Le paradoxe de Richard : une solution kolmogorovienne

ALAIN SÉGUY-DUCLOT *Université de Tours*

RÉSUMÉ : Après une étude du paradoxe de Richard, on considère plusieurs de ses solutions. On reformule ensuite le paradoxe grâce à la théorie de la complexité de Kolmogorov et on en donne une solution en partant de la démonstration par Chaitin du sens seulement relatif de la complexité de Kolmogorov.

ABSTRACT: In this article, I study Richard's paradox, and I consider several of its solutions. I then restate the paradox using Kolmogorov's theory of complexity. Taking as a starting point Chaitin's demonstration that Kolmogorov's understanding of «complexity» is only relative, I put forth a new solution to the paradox.

Le paradoxe de Richard

Parmi les grands paradoxes qui ont ébranlé la logique et la théorie des ensembles au début du XX^{e} siècle, le paradoxe proposé par Jules Richard en 1905 occupe une place centrale.

Considérons la structure de ce paradoxe. Soit l'ensemble des nombres réels; certains sont définissables en un nombre fini de mots. On peut, dans un premier temps, arithmétiser ces définitions en leur associant leur taille, à savoir le nombre de lettres qu'elles utilisent. Les définitions peuvent dès lors être ordonnées en fonction de leur taille. L'ensemble E qu'elles forment est dénombrable.

Il est alors possible, dans un deuxième temps, d'appliquer à E l'argument de la diagonale de Cantor, que l'on peut appeler C, et que Richard présente de la façon suivante :

***Dialogue* 54 (2015), 209–224.**
© Canadian Philosophical Association/Association canadienne de philosophie 2015
doi:10.1017/S0012217315000323

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

> Soit p, la $n^{\text{ième}}$ décimale du $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{\text{ième}}$ décimale $p + 1$, si p n'est égal ni à 8 ni à 9, et l'unité dans le cas contraire (Richard, 1992 [1905], p. 274).

On construit ainsi un nombre N qui n'appartient pas à cette liste ordonnée et donc n'appartient pas à E.

Dans un troisième et dernier temps, on remarque que la procédure de diagonalisation C, par laquelle nous avons pu construire N, vaut comme définition de N tout en étant de taille finie : C comporte un nombre fini de mots et donc de lettres. Par conséquent, N, qui a été construit en sorte de ne pas appartenir à E, appartient à E. On peut donc conclure sur une contradiction.

La solution de Poincaré

Richard réfute son propre paradoxe en expliquant que si N appartient à la liste, il occupe une certaine place G sur la liste. Mais à cette place, N est privé de sens puisqu'il suppose, pour être construit dans sa totalité, l'ensemble E achevé, or E n'est pas encore totalement achevé en G. Pour que N ait du sens, il faudrait pouvoir définir extensionnellement E, mais cela demanderait une infinité de mots et impliquerait donc la non-appartenance de N à la liste.

La solution donnée par Richard à son propre paradoxe est importante, car elle met Poincaré sur la voie d'une solution générale aux paradoxes logiques, solution qui va avoir une influence considérable sur les recherches qui seront entreprises pour surmonter ces paradoxes.

Cette solution est présentée dans son article «Les mathématiques et la logique» (Poincaré, 1986 [1906]). On peut décrire l'ensemble E comme l'ensemble de tous les nombres que l'on peut définir par un nombre de mots $< n$, n étant fini, mais à condition de ne pas introduire dans cette définition la notion de l'ensemble E lui-même; sinon, on a affaire à un cercle vicieux (*ibid.,* p. 93). Or, un tel cercle vicieux apparaît dans la construction par diagonalisation du nombre N, qui suppose pour sa construction la liste totale des éléments de E à laquelle il se révèle finalement devoir appartenir. Il faut donc rejeter non seulement le paradoxe de Richard, mais aussi le processus de diagonalisation de Cantor et donc sa théorie des transfinis non dénombrables, à laquelle pourtant Poincaré avait été dans un premier temps favorable[1].

[1] C'est ce rejet du non-dénombrable qui conduit Poincaré à faire porter tout le poids de la différence entre les mathématiques et la logique sur le principe d'induction complète qui permet de construire N et n'est utilisable que dans un cadre mathématique pré-cantorien. Il considère que ce principe est synthétique et *a priori*, et manifeste donc, contre l'ambition logiciste, l'irréductibilité des mathématiques à la logique (laquelle serait analytique *a priori*, conformément à la thèse de Russell). Mais si l'on n'admet pas un tel rejet, on retrouve l'objection adressée par Pieri à Poincaré, et rapportée par Poincaré lui-même : «lors même que le principe de

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

Or, cette solution de Poincaré peut être généralisée à l'ensemble des antinomies. Cela est évident dans le cas du paradoxe de Burali-Forti en 1897[2], puisque le paradoxe vient de ce que l'on systématise la démarche même de Cantor qui conduit aux cercles vicieux dénoncés par Poincaré. La même circularité peut être trouvée dans le paradoxe de Russell en 1902[3], puisqu'il suppose la possibilité de l'appartenance d'un ensemble à lui-même. Ainsi se trouve résolue la question des limites du lien entre définition et ensemble : toute définition ne peut produire un ensemble, seules les définitions prédicatives le peuvent. Or, une définition contenant un cercle vicieux n'est pas prédicative. Si un objet est défini par un ensemble auquel il appartient, sa définition modifie en retour l'ensemble sur lequel repose la définition et donc cette définition elle-même, etc., sans qu'il soit possible de stabiliser le processus sémantique.

Poincaré conclut son analyse en rejetant à la fois la logique formelle, qui reste stérile pour ne pas prendre en compte «l'intuition» — comprise

---

l'induction [complète] serait accepté parmi les axiomes logiques, nous ne saurions décider s'il s'agit d'une série dénombrable, c'est-à-dire susceptible de l'application du principe» (Poincaré, 1986 [1906], p. 86).

[2] Soit l'ensemble Ω de *tous* les ordinaux. On peut lui associer un ordinal. Mais il suffit de considérer {Ω} pour obtenir un nouvel ordinal plus élevé égal à Ω + 1. On peut donc également lui additionner des entiers, le multiplier ou l'élever à la puissance. Cela revient à définir de *nouveaux* ordinaux à partir de cet ordinal, alors qu'il est, *par définition*, l'ensemble de *tous* les ordinaux. Ce qui est contradictoire. Notons que Cantor, dans sa lettre à Dedekind du 28 juillet 1899, considère le paradoxe de Burali-Forti et l'écarte en estimant que la totalité des ordinaux Ω de même que la totalité des cardinaux ת (tav, dernière lettre de l'alphabet hébreu) ne sont pas des *ensembles* (*Menge*), mais des «*pluralités* [*Vielheiten*] *absolument infinies* ou *inconsistantes*» (Cantor, 1992, p. 209). Cette solution sera validée par l'introduction de l'axiome de séparation par Zermelo dans son axiomatisation de la théorie des ensembles (1986 [1908]). Selon cet axiome, aucune définition intentionnelle d'un ensemble ne peut être indépendante : elle doit toujours être séparée d'un ensemble déjà donné. Se trouve dès lors disqualifiée toute définition intentionnelle d'un ensemble qui n'opère pas par séparation, comme «l'ensemble de tous les ensembles», «l'ensemble de tous les ordinaux» ou «l'ensemble de tous les cardinaux».

[3] Soit l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Il n'y a que deux possibilités : il peut ou bien être élément de lui-même, ou bien ne pas être élément de lui-même. Mais chacune de ces deux voies conduit à une contradiction, ce qui nous inscrit dans une antinomie. En disqualifiant la notion d'*ensemble de tous les ensembles*, l'axiome de séparation de Zermelo permet de résoudre non seulement le paradoxe de Burali-Forti, mais aussi le paradoxe de Russell.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

dans un sens large, à la fois sensible et intellectuel[4] —, et le «Cantorisme», qui ne sauve la logique formelle de la stérilité que pour lui faire engendrer des antinomies[5].

Si Russell ne suit pas Poincaré dans son mépris de la logique formelle et son rejet du cantorisme, il reprend toutefois son explication des paradoxes par la présence de cercles vicieux. Ainsi dans les *Principia Mathematica* (1910-1913), écrits avec Alfred North Whitehead, Russell affirme que le paradoxe a son origine dans la circularité et l'autoréférence, qui engagent un non-respect de la hiérarchie stricte des types construite par Russell :

> Toutes ces contradictions (dont le nombre est tout à fait indéterminé) ont une caractéristique commune que nous pouvons appeler l'autoréférence, ou la réflexivité. [...] Ainsi toutes nos contradictions sont-elles des exemples de sophismes du cercle vicieux (Russell, 1989 [1910], p. 303).

Influence du paradoxe de Richard sur le premier théorème d'incomplétude de Gödel

Loin toutefois de suivre cet interdit russellien, la démonstration du premier théorème d'incomplétude (syntaxique) de Gödel (1967 [1931]) repose précisément sur l'autoréférence et la circularité. Bien plus, elle se construit selon trois moments principaux (1. arithmétisation; 2. diagonalisation; 3. mise au jour de la contradiction) qui sont analogues structurellement aux trois moments constitutifs du paradoxe de Richard :

> 1.1. Gödel arithmétise, grâce à un codage numérique, la syntaxe du système formel des *Principia Mathematica* en y injectant l'ensemble des nombres naturels de l'arithmétique de Peano. Il attribue ainsi un nombre entier, dit nombre de Gödel, à tout signe du système, et donc à toute formule (en tant que suite finie de signes) et à toute démonstration (en tant que suite finie de formules). Cette attribution est bijective : à toute suite finie de signes correspond un nombre de Gödel et un seul, et à tout nombre de Gödel correspond une suite finie et une seule. On peut donc ordonner numériquement l'ensemble des suites finies de signes au sein du système.
> 1.2. Opérer toutefois ici la diagonalisation ne servirait à rien, car on dégagerait un nombre qui ne serait pas un nombre de Gödel, ce qui ne serait en rien contradictoire, puisque tout nombre n'est pas un nombre de Gödel.

[4] Cela conduit Poincaré à ne retrouver Kant contre Russell qu'en apparence. En effet, Kant ne fait intervenir dans la connaissance que l'intuition sensible et non l'intuition intellectuelle. Poincaré, qui est un défenseur des géométries non euclidiennes et sait l'insuffisance de l'intuition sensible, ne peut admettre une telle restriction.

[5] Selon la formule férocement ironique de Poincaré : «La logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie» (Poincaré, 1986 [1906], p. 103).

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

Pour pouvoir générer la contradiction, il faut étendre l'arithmétisation aux propriétés métamathématiques. De fait, si les objets sur lesquels portent les propriétés métamathématiques sont des nombres, les propriétés métamathématiques peuvent être interprétées comme des relations numériques et donc[6] être arithmétisées.

2. En recourant à un procédé circulaire analogue à la diagonalisation[7], Gödel construit une propriété métamathématique de non-démontrabilité à partir d'une liste de propriétés arithmétiques, et par arithmétisation, la réintroduit dans cette liste. Ce faisant, il la transforme en un énoncé arithmétique qui affirme qu'il n'existe pas de nombre codant sa propre démonstration. Ce qui revient à produire un énoncé autoréférentiel A qui affirme sa propre non-démontrabilité au sein du système, sur le modèle autoréférentiel négatif des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes dans le paradoxe de Russell ou de la proposition qui affirme sa propre fausseté dans le paradoxe du Menteur[8].

3. Comme dans les paradoxes de Russell et du Menteur, deux voies sont à considérer : l'énoncé A est ou bien démontrable, ou bien réfutable (sa négation est démontrable) au sein du système. S'il est démontrable au sein du système, A est vrai; or, il affirme sa non-démontrabilité, donc il est non démontrable au sein du système, ce qui correspond à une contradiction. Cette voie est à exclure, car nous avons supposé que notre système est cohérent[9]. Reste la seconde voie : A est réfutable au sein du système. Mais cela implique de falsifier son contenu et d'affirmer qu'il est démontrable : on se retrouve à nouveau face à une contradiction, ce qui n'est pas davantage admissible, toujours en raison de notre hypothèse de cohérence. Par conséquent, on ne peut déduire des axiomes du système ni A, ni sa négation. En d'autres mots, A n'est ni démontrable, ni réfutable au sein du système.

Le raisonnement de Gödel, construit sur le modèle des paradoxes de Richard, de Russell et du Menteur, semble donc conduire à une aporie.

---

6 Ce «donc» recouvre en fait une étape cruciale de la démonstration : pour que les relations numériques puissent être arithmétisées, il faut montrer qu'elles sont des relations récursives, à savoir calculables. Les théorèmes VI et VII de l'article de Gödel de 1931 permettent d'opérer l'arithmétisation des fonctions récursives (voir Gödel, 1967 [1931]).

7 Voir Cassou-Noguès (2004, p. 179-180).

8 Le paradoxe du Menteur est attribué à Eubulide de Milet (né vers 400 av. J.-C.), qui a succédé à Euclide de Mégare à la tête de l'école socratique des mégariques. Sous sa forme renforcée, il affirme de lui-même sa propre fausseté, ce qui inscrit le locuteur dans un cercle logique : s'il dit vrai, il dit faux, et s'il dit faux, il dit vrai.

9 C'est-à-dire non contradictoire. En 1931, Gödel fait l'hypothèse d'une cohérence forte ou ω-cohérence. Mais J.-B. Rosser montre en 1936 qu'une hypothèse de cohérence simple suffit.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

Mais il n'en est rien, car le fait de n'être ni démontrable ni réfutable correspond à une propriété déterminée : l'*indécidabilité*[10]. La véritable conclusion du raisonnement de Gödel est donc la découverte que A est *indécidable* au sein du système[11]. Or, reconnaître une telle indécidabilité de A, et donc notamment sa non-démontrabilité, c'est reconnaître la vérité de A, puisqu'il affirme précisément ne pas être démontrable. Le vrai doit alors être distingué du démontrable.

Le premier théorème d'incomplétude de Gödel affirme ainsi que tout système consistant (non contradictoire), formalisé et finitaire (donc susceptible d'un traitement machinique), et englobant l'arithmétique élémentaire (dans laquelle s'expriment les raisonnements finitaires) admet des propositions à la fois vraies et *indécidables*.

Insuffisance de la solution donnée par Richard à son paradoxe

Toute circularité n'est donc pas à interdire. Non seulement, ce serait un prix trop coûteux pour les mathématiques, mais il n'est en rien nécessaire pour obtenir le résultat souhaité : éliminer les paradoxes, puisque la forme paradoxale rencontrée par Gödel est surmontée par sa distinction entre démontrabilité et vérité.

Une telle interdiction de toute circularité ressemble ainsi à une thérapie trop forte et mal ciblée qui, par ses effets secondaires, présente plus d'inconvénients

---

[10] La décidabilité dont il est ici question (négativement) est distincte de la décidabilité dont traitera Alan Turing. Une proposition est indécidable («axiomatiquement» ou «logiquement»), au sens de Gödel, si elle n'est ni démontrable, ni réfutable. Un système comportant des propositions indécidables est incomplet (syntaxiquement). L'indécidabilité «algorithmique» est une propriété métamathématique déterminant non une proposition mais un système d'axiomes. Ce dernier est dit indécidable («algorithmiquement») au sens de Turing s'il n'existe pas d'algorithme (de processus mécanique) permettant de dire si une proposition au sein de ce système est démontrable ou non. Ces deux notions d'indécidabilité, bien que distinctes, sont liées. Soit une théorie récursivement axiomatisable (dans laquelle une reconnaissance mécanique des axiomes est possible, comme dans l'arithmétique de Peano); si elle est complète syntaxiquement (elle n'admet pas de proposition indécidable), elle est alors décidable algorithmiquement, et inversement, si elle est indécidable algorithmiquement, elle est incomplète syntaxiquement (elle admet des propositions indécidables). Nous traiterons plus loin de l'indécidabilité algorithmique.

[11] En 1931, beaucoup n'ont pas saisi l'importance de ce résultat en jugeant que A est construit *pour* être indécidable, et que donc l'indécidabilité n'intervient que pour des énoncés très particuliers, un peu «monstrueux», et reste donc sans incidence réelle sur les mathématiques effectives. Mais dès 1934, Gödel découvre une formule arithmétique indécidable, qui s'écrit comme une suite de quantificateurs suivie d'un polynôme. La découverte de telles formules indécidables s'est multipliée depuis.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

que d'avantages : on liquide la maladie, certes, mais on risque aussi de liquider le malade avec... Plutôt que de rêver à une hypothétique solution unique pour tous les paradoxes, il semble préférable de les prendre un par un, dans leur différence, et de leur appliquer une thérapie ciblée.

Revenons ainsi sur le paradoxe de Richard, dont la solution par Richard avait inspiré à Poincaré son rejet de toute circularité. Rappelons la solution de Richard. Le nombre *N*, construit par diagonalisation de l'ensemble *E* des réels définissables en un nombre fini de mots — et donc en dehors de *E* — doit cependant appartenir à *E*, puisque la procédure de diagonalisation s'énonce en un nombre fini de mots. Mais à la place *G* qu'il occupe, *N* est privé de sens puisqu'il suppose l'ensemble *E* achevé, et que *E* n'est pas encore totalement achevé en *G*. Pour que *N* ait du sens, il faudrait pouvoir définir extensionnellement *E*, mais cela demanderait une infinité de mots.

Cette solution est-elle valide? On peut en douter. En effet, elle revient à montrer que si l'on place le nombre *N* sur la liste, il est privé de sens. Mais cela, on le savait déjà, puisque le processus même qui préside à sa construction, et qui est identifié à sa «définition», interdit qu'il soit sur la liste. Le placer sur la liste est impossible. La solution de Richard ne fait que vérifier cette impossibilité. Elle résout donc moins la contradiction qu'elle ne la développe.

La solution de Peano

Il convient donc de trouver une autre solution, plus satisfaisante, au paradoxe de Richard. Poincaré revient en 1909 sur le paradoxe de Richard pour lui apporter une solution nouvelle, centrée non plus sur la circularité — sans doute en raison des objections de Peano et de Zermelo —, mais sur l'impossibilité d'une classification stable des définitions dans un ensemble infini, où l'ajout de nouveaux termes peut conduire à donner du sens à des phrases qui auparavant n'en avaient pas (Poincaré, 1986 [1909], p. 238). Poincaré redéfinit ainsi la prédicativité par la stabilité de l'opération de classification, tout en précisant à juste titre que cette stabilité n'est que relative et dépend du mode de définition.

Ces considérations sur la relativité de toute sémantique vont clairement dans le bon sens. Elles ont toutefois pour défaut de travailler, à la suite de Richard, sur une notion floue, celle de *définition*, en sorte que l'on peut rejeter le paradoxe en invoquant, à la suite de Peano, l'ambiguïté de la notion de «définition» utilisée par Richard, provenant du langage ordinaire et non d'un langage mathématique et formalisable. D'où la conclusion célèbre de Peano : «L'exemple de Richard ne concerne pas la mathématique mais la linguistique» (Peano, 1986 [1906], p. 120). Le paradoxe aurait donc sa racine dans le flou sémantique qui entoure ce terme de «définition», et les mathématiciens épris de rigueur devraient en tirer pour leçon la nécessité d'écarter, autant que possible, les termes du langage ordinaire en mathématique.

Cette solution de Peano est, somme toute, celle que reprend Zermelo dans son article «Nouvelle démonstration de la possibilité du bon ordre» (Zermelo, 1992 [1908], p. 356). On peut la juger satisfaisante, mais elle reste imprécise

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

et seulement négative, car elle ne nous permet pas de comprendre ce que l'on entend par «définir un objet». On peut se demander ce qui se passerait si l'on était en mesure de donner à cette expression une formulation conforme aux «lois fondamentales du domaine», comme le demande Zermelo.

Une solution «tarskienne»

Une autre solution fréquemment citée permet ici d'apporter une réponse. Elle remet en cause non pas le flou de la notion de définition, mais le fait que, dans ce paradoxe, la distinction hiérarchique mise en place par Tarski entre langage-objet et métalangage ne serait pas parfaitement respectée.

Ainsi, la diagonalisation porte sur l'ensemble *E* des réels définissables en un nombre fini de mots. *N* peut donc être défini comme «le réel que l'on peut construire par diagonalisation de la liste des éléments de l'ensemble des réels définissables en moins de *n* mots». Dès lors, lorsque, dans le troisième et dernier moment de son analyse, Richard remarque que *N* est définissable en moins de *n* mots, cela revient à dire que «le réel que l'on peut construire par diagonalisation de la liste des éléments de l'ensemble des réels *définissables* en moins de *n* mots» est *définissable* en moins de *n* mots.

Il apparaît alors que les deux occurrences de «définissable», à *l'intérieur* ou à *l'extérieur* des guillemets, ne sont pas de même niveau. La première relève du langage-objet et la seconde du métalangage. Il suffit donc de maintenir leur distinction, en refusant de considérer qu'un terme du métalangage puisse appartenir au langage-objet, pour lever le paradoxe. Le paradoxe de Richard trouve alors une solution analogue à la solution proposée par Tarski au paradoxe du Menteur[12].

Cette solution semble opératoire, mais elle a pour conditions une hiérarchie stricte entre les niveaux de langage et le rejet de toute circularité et de toute autoréférence, sur le modèle de la solution du paradoxe de Richard dans la théorie des types de Russell :

> Quelle que soit la manière dont le type puisse être spécifié, «le plus petit ordinal qui n'est pas définissable au moyen de définitions de ce type» est une définition de type supérieur; et dans le paradoxe de Richard, quand nous nous limitons, ainsi qu'il le fait, aux nombres décimaux qui ont une définition d'un type donné, on s'aperçoit que le nombre *N*, qui est la source du paradoxe, reçoit une définition d'un type plus élevé, et donc ne tombe pas dans le domaine de nos définitions précédentes (Russell, 1989 [1910], p. 306).

Une telle solution ne paraît pas toutefois évidente. Elle implique notamment de toujours pouvoir déterminer à quel niveau de langage un énoncé se situe, ce qui semble difficile. Quant à l'interdiction de toute circularité en sémantique

[12] La détermination de la valeur de vérité d'un énoncé relève du métalangage et non du langage-objet. Or, le Menteur affirme sa propre fausseté dans le langage-objet, ce qui est inadéquat.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

entre langage et métalangage, on peut se demander s'il n'est pas possible de la contourner[13], tout comme l'interdiction analogue de circularité a été contournée en syntaxe par Gödel. D'autres voies paraissent possibles, qui peuvent peut-être se révéler plus fécondes.

Reformulation du paradoxe grâce à la théorie de la complexité de Kolmogorov

Si l'on choisit de ne pas suivre la voie tarskienne, il semble que l'on soit reconduit à la solution de Peano. Mais considérons plus attentivement cette notion de «définition» d'un nombre qui intervient dans le paradoxe de Richard.

On peut certes la rejeter en y voyant à la suite de Peano un concept linguistique flou. Le paradoxe est évité, mais l'intérêt de la solution est pauvre. La même approche — appliquée au dixième problème de Hilbert (1900), qui demande s'il existe «un procédé régulier» (*Verfahren*) permettant de distinguer par un nombre fini d'opérations si une équation diophantienne donnée est résoluble en nombres entiers — aurait conduit à rejeter ce problème en raison du caractère vague du terme «procédé régulier». Les logiciens ont préféré définir formellement ce terme[14], en comprenant le «procédé régulier» évoqué par Hilbert comme un algorithme, ce qui a permis à Youri Matiiassevitch d'apporter en 1970 une réponse négative, mais féconde, au problème de Hilbert.

Peut-on, de façon analogue, donner un sens plus rigoureux à la notion de «définition» d'un nombre, utilisée par Richard? On peut ici remarquer que le cœur de son analyse consiste à considérer que la procédure de diagonalisation de Cantor, par laquelle le nombre *N* est construit, correspond à une *définition* de *N*. Or, il est clair qu'une telle «définition» ne correspond pas à ce que l'on entend par «définition» en théorie du langage. Par «définition» d'un nombre, on peut ainsi légitimement supposer que Richard entend, sur un mode implicite et encore vague, la procédure algorithmique permettant de le construire. Telle est l'hypothèse que nous allons suivre afin de voir si elle nous permet d'apporter une solution plus féconde que celle de Peano au paradoxe de Richard.

Or, depuis la théorie de la complexité d'Andreï Kolmogorov (formulée en 1965), il est possible d'arithmétiser une telle procédure algorithmique. Un nombre, retranscrit en base 2, est assimilable à une suite binaire finie. Or, cette dernière peut présenter ou non des régularités. Elle est plus ou moins ordonnée et plus elle est ordonnée, plus le programme permettant de la construire est

---

13 Dans son article «Esquisse d'une théorie de la vérité» (Kripke, 2009 [1975]), Saul Kripke relativise les différences de niveaux de langage et admet un prédicat de vérité dans le langage-objet. Le prix à payer est l'abandon du principe de bivalence. Nous avons proposé récemment (A. Séguy-Duclot, 2014) une autre solution au paradoxe du Menteur, admettant de l'autoréférence et préservant le principe de bivalence (du moins pour la vérité objective).

14 Voir J. Dieudonné (1986, p. 232).

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

court. La *complexité* d'une suite, au sens de Kolmogorov est la taille *minimale* du programme permettant de générer cette suite. Cette complexité est maximale lorsqu'on ne repère aucune régularité dans la suite et qu'il est impossible de la compresser (de réduire la taille du programme permettant de la construire). Le seul programme permettant d'écrire la suite *S* est alors le programme «imprimer *S*», dont la taille est aussi longue que la suite elle-même. Une telle suite est dite *désordonnée* ou *aléatoire*[15].

On peut alors reformuler le paradoxe de Richard de la façon suivante. Soit *E* l'ensemble des nombres que l'on peut construire par une procédure algorithmique finie, ou encore l'ensemble des nombres non aléatoires. On peut dans un premier temps construire la suite ordonnable et dénombrable de ses éléments en fonction de leur complexité croissante.

Notons ici que la notion de complexité permet de lever une ambiguïté majeure non envisagée par Richard, à savoir la possibilité pour un nombre d'avoir plusieurs «définitions» de taille variable. La complexité d'une suite numérique correspond en effet à la taille *minimale* du programme permettant de la construire, laquelle est unique même si un très grand nombre de programmes sont possibles.

Dans un second temps, on construit, par la procédure de diagonalisation, un réel qui n'appartient pas à cette suite. Cela nous conduit au troisième et dernier temps : comme l'énoncé du programme de la construction de *N* est fini[16], il semble que nous puissions en déduire l'appartenance de *N* à l'ensemble *E*, ce qui nous reconduit à la contradiction repérée par Richard.

Insuffisance d'une solution de type Richard

Toutefois, comme le soupçonne Richard dans sa propre résolution du paradoxe, ce n'est pas parce que l'énoncé linguistique du programme de la construction de *N* est fini que *N* est pour autant non aléatoire et donc appartient à *E*. Le soutenir serait confondre le point de vue linguistique et le point de vue algorithmique[17]. Or, nous avons choisi de prendre la notion de «définition» au sens algorithmique. Suivant une telle approche algorithmique, le programme *complet* permettant de construire *N* fait intervenir la suite *D* qui s'écrit sur la diagonale.

---

[15] Au sens algorithmique. Sur la différence entre le désordre et l'aléatoire au sens algorithmique d'une part, et le désordre et l'aléatoire au sens statistique d'autre part, voir A. Séguy-Duclot (2013, p. 211-248).

[16] *L'énoncé de ce programme* est fini même s'il est d'une grande profondeur logique au sens de Charles Bennett, qui mesure le temps du calcul d'un programme et non sa taille, comme pour le calcul de la complexité de Kolmogorov. Si le nombre π peut être calculé à partir d'un programme court (par exemple, la formule de l'aire du cercle), le temps nécessaire au calcul est long puisque la suite des décimales ne peut être compressée. Voir Bennett (1988).

[17] Par exemple, le programme «imprimer *S*» est fini d'un point de vue linguistique, puisqu'il ne compte que deux mots, mais infini d'un point de vue algorithmique si *S* est une suite aléatoire infinie.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

Le paradoxe est-il résolu pour autant? Non, car ici, deux solutions se présentent : ou bien cette suite diagonale *D* est aléatoire, ou bien elle ne l'est pas. Lorsque Richard dit que la définition de *N* engagerait une définition infinie, il se place dans le premier cas, le plus favorable. La suite diagonale *D* étant aléatoire, le nombre *N*, correspondant à cette suite, est également un nombre aléatoire. Par conséquent, il n'appartient pas à *E* et le paradoxe est levé, sur le modèle de la solution initiale proposée par Richard en 1905.

En revanche, il est également possible que la suite diagonale *D* soit non aléatoire, et dans ce cas, le nombre *N* sera lui aussi non aléatoire. Dans ce cas de figure, *N* se trouve appartenir à *E* alors qu'il est construit en sorte de ne pas appartenir à *E*, et l'on retombe dans le paradoxe.

Une nouvelle solution

Du moins, il semble que l'on y retombe. Car nous pouvons imaginer ici une nouvelle solution à partir des résultats cruciaux de Gregory Chaitin (né en 1947) en théorie de la complexité algorithmique. Je vais présenter cette solution synthétiquement, sur un mode conceptuel.

Chaitin a montré — dans la continuité des travaux de Gödel et de Turing — qu'il n'est pas possible de dégager une méthode algorithmique générale permettant de mesurer la complexité de toute suite binaire finie. La détermination de la complexité de Kolmogorov en général est indécidable au sens algorithmique.

La notion de complexité de Kolmogorov ne peut donc avoir qu'un sens relatif et non absolu. Face à une suite qui nous semble incompressible et donc aléatoire, on ne peut jamais être absolument certain que l'on ne puisse découvrir un jour un algorithme permettant de la compresser.

Dès lors, l'ensemble *E* n'est pas *récursivement énumérable*[18]. On ne peut donc dresser mécaniquement la liste de ses éléments, et *a fortiori* lui appliquer le processus de diagonalisation.

Le paradoxe de Richard se trouve ainsi levé — du moins dans la reformulation que nous en avons donnée — sans que l'on ait eu besoin de mettre en place à la suite de Tarski une hiérarchie stricte entre les niveaux de langage sur le modèle de la théorie des types, ou de renoncer à la circularité en mathématiques, circularité qui intervient déjà dans le théorème de Gödel, lequel utilise le processus de diagonalisation de Cantor.

Le paradoxe de Berry

Il convient ici de compléter notre étude en notant que la réflexion qui a conduit Chaitin à son résultat d'indécidabilité algorithmique est partie d'une réflexion

[18] On appelle ensemble *récursivement* (ou mécaniquement) *énumérable* un ensemble pour lequel on possède un algorithme permettant d'en produire les éléments les uns après les autres.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

menée au début des années 1970 non pas sur le paradoxe de Richard, mais sur celui de Berry[19]. Ce paradoxe, suggéré par G. G. Berry, a été publié par Russell. En voici l'énoncé dans ses *Principia Mathematica* :

> Le nombre de syllabes dans les noms anglais des entiers finis tend à augmenter avec les entiers, et doit augmenter graduellement de manière indéfinie, puisque seul un nombre fini de noms peut être atteint au moyen d'un nombre fini donné de syllabes. Aussi les noms de certains entiers doivent comprendre au moins dix-neuf syllabes, et parmi ceux-ci, il doit y en avoir un plus petit. Donc «le plus petit entier qui ne peut être nommé en moins de dix-neuf syllabes» doit dénoter un entier déterminé; en fait, il dénote 111 777. Mais «le plus petit entier qui ne peut être nommé en moins de dix-neuf syllabes» est lui-même un nom composé de dix-huit syllabes[20]; aussi le plus petit entier qui ne peut être nommé en moins de dix-neuf syllabes peut l'être en dix-huit, ce qui est une contradiction (Russell, 1989 [1910], p. 302).

Il s'agit d'une version simplifiée du paradoxe de Richard qui ne fait plus appel à un ensemble infini. La question porte sur «le plus petit entier qui ne peut être nommé en moins de dix-neuf syllabes». Le paradoxe est que cette phrase définit cet entier en moins de dix-neuf syllabes. Ce qui est paradoxal.

La solution de Russell repose comme d'habitude sur le rejet de toute circularité, imposé par sa théorie des types :

> Le paradoxe portant sur «le plus petit entier qui soit nommable en moins de dix-neuf syllabes» enveloppe, ainsi qu'on s'en aperçoit au premier coup d'œil, un cercle vicieux. Car le mot «nommable» se réfère à la totalité des noms, et cependant on lui permet de figurer dans ce qui prétend être l'un des noms. Aussi ne peut-il y avoir rien de tel que la totalité des noms, au sens où «noms» figure dans le paradoxe. Il est aisé de voir que, en vertu de la hiérarchie des fonctions, la théorie des types rend une totalité de «noms» impossible. [...] en aucun moment il n'est possible de donner un sens au mot «nommable» sans spécifier l'ordre des noms que l'on emploie; et n'importe quel nom dans lequel figure l'expression «nommable par des noms d'ordre *n*» est nécessairement d'un ordre plus élevé que *n*. Donc le paradoxe s'évanouit (Russell, 1989 [1910], p. 305-306).

Là encore, on peut juger une telle solution, même si elle est efficace, trop brutale et trop coûteuse théoriquement.

---

19 Je précise ici que je suis arrivé à la solution précédemment proposée du paradoxe de Richard avant d'avoir pris connaissance de la solution proposée par Chaitin au paradoxe de Berry.

20 En anglais.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

La résolution par Chaitin du paradoxe de Berry

Pour traiter ce paradoxe, Chaitin suit une voie totalement différente[21], inspirée par le premier théorème d'incomplétude de Gödel. Son premier souci est d'éviter la critique de Peano, et donc de quitter le plan linguistique pour un plan calculable. Plutôt que de considérer un locuteur du langage ordinaire, il considère donc un ordinateur, plus précisément une machine de Turing universelle standard.

Or, on peut déterminer rigoureusement ce que signifie *définir* (*specifie*) un nombre entier positif sur une telle machine. Un programme est dit définir un nombre entier positif si, lorsqu'on le fait tourner, il imprime au bout d'un temps fini ce nombre, qu'il écrit *Stop* et qu'il s'arrête. On n'a donc plus affaire à un texte du langage ordinaire dont on mesurerait le nombre de mots ou de syllabes, mais à un programme d'ordinateur que l'on mesure à partir de l'unité d'information, le bit[22].

La formulation du paradoxe peut donc être modifiée. La question porte désormais sur «le premier entier positif qui ne peut être défini sur une machine de Turing universelle par un programme en moins d'un million de bits». Par souci de simplicité, écrivons «définir$_{MUT}$» pour «définir sur une machine de Turing universelle», et *N* bits pour «un million de bits». On s'interroge donc désormais sur : «le premier entier positif qui ne peut être défini$_{MUT}$ par un programme en moins de *N* bits».

Pour pouvoir échapper au paradoxe de Berry comme Gödel a échappé au paradoxe du Menteur, il convient d'opérer une nouvelle modification, analogue à celle opérée par Gödel dans son premier théorème d'incomplétude lorsqu'il substitue la non-démontrabilité à la fausseté. Soit le terme «démontrer$_{SAF}$», qui signifie «démontrer dans un système axiomatique formalisé». La question à étudier porte désormais sur «le premier entier positif dont on peut démontrer$_{SAF}$ qu'il a la propriété de ne pouvoir être défini$_{MTU}$ par un programme en moins de *N* bits».

Or, pour calculer ce nombre, il faut élaborer un programme qui fait trois opérations successives :

1. passer en revue toutes les preuves possibles dans un système axiomatique formalisé, par ordre de taille;
2. appliquer un algorithme de test sur toutes ces preuves pour éliminer celles qui ne sont pas valides;
3. chercher la première preuve qu'un entier positif requiert au moins un programme de *N* bits.

---

21 Je suis ici la présentation donnée par Chaitin dans son article «The Berry paradox» (Chaitin, 1995).

22 Un bit correspond à la quantité d'information obtenue dans une réponse à une question par oui (1) ou par non (0).

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

La taille de ce programme ne dépend que de celle de ses deux composantes : un algorithme de test, qui est long de t_{SAF} bits, et le nombre N qui est long de $\log_2 N$ bits. Le nombre total de bits du programme permettant de calculer le nombre que l'on recherche est donc : $\log_2 N + t_{SAF}$. Or, $\log_2 N + t_{SAF}$ est beaucoup plus petit que N pour un N suffisamment grand (Chaitin, 1995, p. 28). Cela est contradictoire, puisque ce nombre est défini comme ne pouvant être construit par un programme de moins de N bits. Qualifions un programme d'«élégant» s'il n'existe pas de programme plus court parvenant au même résultat. Le résultat de Chaitin revient à dire que l'on ne peut prouver qu'un programme est élégant.

Comme un nombre entier positif équivaut à une suite binaire finie, et comme, pour une telle suite, «pouvoir être défini$_{MTU}$ par un programme en moins de N bits» équivaut, en théorie de la complexité, à «avoir une complexité inférieure à N», on peut tirer du résultat de Chaitin qu'il n'existe pas de méthode algorithmique générale permettant de calculer la complexité d'une suite binaire finie.

Soyons attentifs au fait que le résultat obtenu par Chaitin *n'est plus un paradoxe*, tout comme le Menteur, une fois que Gödel a substitué la non-démontrabilité à la fausseté, n'est plus un paradoxe. Il correspond à la découverte positive d'une nouvelle forme d'indécidabilité mathématique, donc d'une nouvelle limite des systèmes axiomatiques formalisés.

La solution du paradoxe de Richard que nous avons proposée engage l'indécidabilité de la complexité algorithmique et repose donc en fin de compte sur la résolution par Chaitin du paradoxe de Berry. Son sens ne conduit pas à éliminer toute circularité en mathématique pour préserver l'intégrité de l'édifice mathématique contre les antinomies, mais au contraire à s'appuyer sur l'irréductibilité de la circularité pour découvrir — contre le modèle rationaliste et dans la continuité des travaux de Gödel — de nouveaux phénomènes positifs d'indécidabilité en mathématiques, lesquels n'ont fait que se multiplier durant la seconde moitié du XX^{e} siècle[23]. Une telle multiplication correspond non pas à un appauvrissement, mais à un enrichissement des mathématiques.

[23] On a ainsi montré que la théorie des équations diophantiennes est indécidable, que la théorie générale des groupes est indécidable, ou encore que le problème du mot en combinatoire est indécidable, etc. Précisons également qu'il y a des théories décidables, comme la théorie du premier ordre des algèbres de Boole ou la théorie du premier ordre de la géométrie euclidienne.

Références bibliographiques

Bennett, Charles

1988 «Logical Depht and Physical Complexity», dans *The Universal Turing Machine: a Half-Century Survey*, Oxford, Oxford University Press, p. 227–259.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

Bonnay, Denis et Mikaël Cozic, dir.
2009 *Philosophie de la logique. Logique, preuve, vérité*, Paris, Vrin.
Cantor, Georg
1992 «Lettre à Dedekind du 28 juillet 1899», trad. M. Fichant, dans F. Rivenc et P. de Rouilhan, dir., *Logique et fondements des mathématiques (1850–1914)*, Paris, Payot, p. 208–213.
Cassou-Noguès, Pierre
2004 *Gödel*, Paris, Les Belles Lettres.
Chaitin, Gregory
1995 «The Berry Paradox», *Complexity*, vol. 1, nº 1, p. 26–35.
Dieudonné, Jean, dir.
1986 *Abrégé d'histoire des mathématiques* [1978], Paris, Hermann.
Gödel, Kurt
1967 «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I» [1931], *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, p. 173–98. Trad. anglaise : «On Formally Undecidable Sentences of Principia Mathematica and Related Systems I», trad. J. van Heijenoort, dans *From Frege to Gödel*, Harvard, Harvard University Press, p. 596–616.
Heinzmann, Gérard, éd.
1986 *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Paris, Albert Blanchard.
Hilbert, David
1902 «Sur les problèmes futurs des mathématiques» [trad. française avec modifications et additions de «Mathematische Problem», *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, Heft 3, 1900, p. 253–297], dans E. Duporcq, *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Paris, Gauthier-Villars, p. 58–114.
Kolmogorov, Andreï N.
1965 «Three Approaches to the Quantitative Definition of Information», *Problems of Information Transmission*, vol. 1, nº 1, p. 1–7.
Kripke, Saul
2009 «Esquisse d'une théorie de la vérité» [«Outline of a Theory of Truth», *The Journal of Philosophy*, vol. 72, nº 19, 1975, p. 690–716], trad. S. Bozon, dans D. Bonnay et M. Cozic, dir., *Philosophie de la logique. Logique, preuve, vérité*, Paris, Vrin, p. 336–376.
Peano, Giuseppe
1986 «Additione» [*Revista de mathematica*, vol. 8, 1906, p. 143–157], dans G. Heinzmann, éd., *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Paris, Albert Blanchard, p. 106–120.
Poincaré, Henri
1986 «Les mathématiques et la logique», [*Revue de métaphysique et de morale*, vol. 14, 1906, p. 294–317], dans G. Heinzmann, éd., *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Paris, Albert Blanchard, p. 79–104.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press

Poincaré, Henri
1986 «La logique de l'infini» [*Revue de métaphysique et de morale*, vol. 17, 1909, p. 461–482], dans G. Heinzmann, éd., *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Paris, Albert Blanchard, p. 235–256.

Richard, Jules
1992 «Les principes des mathématiques et le problème des ensembles» [*Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, 1905, p. 541], dans F. Rivenc et P. de Rouilhan, dir., *Logique et fondements des mathématiques (1850–1914)*, Paris, Payot, p. 274–275.

Rivenc, François et Philippe de Rouilhan, dir.
1992 *Logique et fondements des mathématiques (1850–1914)*, Paris, Payot.

Rosser, John Barkley
1936 «Extensions of Some Theorems of Gödel and Church», *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, p. 87–91.

Russell, Bertrand et Alfred North Whitehead
1989 *Principia Mathematica*, 3 vols [1910-1913], trad. partielle J.-M. Roy, dans B. Russell, *Écrits de logique philosophique*, Paris, Presses universitaires de France, p. 219–334.

Séguy-Duclot, Alain
2013 *La réalité physique*, Paris, Hermann.

Séguy-Duclot, Alain
2014 «Nouvelle solution pragmatique du paradoxe du Menteur», *Dialogue. Revue canadienne de philosophie*, vol. 53, nº 4, p. 671–690.

van Heijenoort, Jean, éd.
1967 *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*, Harvard, Harvard University Press.

Zermelo, Ernst
1986 «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I» [*Mathematische Annalen*, vol. 65, 1908, p. 261–281], dans G. Heinzmann, éd., *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Paris, Albert Blanchard, p. 179–199. Trad. anglaise : «Investigations in the Foundations of Set Theory I», trad. Stefan Bauer-Mengelberg, dans Jean van Heijenoort, éd., *From Frege to Gödel*, Harvard, Harvard University Press, 1967, p. 199–215.

Zermelo, Ernst
1992 «Nouvelle démonstration de la possibilité du bon ordre», [«Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung», *Mathematische Annalen*, vol. 65, 1908, p. 107–128], trad. F. Longy, dans F. Rivenc et P. de Rouilhan, dir., *Logique et fondements des mathématiques (1850–1914)*, Paris, Payot, p. 342–366.

https://doi.org/10.1017/S0012217315000323 Published online by Cambridge University Press