)} \wedge \bar{Y}^{(1)}, \quad (\mathscr{J}_{\xi^{-1}} \circ \varphi)(\varphi_* \xi_* \Pi) = X^{(1)} \wedge \bar{Y}^{(1)},$$
$$\varphi(\varphi_* \xi_* \Pi) = \mathscr{J}_{\xi^{-1}}^{-1} X^{(1)} \wedge \bar{Y}^{(1)}, \quad \varphi(\varphi_* \xi_* \Pi) = \mathscr{J}_{\xi^{-1}}^{-1} X^{(1)} \wedge \bar{Y}^{(1)},$$
$$\varphi_* \xi_* \Pi = \varphi^{-1} \mathscr{J}_{\xi^{-1}}^{-1} \Pi^{(2)}.$$

La preuve s'achève en posant: $\rho = \varphi \circ \xi$ et $f = \varphi^{-1} \mathscr{J}_{\xi^{-1}}^{-1}$.

REMARQUE 3.1. En dimension 3, l'application $\sharp$ induit une bijection entre les structures de Poisson et les 1-formes intégrables. On peut alors déduire (dans cette dimension) le résultat du lemme 3.2 à partir de l'étude des 1-formes intégrables faites dans [**2**]. C'est cette stratégie qu'a utilisée B. Habch dans un travail non publié à ce jour.

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothéses du lemme* 3.2 *la structure de Poisson* Π, *est isomorphe à sa partie quadratique* $\Pi^{(2)}$.

Preuve. Le lemme 3.2 implique qu'il existe un difféomorphisme ρ tel que $\rho_* \Pi = f\Pi^{(2)}$, où f est une fonction différentiable non nulle à l'origine.

Quitte à remplacer $X^{(1)}$ et $Y^{(1)}$ par des combinaisons linéaires de $X^{(1)}$ et $Y^{(1)}$, à coefficients constants, on peut supposer que $X^{(1)}$ est non résonant et hyperbolique (c'est à dire, l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$, donnée par $X^{(1)}$ est non résonante et hyperbolique). On pose:

$$\tilde{X} = fX^{(1)} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = cX^{(1)} + Y^{(1)},$$

où c est une fonction différentiable.

Ainsi, on a:

$$\Pi = \tilde{X} \wedge \tilde{Y}, \quad \tilde{X}^{(1)} = f(0) X^{(1)} \quad \text{et} \quad \tilde{Y}^{(1)} = c(0) X^{(1)} + Y^{(1)},$$

où $\tilde{X}^{(1)}$ et $\tilde{Y}^{(1)}$ sont les parties linéaires respectivement de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

De plus, on peut choisir la fonction c de telle sorte que l'on ait: $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$. En effet, ayant:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = ((fX^{(1)}(c) - cX^{(1)}(f) - Y^{(1)}(f))\, X^{(1)} = ((1/f^2)\, X^{(1)}(c/f) - Y^{(1)}(f))\, X^{(1)},$$

il suffit de choisir $c = fg$, où g est une solution de l'équation différentielle:

$$X^{(1)}(c/f) = h \quad \text{avec } h = f^2 Y^{(1)}(f).$$

Cette solution existe [**16**], car $h(0) = 0$ et $X^{(1)}$ est supposé non résonant et hyperbolique.

Ainsi, on peut associer à la structure de Poisson Π une action infinitésimale Ψ, non résonante et hyperbolique, donnée par les deux champs de vecteurs $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$. Le théorème de M. Chaperon assure alors, l'existence d'un difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ tel que:

$$\tilde{\Phi}_* \tilde{X} = \tilde{X}^{(1)} \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_* \tilde{Y} = \tilde{Y}^{(1)}.$$

D'où:

$$\tilde{\Phi}_* \Pi = \tilde{X}^{(1)} \wedge \tilde{Y}^{(1)} = f(0)\, X^{(1)} \wedge (c(0)\, X^{(1)} + Y^{(1)}) = f(0)\, \Pi^{(2)}.$$

Ainsi, en utilisant (4) et le fait que la partie quadratique $\Pi^{(2)}$ de Π est conservée par $\tilde{\Phi}$, il vient que les champs de vecteurs $X^{(1)}$ et $f(0)\, X^{(1)}$ sont équivalents. D'où $f(0) = 1$ et $\tilde{\Phi}_* \Pi = f(0)\, \Pi^{(2)}$. Autrement dit, la structure de Poisson Π est quadratisable.

4. *Non-dégénérescence de certaines structures de Poisson quadratiques en dimension trois*

Compte tenu du lemma 1.3 l'hypothèse (6) est automatiquement vérifiée dans $\mathbb{R}^3$. D'où on a le théorème de non-dégénérescence suivant.

THÉORÈME 4.1. *Toute structure de Poisson quadratique sur $\mathbb{R}^3$, à rotationnel inversible, et donnant une action $\Psi^{(1)}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, non résonante et hyperbolique, est non-dégénérée.*

En appliquant ce résultat, on peut décider de la non-dégénéréscence des structures de Poisson quadratiques diagonales. En effet, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.1. *Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un système de coordonnées locales linéaires (x, y, z), on considère une structure de Poisson quadratique*

$$\Pi^{(2)} = cxy \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + ayz \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + bxz \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x},$$

(i) *si les coefficients a, b et c vérifient les deux conditions suivantes*:
(c_1) $(abc)(c-b)(a-c)(b-a) \neq 0$,
(c_2) *deux au moins des réels a, b et c sont rationnellement indépendants,*
alors $\Pi^{(2)}$ est non dégénérée;

(ii) *si l'un des coefficients $a\, b\, c$, est nul, et les deux autres notés $\bar{a}$, $\bar{b}$ vérifient les deux condition suivantes*:
(c_1) $\bar{a}\bar{b} < 0$,
(c_2) *$\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont rationnellement indépendants,*
alors $\Pi^{(2)}$ est non dégénérée.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

Preuve de (i). La condition (c_2) permet de supposer, par exemple, que les coefficients b et c sont rationnellement indépendants. La condition (c_1) implique que le rotationnel

$$X^{(1)} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial}{\partial z},$$

où $\alpha = c - b$, $\beta = a - c$ et $\gamma = b - a$, est inversible. D'autre part, le lemme 4.1 assure qu'il existe un champ de vecteurs linéaire $Y^{(1)}$ tel que $\Pi^{(2)} = X^{(1)} \wedge Y^{(1)}$, et $[X^{(1)}, Y^{(1)}] = 0$. Un calcul élémentaire permet de choisir

$$Y^{(1)} = \frac{1}{\alpha}\left(cy \frac{\partial}{\partial y} - bz \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

ceci étant possible car $\alpha \neq 0$. Ainsi, l'action infinitésimale $\Psi^{(1)}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$, donnée par $X^{(1)}$ et $Y^{(1)}$, admet pour poids $P_1 = (0, \alpha)$, $P_2 = (c/\alpha, \beta)$ et $P_3 = (-b/\alpha, \gamma)$, dont la non-résonance et la forte hyperbolicité sont assurées par les conditions c_1 et c_2.

En appliquant le théorème précédent, on a le résultat.

Preuve de (ii). On suppose $c = 0$ et on raisonne comme précédemment, en associant à $\Pi^{(2)}$ l'action infinitésimale $\Psi^{(1)}$ donnée par le rotationnel et le champ de vecteurs linéaire $Y^{(1)} = z\,\partial/\partial z$.

Comme dans la preuve précédente, on montre que les modèles de structures de Poisson quadratiques suivants:

1.	$\{x, y\} = b(x^2 + y^2)$,	$\{y, z\} = z(2bx - ay)$,	$\{z, x\} = z(ax + 2by)$ avec $a \neq 0$,
2.	$\{x, y\} = x^2$,	$\{y, z\} = 2zx - azy$,	$\{z, x\} = azx$ avec $a \neq 0$,
3.	$\{x, y\} = ax^2$,	$\{y, z\} = yz + (1 + 2a)\,xz$,	$\{z, x\} = -zx$ avec $a \neq -1/2$,
4.	$\{x, y\} = -1/2\,x^2$,	$\{y, z\} = byz$,	$\{z, x\} = -bxz$ avec $b \neq 0$,
5.	$\{x, y\} = a(x^2 + y^2)$.	$\{y, z\} = byz + (2a + c)\,xz$,	$\{z, x\} = (2a + c)\,yz - bzx$ avec $b \neq 0$,

sont tous non-dégénérés.

Références

1. V.-I. Arnol'd, *Geometrical methods in the theory of differential equations*, 2nd edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Springer, New York, 1988).
2. C. Camacho and A. Lins Neto, 'The topology of integrable differential forms near a singularity', *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 55 (1982) 5–55.
3. M. Chaperon, 'Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques', *Astérisque* 138–139 (1986).
4. J.-F. Conn, 'Normal forms for analytic Poisson structure', *Ann. of Math.* 119 (1984) 577–601.
5. J.-F. Conn, 'Normal forms for smooth Poisson structures', *Ann. of Math.* 121 (1985) 565–593.
6. J.-P. Dufour, 'Linéarisation de certaines structures de Poisson', *J. Differential Geom.* 32 (1990) 415–428.
7. J.-P. Dufour, 'Hyperbolic action of $\mathbb{R}^n$ on Poisson manifolds', Symplectic geometry groupoids, and integrable systems (Springer, New York, 1991) 137–150.
8. J.-P. Dufour and A. Haraki, 'Rotationnels et structures de Poisson quadratiques', *C.R. Acad. Sci. Paris Série* I *Math*, 312 (1991) 137–140.
9. J.-P. Dufour and J.-C. Molinier, 'Une nouvelle famille d'algèbes de Lie non-dégénérées', *Indag. Math.* (*N.S.*) 6 (1995) 67–82.
10. F. Dumortier and R. Roussarie, 'Smooth linearization of germs $\mathbb{R}^2$-actions and holomorphic vector fields', *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) 30 (1980) 31–64.
11. A. Haraki, 'Structures de Poisson quadratiques', Thèse de Doctorat, Université Montpellier II U.S.T.L. (1993).
12. L.-C. Li and S. Parmentier, 'A new class of quadratic Poisson structures and the Yang–Baxter equation', *C.R. Acad. Sci. Paris Série* I *Math.* 307 (1988) 279–281.

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press

13. A. Lichnerowicz, 'Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées', *J. Differential Geom.* 12 (1977) 253–300.
14. Z.-J. Liu and P. Xu, 'On quadratic Poisson structures', *Lett. Math. Phys.* 26 (1992) 33–42.
15. A. Nijenhuis, 'Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields, I', *Indag. Math.* 17 (1955) 390–406.
16. R. Roussarie, 'Modèles locaux de champs de formes', *Astérisque* 30 (1975).
17. J. A. Schouten, 'On the differential operators of first order in tensor calculus', *Convegno Int. Geom. Diff. Italia* (1953) (Romma, Cremonese, 1954) 1–7.
18. E. K. Sklyanin, 'Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation', *Functional Anal. Appl.* 16 (1982) 263–270.
19. E. K. Sklyanin, 'Some algebraic structures related to the Yang–Baxter equation, II: Representation of a quantum algebra', *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 17 (1983) 34–48.
20. A. Weinstein, 'The local structure of Poisson manifolds', *J. Differential Geom.* 18 (1983) 523–557.
21. A. Weinstein, 'Poisson geometry of the principal series and nonlinearizable structures', *J. Differential Geom.* 25 (1987) 55–73.

U.R.A. C.N.R.S. 1407 et G.D.R. 144
Mathématiques
Université Montpellier II
Place E. Bataillon
34095 Montpellier
Cedex 05
France

https://doi.org/10.1112/S0024610797005413 Published online by Cambridge University Press