Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2000), **20**, 1735–1748
Printed in the United Kingdom © *2000 Cambridge University Press*

Variations d'entropies et déformations de structures conformes plates sur les variétés hyperboliques compactes

JULIEN MAUBON

Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zentrum, 8092 Zurich, Switzerland

(*Received* 7 *December* 1998 *and accepted in revised form* 22 *July* 1999)

Abstract. We study the link between variations of entropy on a compact hyperbolic manifold M and infinitesimal flat conformal deformations of M. We remark that the entropy of the Liouville measure increases in the direction of these deformations. We then explain a new construction of infinitesimal flat conformal deformations by bending along totally geodesic hypersurfaces of M which allows us to extend a theorem of L. Flaminio.

1. *Introduction*

Soit M une variété compacte de dimension n. Etant donnée une métrique riemannienne g sur M, on note S_gM le fibré unitaire tangent de M et ξ_g le flot géodésique sur S_gM. Il y a deux mesures privilégiées sur S_gM invariantes par ξ_g : la mesure de Bowen-Margulis, qui est la mesure d'entropie maximale et qui donne l'entropie topologique $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g)$ de (M, g), et la mesure de Liouville, qui vient de la structure de contact sur S_gM et qui donne l'entropie métrique $\mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}(g)$ de (M, g).

En réponse à une conjecture de Gromov [**5**], Besson *et al* [**2**] ont démontré que si (M, g) est une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative constante, alors le minimum de l'entropie topologique sur l'espace des métriques sur M de même volume que g ne peut être atteint que par des métriques isométriques à g. D'autre part, on sait que l'entropie topologique et l'entropie métrique coïncident sur une variété localement symétrique de courbure négative. Katok [**8**] a conjecturé que cette propriété caractérisait les métriques localement symétriques parmi les métriques de courbure sectionnelle négative.

Notons $\mathcal{M}$ l'espace des métriques riemanniennes sur M. On considère les fonctions

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}} : g \in \mathcal{M} \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g),$$
$$\mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}} : g \in \mathcal{M} \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}(g).$$

Si l'on se restreint à l'espace des métriques de courbure sectionnelle négative sur M, ces fonctions sont C^∞ et les métriques localement symétriques en sont des points critiques. Flaminio [**4**] a montré le résultat suivant, qui répond partiellement à la conjecture de Katok.

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 1.1. [**4**] *Soit g une métrique de courbure sectionnelle négative constante sur une variété compacte M, et soit g_t une courbe de métriques de volume constant telle que $g_0 = g$. Alors, si g_t n'est pas tangente à l'orbite de g sous le groupe des difféomorphismes de M, les fonctions*

$$t \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t) - \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}(g_t),$$
$$t \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t)$$

sont strictement convexes en $t = 0$. En particulier, le long du chemin g_t et pour des t petits, l'égalité $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t) = \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}(g_t)$ implique $g_t = g$ et on a $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t) > \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g)$ pour $t \neq 0$.

Par contre, les métriques localement symétriques ne sont pas des extrema locaux de l'entropie métrique, comme le prouve un autre théorème de Flaminio :

THÉORÈME 1.2. [**4**] *Il existe une variété hyperbolique (M, g) de dimension 3 pour laquelle la différentielle seconde de $\mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ en g n'est pas de signe constant.*

La démonstration de ces théorèmes repose sur le calcul explicite des dérivées secondes des fonctions $t \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t)$ et $t \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}(g_t)$ en fonction du 2-tenseur symétrique $h = (\partial g_t/\partial t)|_{t=0}$. Ces calculs montrent que sur une variété hyperbolique compacte M de dimension n, l'existence de tenseurs symétriques dans la direction desquels la dérivée seconde de l'entropie métrique est positive (il y a toujours une infinité de directions suivant lesquelles elle est négative) équivaut au fait que le laplacien brut de M agissant sur l'espace $\Gamma(S^2M)$ des 2-tenseurs symétriques admette des valeurs propres appartenant à l'intervalle $[n, 2n[$.

Flaminio conclut la démonstration du Théorème 1.2 en prouvant, par des arguments de théorie des représentations, qu'il existe un réseau cocompact Γ de $SO(3, 1)$ tel que ce laplacien brut sur $\Gamma\backslash SO(3, 1)/SO(3)$ ait du spectre dans $]3, 6[$. On peut penser qu'une étude précise du support de la mesure de Plancherel pour les représentations de $SO(n, 1)$ permettrait de généraliser cette démonstration en dimension quelconque. Nous proposons ici une approche différente, plus géométrique, du problème des variations de l'entropie métrique qui conduit à une preuve du Théorème 1.2 en toute dimension. Elle consiste à exhiber des exemples explicites de variétés hyperboliques compactes M de dimension $n \geq 3$ sur lesquelles n est valeur propre du laplacien brut. Nous obtenons en plus des renseignements sur la dimension du sous-espace propre correspondant. Les Théorèmes 3.6, 3.11 et la §4 montrent par exemple que :

THÉORÈME 1.3. *Pour tous entiers n et m, $n \geq 3$, il existe une variété hyperbolique compacte de dimension n pour laquelle la différentielle seconde de l'entropie métrique est définie positive sur un sous-espace de dimension m de $\Gamma(S^2M)$.*

Comme l'a montré Lafontaine [**12**], si h est un tenseur propre du laplacien brut sur M associé à la valeur propre n, h est une déformation infinitésimale de la structure conforme plate de M. Les structures conformes plates sont un appauvrissement naturel des structures hyperboliques et contrairement à ces dernières (théorème de Mostow) elles peuvent parfois être déformées. A certains égards, c'est suivant ces déformations que l'on s'éloigne le moins de la structure hyperbolique. Nous verrons en effet que c'est dans les directions des

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

déformations conformes plates infinitésimales, si elles existent, que sont minimisées les variations des fonctions $t \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t) - \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}(g_t)$ et $t \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g_t)$.

(M, g) désignera dorénavant une variété hyperbolique compacte de dimension $n \geq 3$. Par commodité, nous supposerons sans le mentionner que M est orientable. Dans un premier temps, nous rappellerons les résultats de Flaminio et de Lafontaine qui permettent de voir que les déformations conformes plates infinitésimales de g sont tangentes à des chemins de métriques le long desquels l'entropie métrique augmente. Nous nous intéresserons ensuite aux déformations infinitésimales provenant de la présence éventuelle d'une hypersurface totalement géodésique dans M. Ces déformations, appelées pliages, ont été étudiées dans des cadres différents par de nombreux auteurs (voir, par exemple, Johnson et Millson [**7**], Kourouniotis [**11**]). Nous donnerons une construction nouvelle de ces déformations qui a l'avantage de s'étendre facilement au cas où M contient plusieurs hypersurfaces qui s'intersectent. Cette construction nous permettra de retrouver ou d'établir des minorations de la dimension de l'espace des déformations conformes plates infinitésimales pour différentes configurations d'hypersurfaces dans M. Pour finir, nous exposerons quelques exemples de variétés hyperboliques compactes qui admettent de telles déformations.

Il faut remarquer que Lafontaine [**12**] a lui aussi décrit une déformation infinitésimale liée à une hypersurface totalement géodésique. Mais, comme il nous l'a expliqué, il n'est pas encore prouvé que ce tenseur propre est non-nul.

2. *Entropie et déformations conformes plates*

Soit donc (M, g) une variété hyperbolique compacte de dimension $n \geq 3$, ∇ la connexion de Levi-Civita de g, δ la divergence, ∇^* et δ^* leurs adjoints. Si $T \in \Gamma(S^2M)$ est un 2-tenseur symétrique sur M, on définit un champ de formes quadratiques $T^\vee$ sur le fibré en sphère $S_gM = \{X \in TM \text{ tq } g(X, X) = 1\}$ par $T^\vee(X) = T(X, X)$.

Considérons un chemin de métriques g_t, $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, de volume constant, tel que $g_0 = g$ et notons h le 2-tenseur symétrique $(\partial g_t/\partial t)|_{t=0}$. Les dérivées secondes en g des fonctions $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}$, $\mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}$, $\mathrm{h}_{\mathrm{top}} - \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}$ le long du chemin g_t sont données par la proposition suivante, due à Flaminio :

PROPOSITION 2.1. [**4**] *En notant k le tenseur $k(h) = -\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}\nabla^*\nabla h + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g\, h)g - \frac{1}{2}\delta^*\delta h$, on a*

$$\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) = \mathrm{Cov}\left(k^\vee, \frac{n-1}{2}h^\vee\right),$$
$$\mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g) = -\mathrm{Cov}\left(k^\vee, k^\vee - \frac{n-1}{2}h^\vee\right),$$
$$\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) - \mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g) = \mathrm{Cov}(k^\vee, k^\vee),$$

où Cov *désigne la covariance du flot géodésique ξ_g sur S_gM par rapport à la mesure d'entropie maximale (ici la mesure de Liouville car g est localement symétrique) (cf. [**4**]).*

Soit d^∇ l'opérateur sur les 2-tenseurs symétriques donné par $d^\nabla T(X, Y, Z) = \nabla_X T(Y, Z) - \nabla_Y T(X, Z)$, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$; et soit $d^{\nabla *}$ son adjoint. Comme M est

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

hyperbolique, on a (cf. [**1**]) :

$$(d^{\nabla *}d^{\nabla} + d^{\nabla}d^{\nabla *})T = \nabla^*\nabla T - nT, \quad \forall T \in \Gamma(S^2M)\,\mathrm{tq}\,\mathrm{tr}_g\, T = \delta T = 0.$$

Le membre de gauche est positif et par conséquent, le spectre de $\nabla^*\nabla$ sur ce sous-espace est inclus dans $[n, +\infty[$. En utilisant cet argument, Flaminio montre que sous les hypothèses du Théorème 1.1,

$$\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) \geq \tfrac{1}{4}C_{n-1}^2\,\mathrm{Cov}(h^\vee, h^\vee),$$

$$\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) - \mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g) \geq \frac{(n-2)^2}{4}\,\mathrm{Cov}(h^\vee, h^\vee).$$

On a toujours $\mathrm{Cov}(h, h) \geq 0$ et, d'après un théorème de Guillemin et Kazhdan [**6**], $\mathrm{Cov}\,(h^\vee, h^\vee) = 0$ implique que la courbe g_t est tangente à l'orbite de g sous le groupe des difféomorphismes de M. On a donc $\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) > 0$ et $\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) - \mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g) > 0$. Le Théorème 1.1 est démontré.

Notons $\mathrm{Teich}(g) \subset \Gamma(S^2M)$ l'espace des 2-tenseurs symétriques de trace et de divergence nulles. $\mathrm{Teich}(g)$ est l'orthogonal dans $\Gamma(S^2M)$ de l'espace $\mathrm{Im}\,\delta^* + C^\infty(M)g$ et est appelé espace des déformations conformes essentielles de g [**12**]. Soit $h = (\partial g_t/\partial t)|_{t=0}$ appartenant à $\mathrm{Teich}(g)$ un tenseur propre du laplacien brut $\nabla^*\nabla$ associé à la valeur propre $\lambda \geq n$. $k(h) = \frac{1}{4}(\lambda-2)h$ et donc $\mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g) = -\frac{1}{16}(\lambda-2)(\lambda-2n)\,\mathrm{Cov}(h^\vee, h^\vee)$. Le spectre du laplacien brut est discret : il existe une infinité de valeurs propre de $\nabla^*\nabla$ supérieures à $2n$ et donc un sous-espace de dimension infinie de $\mathrm{Teich}(g)$ dans la direction duquel l'entropie métrique décroît localement. Par conséquent, comme le remarque Flaminio, il suffit pour prouver le Théorème 1.2 de trouver une variété hyperbolique (M, g) et un 2-tenseur symétrique h appartenant à $\mathrm{Teich}(g)$ tel que $\nabla^*\nabla h = \lambda h$ avec $\lambda \in [n, 2n[$, car dans ce cas la dérivée seconde en $t = 0$ de l'entropie métrique le long du chemin $(g+th)_{t\in]-\epsilon,\epsilon[}$ est strictement positive.

Supposons qu'il existe $h \in \mathrm{Teich}(g)$ tel que $\nabla^*\nabla h = nh$. Un calcul immédiat montre que si g_t est une courbe de métriques tangente en $t = 0$ à un tel tenseur, alors

$$\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) = \tfrac{1}{4}C_{n-1}^2\,\mathrm{Cov}(h^\vee, h^\vee),$$

$$\mathrm{h}''_{\mathrm{top}}(g) - \mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g) = \frac{(n-2)^2}{4}\,\mathrm{Cov}(h^\vee, h^\vee),$$

le long de g_t. Ainsi, parmi les chemins analytiques de métriques de volume égal à celui de g et non-tangents à l'orbite de g sous le groupe des difféomorphismes, c'est suivant ceux qui sont tangents au sous-espace $\mathrm{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\mathrm{Id})$ que, localement, les fonctions $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}$ et $\mathrm{h}_{\mathrm{top}} - \mathrm{h}_{\mathrm{Liouv}}$ varient le moins.

Lafontaine [**12**] donne une autre interprétation du sous-espace $\mathrm{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\mathrm{Id})$ qui aide à comprendre cette dernière remarque. La variété (M, g) est hyperbolique et donc a fortiori localement conformément plate, c'est-à-dire que si $S(g) = \mathrm{Ric}(g) - [2(n-1)]^{-1}\,\mathrm{Scal}(g)g$ et $W(g)$ désignent les tenseurs de courbure de Schouten-Ricci et de Weyl de g, on a soit $d^\nabla(S(g)) = 0$ si $n = 3$, soit $W(g) = 0$ si $n \geq 4$. Une déformation essentielle de la structure conforme plate de (M, g) est un chemin de métriques g_t tel que $g_0 = g$, $(\partial g_t/\partial t)|_{t=0} \in \mathrm{Teich}(g)$ et

$$\begin{cases} \forall t, d^{\nabla_t}(S(g_t)) = 0 & \text{si } n = 3 \\ \forall t, W(g_t) = 0 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

(∇_t est la connexion de Levi-Civita de g_t). Les déformations infinitésimales essentielles de la structure conforme plate de (M, g), c'est-à-dire les 2-tenseurs symétriques potentiellement tangents à une déformation conforme plate essentielle, sont les tenseurs $h \in \text{Teich}(g)$ tels que $(d^\nabla S)'(h) = 0$ si $n = 3$ et $W'(h) = 0$ si $n \geq 4$ (on a noté $(d^\nabla S)'(h)$ et $W'(h)$ les linéarisés des opérateurs $d^\nabla S$ et W dans la direction de h). Lafontaine [**12**] a montré que l'espace des déformations infinitésimales essentielles est en fait précisément $\text{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\text{Id})$. La structure conforme plate étant un appauvrissement naturel de la structure hyperbolique, les courbes tangentes à $\text{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\text{Id})$ restent, en un sens, assez proches de g. C'est ce que nous avons constaté au niveau des variations des fonctions h_{top} et $\text{h}_{\text{top}} - \text{h}_{\text{Liouv}}$.

Sous certaines hypothèses sur la variété hyperbolique compacte (M, g), nous allons construire dans la §3 des 2-tenseurs h appartenant à $\text{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\text{Id})$. Dans la §4, enfin, nous donnerons des exemples de variétés qui satisfont à ces hypothèses, ce qui concluera la preuve du Théorème 1.2.

3. *Pliages le long d'hypersurfaces totalement géodésiques*

Cette section est consacrée à la construction de déformations infinitésimales de la structure conforme plate de (M, g), c'est-à-dire de tenseurs $h \in \text{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\text{Id})$, associées à la présence d'hypersurfaces totalement géodésiques dans M. Nous effectuons cette construction dans un cadre cohomologique que nous mettons maintenant en place.

LEMME 3.1. [**12**] *Sur une variété hyperbolique compacte* (M, g), $\text{Teich}(g) \cap \ker(\nabla^*\nabla - n\,\text{Id}) = \{h \in \Gamma(S^2M) \,\text{tq}\, \text{tr}_g\, h = d^\nabla h = 0\}$.

Par abus de notation, si U est un ouvert de M, nous notons encore d^∇ l'opérateur différentiel qui envoie $f \in C^\infty(U)$ sur $\nabla df - fg \in \Gamma(S^2U)$. On vérifie facilement que $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$ sur $C^\infty(U)$. On peut donc définir les espaces de cohomologie

$$H^0_\nabla(U) = \{f \in C^\infty(U) \,\text{tq}\, d^\nabla f = \nabla df - fg = 0\},$$
$$H^1_\nabla(U) = \{h \in \Gamma(S^2U) \,\text{tq}\, d^\nabla h = 0\}/d^\nabla(C^\infty(U)).$$

LEMME 3.2. $H^1_\nabla(M) = \{h \in \Gamma(S^2M) \,\text{tq}\, \text{tr}_g\, h = d^\nabla h = 0\}$.

Preuve. Soit h tel que $\text{tr}_g\, h = 0$ et $d^\nabla h = 0$. Supposons qu'il existe $f \in C^\infty(M)$ telle que $h = d^\nabla f = \nabla df - fg$. Alors $-\text{tr}_g(\nabla df - fg) = 0$, i.e. $\Delta f + nf = 0$. Comme M est compacte, ceci implique que $f = 0$ et donc $\{h \in \Gamma(S^2M) \,\text{tq}\, \text{tr}_g\, h = d^\nabla h = 0\}$ est inclu dans $H^1_\nabla(M)$.

Considérons maintenant un 2-tenseur h tel que $d^\nabla h = 0$ et montrons qu'il existe un représentant de la classe de h dans $H^1_\nabla(M)$ qui appartient à $\{h \in \Gamma(S^2M) \,\text{tq}\, \text{tr}_g\, h = d^\nabla h = 0\}$. L'opérateur $\Delta + n\,\text{Id}$ à toutes ses valeurs propres strictement positives et est donc inversible : il existe $u \in C^\infty(M)$ telle que $\Delta u + nu = \text{tr}_g\, h$. Soit alors $\tilde{h} = h + d^\nabla u$. $\tilde{h}$ et h sont cohomologues et $\text{tr}_g\, \tilde{h} = \text{tr}_g\, h - \Delta u - nu = 0$. □

Ainsi, une déformation infinitésimale de la structure conforme plate de (M, g) peut se voir comme une classe de cohomologie dans $H^1_\nabla(M)$.

Soit $\mathbb{H}^n$ l'espace hyperbolique de dimension n. $\mathbb{H}^n$ est le revêtement universel de M. Dans le modèle de l'hyperboloïde à deux nappes, $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in$

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

$\mathbb{R}^{n+1}$ tq $q(x,x) = -1$ et $x_{n+1} > 0\}$, où q est la forme quadratique $x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous notons encore ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique hyperbolique q sur $\mathbb{H}^n$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{H}^n$ et $f \in C^\infty(U)$. On a $d^\nabla f = 0$ sur U si et seulement si f est la restriction à U d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Preuve. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si f est une forme linéaire, on a bien $d^\nabla f = 0$.

Supposons maintenant que $f \in C^\infty(M)$ soit telle que $d^\nabla f = 0$. Soit Ξ le gradient de f, i.e. le champs de vecteur sur U tel que $\forall X \in TU$, $df(X) = q(\Xi, X)$. Un calcul rapide montre que $\nabla df(X,Y) - fg(X,Y) = q(\nabla_X \Xi - f(x)X, Y)$, quels que soient $X, Y \in T_x U$. Ainsi,

$$d^\nabla f = 0 \Rightarrow \nabla_X \Xi - f(x)X = 0.$$

Comme $\nabla_X \Xi - f(x)X = X.(\Xi - f(x)x)$, $\Xi - f(x)x$ est constant sur U. Notons ζ ce vecteur : pour $x \in U$, $q(\zeta, x) = q(\Xi - f(x)x, x) = -f(x)q(x,x) = f(x)$. f est bien la restriction à U d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$. □

3.1. *Le cas de plusieurs hypersurfaces disjointes.* Pour commencer, nous allons supposer que la variété hyperbolique compacte (M, g) contient une hypersurface totalement géodésique S plongée (comme sous-variété compacte de M). On suppose de plus que S est à deux faces, c'est-à-dire telle que son fibré normal est trivial. Nous cherchons à déduire l'existence d'un élément non nul de $H^1_\nabla(M)$ de la présence de cette hypersurface.

Soit $m \in S$. Notons $SO_0(n,1)$ la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de la forme quadratique q. $\pi_1(S,m)$ agit sur $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ (l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^{n+1}$) via la représentation naturelle de $\pi_1(M,m)$ dans $SO_0(n,1)$ et on a le lemme suivant :

LEMME 3.4. *Il existe une unique droite de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ invariante par $\pi_1(S,m)$.*

Preuve. Soit p la projection de $\mathbb{H}^n$ sur M, $\tilde{m} \in p^{-1}(m)$ et $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^n$ le relevé de S passant par $\tilde{m}$. Il existe un vecteur unitaire $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\tilde{S}$ soit l'intersection de $\mathbb{H}^n$ avec l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $q(v,x) = 0\}$. $\pi_1(S,m)$ est inclus dans le stabilisateur H de $\tilde{S}$ dans $SO_0(n,1)$ et donc la forme $\varphi : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto q(v,x)$ est invariante par $\pi_1(S,m)$. A multiplication par une constante près, c'est la seule. En effet, comme S est compacte, $\pi_1(S,m)$ est Zariski-dense dans $H \simeq SO_0(n-1,1)$ et $SO_0(n-1,1)$ n'admet qu'une droite invariante dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. □

Soit W un voisinage tubulaire de S dans M : la forme linéaire φ donnée dans la démonstration précédente passe au quotient en une fonction $\overline{\varphi} \in C^\infty(W)$, non nulle, telle que $d^\nabla \overline{\varphi} = 0$ d'apres le Lemme 3.3, c'est-à-dire en un élément de $H^0_\nabla(W)$. Nous voulons obtenir un élément de $H^1_\nabla(M)$ à partir de $\overline{\varphi}$. L'outil approprié est la suite exacte de Mayer-Vietoris.

Supposons pour l'instant que S sépare M en deux composantes connexes M^+ et M^-. Soient $U = M^+ \cup W$ et $V = M^- \cup W$. Remarquons que, puisque M est compacte,

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

$H^0_\nabla(M) = 0$. En effet, $d^\nabla f = 0$ implique, en prenant la trace, que $\Delta f + nf = 0$ et donc que $f = 0$. La suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement $\{U, V\}$ de M est donc :

$$0 \longrightarrow H^0_\nabla(U) \oplus H^0_\nabla(V) \longrightarrow H^0_\nabla(W) \longrightarrow H^1_\nabla(M) \longrightarrow \cdots .$$

Il nous suffit maintenant de montrer que l'homomorphisme cobord $H^0_\nabla(W) \to H^1_\nabla(M)$ envoie $\overline{\varphi}$ sur une classe de cohomologie non triviale de $H^1_\nabla(M)$. Nous allons en fait démontrer qu'il est injectif, c'est-à-dire que $H^0_\nabla(U) \oplus H^0_\nabla(V) = 0$.

LEMME 3.5. *Si (N, g) est une variété hyperbolique compacte de dimension supérieure ou égale à 2 à bord totalement géodésique alors $H^0_\nabla(N) = 0$. Par conséquent, le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte à bord totalement géodésique de dimension $n \geq 2$ n'a pas d'invariant non nul dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$.*

Preuve. Soit $f \in C^\infty(N)$ telle que $d^\nabla f = \nabla df - fg = 0$. En prenant la trace par rapport à g, on obtient $\Delta f + nf = 0$. Soit B une composante du bord de N. Notons ∇^B et Δ^B la connexion de Levi-Civita et le laplacien de la métrique induite sur B par g. Comme B est totalement géodésique, on a $\nabla^B = \nabla$ et par conséquent,

$$\begin{aligned} \nabla df - fg = 0 \text{ sur } N &\Rightarrow \nabla^B df - fg = 0 \text{ sur } B \\ &\Rightarrow \Delta^B f + (n-1) f = 0 \text{ sur } B \\ &\Rightarrow f = 0 \text{ sur } B \ (B \text{ est compacte}). \end{aligned}$$

Ainsi, une fonction $f \in C^\infty(N)$ telle que $d^\nabla f = 0$ est solution de l'équation $\Delta f + nf = 0$ avec condition de Dirichlet au bord. N est compacte : elle est nulle. □

Soit $f \in H^0_\nabla(U)$ et soient $\tilde{U} = p^{-1}(U)$ et $\tilde{f} = f \circ p : \tilde{U} \subset \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$. $d^\nabla \tilde{f} = 0$ sur $\tilde{U}$ et donc $\tilde{f}$ est la restriction d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$, invariante par $\pi_1(U, m)$. Mais U se rétracte par déformation sur $M^+ \cup S$ qui est une variété hyperbolique compacte de dimension n à bord S totalement géodésique. D'après le Lemme 3.5, $\pi_1(U, m)$ ne peut avoir d'invariant non nul dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$: $\tilde{f} = 0$ et $f = 0$. Ainsi, $H^0_\nabla(U) = 0$ et, de même, $H^0_\nabla(V) = 0$. L'homomorphisme cobord est injectif et l'image h de $\overline{\varphi}$ est non nulle.

Si $M \setminus S$ est connexe, alors il faut choisir les ouverts U et V différemment. S est une hypersurface à deux faces : on peut choisir W difféomorphe à $S \times]-1, 1[$. Soit W', W^+ et W^- les ouverts correspondant respectivement à $S \times]-1/2, 1/2[$, $S \times]0, 1[$ et $S \times]-1, 0[$ sous cette identification. On définit alors $U = (M \setminus \overline{W^-}) \cup W'$ et $V = (M \setminus \overline{W^+}) \cup W'$. On a alors $U \cap V = W' \cup (M \setminus \overline{W})$ et la suite de Mayer-Vietoris est dans ce cas

$$0 \longrightarrow H^0_\nabla(U) \oplus H^0_\nabla(V) \longrightarrow H^0_\nabla(W') \oplus H^0_\nabla(M \setminus \overline{W}) \longrightarrow H^1_\nabla(M) \longrightarrow \cdots .$$

Mais U, V et $M \setminus \overline{W}$ ont même type d'homotopie que $S \cup (M \setminus S) \cup S$ (les deux copies de S ne sont pas identifiées). D'après le Lemme 3.5, on obtient encore que l'image h de $(\overline{\varphi}, 0) \in H^0_\nabla(W') \oplus H^0_\nabla(M \setminus \overline{W})$ est un élément non nul de $H^1_\nabla(M)$.

Le fait que M contienne une hypersurface totalement géodésique plongée à deux faces implique donc qu'il existe une déformation infinitésimale essentielle de la structure conforme plate de (M, g), appelée déformation infinitésimale par pliage le long de S. Notons que son support est par construction inclus dans un voisinage tubulaire de S.

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

Il est facile de vérifier que si M contient m hypersurfaces disjointes $S_1, \ldots, S_k$, totalement géodésiques plongées à deux faces, alors les combinaisons linéaires des déformations par pliages le long des S_i sont encore des déformations infinitésimales non-triviales. Nous avons prouvé :

THÉORÈME 3.6. *Soit (M, g) une variété hyperbolique compacte de dimension $n \geq 3$ contenant m hypersurfaces disjointes totalement géodésiques plongées à deux faces. Alors il existe un sous-espace de dimension m de $\Gamma(S^2M)$ constitué de déformations infinitésimales essentielles de la structure conforme plate de (M, g). En particulier, $\mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g)$ est strictement positive dans la direction d'un sous-espace de $\Gamma(S^2M)$ de dimension au moins m.*

3.2. *Le cas de plusieurs hypersurfaces qui s'intersectent.* Si M contient plusieurs hypersurfaces totalement géodésiques qui s'intersectent, il est toujours possible de produire des déformations infinitésimales comme dans la §3.1, et on peut espérer minorer la dimension de l'espace des déformations infinitésimales par le nombre d'hypersurfaces. Dans cette section, nous allons considérer une configuration particulière d'hypersurfaces dans M, lui adapter les méthodes des sections précédentes et nous verrons qu'en fait, dans ce cas, il peut exister strictement plus de déformations infinitésimales que d'hypersurfaces.

La configuration que nous étudions est la suivante : on suppose que M contient k demi-hypersurfaces ($k \geq 3$) totalement géodésiques plongées (comme sous-variétés compactes à bord) qui s'intersectent suivant leur bord commun T, sous-variété (totalement géodésique) connexe de codimension 2. On appelle ces demi-hypersurfaces $S_0, \ldots, S_{k-1}$. On fait l'hypothèse que les $S_j \backslash T$, $0 \leq j \leq k-1$, sont des hypersurfaces à deux faces. L'union de deux demi-hypersurfaces peut être totalement géodésique et cette configuration généralise donc le cas où plusieurs hypersurfaces totalement géodésiques plongées s'intersectent suivant une variété de codimension 2. On suppose de plus que le fibré normal NT de T est trivial.

Nous allons partir, exactement comme dans le cas d'une seule hypersurface sans bord, de la seule chose que l'on sache *a priori* :

LEMME 3.7. *Soit $m \in T$. Pour tout i appartenant à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, il existe une unique droite de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ invariante par l'action de $\pi_1(S_i, m)$.*

La démonstration de ce lemme est identique à celle du Lemme 3.4, une fois remarqué que, puisque T est totalement géodésique, le Lemme 3.5 implique que $\pi_1(S_i, m)$ est Zariski-dense dans $SO_0(n-1, 1)$. Soit $\tilde{S}_i$ le relevé de S_i dans $\mathbb{H}^n$ passant par $\tilde{m} \in p^{-1}(m)$. Quitte à renuméroter, on peut supposer les vecteurs v_i normaux aux $\tilde{S}_i$ ordonnés dans le sens trigonométrique (le fibré normal au relevé de T dans $\mathbb{H}^n$ est de dimension 2). Les droites invariantes sont engendrées par les formes linéaires $\varphi_i = q(v_i, .)$.

Il nous faut généraliser les arguments de la section précédente pour construire des déformations infinitésimales à partir de ces formes linéaires : nous allons définir un recouvrement ouvert adapté puis utiliser un double complexe de Čech-de Rham.

On suppose que $\forall i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $S_i \cup S_{i+1}$ sépare la variété en deux composantes connexes $M^+_{i,i+1}$ et $M^-_{i,i+1}$ (l'orientation $+, -$ est possible car S_i et S_{i+1} ont deux faces), de façon à

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

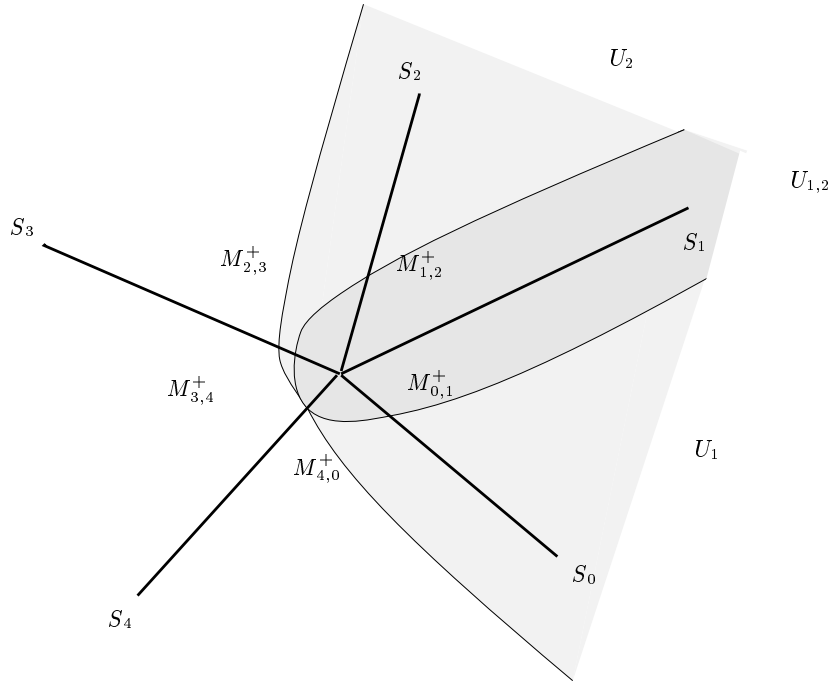


FIGURE 1. Le recouvrement associé aux S_i.

ce que $M^+_{i,i+1} \cap S_j = \emptyset$ pour $j \neq i, i+1$. On a donc $M \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} S_i = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} M^+_{i,i+1}$. Choisissons des voisinages U_{i+1} de $M^+_{i,i+1}$ tels que U_{i+1} se rétracte par déformation sur $\overline{M^+_{i,i+1}}$ et $U_{i,i+1} = U_i \cap U_{i+1}$ se rétracte par déformation sur S_i. Appelons $\mathcal{U}$ le recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ de M (voir la figure 1).

De même qu'en 3.1, les formes φ_i passent au quotient en des éléments $\overline{\varphi}_i \in H^0_\nabla(U_{i,i+1})$.

Pour tout $p \in \{0, \dots, k-1\}$, posons $U_{i_0,\dots,i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. Soient $\mathcal{F}^0_M$ et $\mathcal{F}^1_M$ les faisceaux respectivement associés aux fonctions C^∞ et aux 2-tenseurs symétriques sur M. Notons $\Gamma(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathcal{F}^q_M)$, $q \in \{0,1\}$, les sections de ces faisceaux sur $U_{i_0,\dots,i_p}$. Un élément de $\Gamma(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathcal{F}^q_M)$ sera noté $\phi_{i_0,\dots,i_p}$ avec la convention $\phi_{\dots,\alpha,\dots,\beta,\dots} = -\phi_{\dots,\beta,\dots,\alpha,\dots}$.

Pour $p \geq 0$, soit $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q_\nabla)$ le groupe des cochaines de Čech correspondant :

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q_\nabla) = \prod_{0\leq i_0<\cdots<i_p\leq k-1} \Gamma(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathcal{F}^q_M).$$

Soient $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^q_\nabla) = \{\phi \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q_\nabla) \,\mathrm{tq}\, d^\nabla\phi = 0\}$, i l'inclusion $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^0_\nabla)$, r les restrictions $C^\infty(M) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}^0_\nabla)$ et $\Gamma(S^2M) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}^1_\nabla)$, et δ l'opérateur différence $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q_\nabla) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^q_\nabla)$ donné par

$$(\delta\phi)_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_i},\dots,\alpha_{p+1}}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

Le double complexe de Čech-de Rham augmenté s'écrit alors :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(S^2M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^1_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^1_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}^1_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \uparrow{\scriptstyle d^\nabla} & & \\
0 & \longrightarrow & C^\infty(M) & \xrightarrow{r} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \\
 & & & & C^0(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla) & \xrightarrow{\delta} & \cdots .
\end{array}$$

Les carrés du diagramme sont commutatifs et les lignes

$$0 \longrightarrow \Gamma(S^2M) \xrightarrow{r} C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^1_\nabla) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^1_\nabla) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}^1_\nabla) \xrightarrow{\delta} \cdots$$
$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{r} C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

sont exactes.

En particulier, si l'on note $Z^1_\nabla(M)$ l'ensemble $\{h \in \Gamma(S^2M) \text{ tq } d^\nabla h = 0\}$ et $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla)$ l'ensemble $\{\phi \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla) \text{ tq } \delta\phi = 0\}$, on a une application $F : Z^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla) \to Z^1_\nabla(M)$. Soit en effet $(\chi_i)_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\mathcal{U}$. L'opérateur K de $C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla)$ dans $C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^0_\nabla)$ défini par

$$(K\phi)_\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \chi_i \phi_{i,\alpha}$$

est un opérateur d'homotopie, c'est-à-dire que l'on a $K\delta + \delta K = \mathrm{Id}$. L'application F est alors donnée par $rF(\phi) = -d^\nabla K\phi$. F passe au quotient en une application du premier espace de cohomologie de Čech $H^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla)$ dans le premier espace de cohomologie $H^1_\nabla(M)$. En effet, si $\phi \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla)$ est tel que $\phi = \delta\psi$ avec $\psi \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla)$, alors on a $F(\phi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}(d^\nabla\chi_i)\psi_i$, i.e. $F(\phi) = 0$ dans $H^1_\nabla(M)$.

PROPOSITION 3.8. *$F : H^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla) \to H^1_\nabla(M)$ est injective.*

Preuve. Soit $\phi \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{Z}^0_\nabla)$ tel que $F(\phi) = 0$ dans $H^1_\nabla(M)$: il existe $f \in C^\infty(M)$ telle que $-d^\nabla K\phi = rd^\nabla f$, i.e. $d^\nabla(rf + K\phi) = 0$. Autrement dit, $\forall i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $(rf + K\phi)_i$ se relève en une fonction sur $\tilde{U}_i = p^{-1}(U_i)$, invariante par $\pi_1(U_i, m)$, et qui de plus est la restriction à $\tilde{U}_i$ d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

LEMME 3.9. *$\forall i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $\pi_1(U_i, m)$ n'a pas d'invariant non nul dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$.*

Preuve du lemme. U_i se rétracte par déformation sur $\overline{M^+_{i-1,1}}$ et donc $\pi_1(U_i, m) = \pi_1(\overline{M^+_{i-1,1}}, m)$. Il y a deux cas :

(a) $S_{i-1} \cup S_i$ est totalement géodésique (l'angle entre S_{i-1} et S_i est π). Alors $\overline{M^+_{i-1,1}}$ est une variété hyperbolique compacte de dimension n à bord totalement géodésique. Toujours d'après le Lemme 3.5, $\pi_1(\overline{M^+_{i-1,1}}, m)$ n'a pas d'invariant non nul dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$.

(b) $S_{i-1} \cup S_i$ n'est pas totalement géodésique. Alors un élément α de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ invariant par $\pi_1(\overline{M^+_{i-1,1}}, m)$ doit être invariant par $\pi_1(S_{i-1}, m)$ et par $\pi_1(S_i, m)$. Mais, d'après le

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

Lemme 3.7, $\pi_1(S_{i-1}, m)$ et $\pi_1(S_i, m)$ admettent chacun seulement une droite invariante dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ et ces deux droites sont disjointes puisque l'angle entre S_{i-1} et S_i est différent de π. □

Le Lemme 3.9 est prouvé et implique que $rf = -K\phi$. On a alors $\phi = \delta K\phi = -\delta rf = 0$: F est injective. □

Par conséquent, $\dim H^1_\nabla(M) \geq \dim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla)$: pour obtenir des déformations infinitésimales de la structure conforme plate de M, il suffit de trouver des éléments non nuls de $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla)$, c'est-à-dire des fonctions sur les intersections de deux ouverts du recouvrement, qui sont de d^∇ nul et qui se recollent entre elles. Nous appellerons l'image de F dans $H^1_\nabla(M)$ l'espace des déformations infinitésimales par pliage le long des S_i.

D'après le Lemme 3.7, à multiplication par une constante près, les seuls éléments non nuls de $H^0_\nabla(U_{i,i+1})$ sont les $\overline{\varphi}_i$ qui proviennent des formes linéaires $\varphi_i = q(v_i, .)$. Munis de ces renseignements, nous pouvons montrer que :

PROPOSITION 3.10. $\dim Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla) = k - 2$.

Preuve. Nous cherchons des éléments $\phi = (\phi_{ij})_{0\leq i<j\leq k-1} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^0_\nabla)$ tels que $\delta\phi = d^\nabla\phi = 0$. Il faut calculer le rang du système

$$(\delta\phi)_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad 0 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq k-1.$$

Nous ne raisonnons qu'avec des fonctions f définies sur des ouverts de M et telles que $d^\nabla f = 0$: leurs tirées-en-arrière sont des restrictions de formes linéaires et en posant $V = (\mathbb{R}^{n+1})^*$, nous pouvons considérer les opérateurs différence $\delta^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla)$ comme des applications linéaires $\delta^p : V^{C^{p+1}_k} \to V^{C^{p+2}_k}$. On dira que le rang de δ^p est r si $\operatorname{Im}\delta^p \simeq V^r$. Le rang du système qui nous intéresse est le rang de $\delta = \delta^1$.

$(\delta^p\phi)_{0,\alpha_0,\ldots,\alpha_p} = \phi_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p} + \sum_{i=0}^p \phi_{0,\alpha_0,\ldots,\widehat{\alpha_i},\ldots,\alpha_p}$ et par conséquent, les équations $(\delta^p\phi)_{0,\alpha_0,\ldots,\alpha_p} = 0$ pour $1 \leq \alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_p \leq k-1$ sont indépendantes. Nous obtenons

$$\operatorname{rg}\delta^p \geq \operatorname{card}\{(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^{p+1} \text{ tq } 1 \leq \alpha_0 < \cdots < \alpha_p \leq k-1\} = C^{p+1}_{k-1}.$$

Ainsi, $\operatorname{rg}\delta^1 \geq C^2_{k-1}$. Mais $\delta^2\delta^1 = 0$ et donc $\operatorname{rg}\delta^1 \leq \dim\ker\delta^2$. Or on vient de voir que $\operatorname{rg}\delta^2 \geq C^3_{k-1}$. Comme $\dim\ker\delta^2 + \operatorname{rg}\delta^2 = C^3_k$, $\dim\ker\delta^2 \leq C^3_k - C^3_{k-1} = C^2_{k-1}$ et $\operatorname{rg}\delta^1 = C^2_{k-1} = (C^2_k - k) + 1$.

Résoudre $\delta\phi = 0$ revient donc à résoudre le système

$$(\delta\phi)_{0\alpha\beta} = 0, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq k-1.$$

Les $(C^2_k - k)$ premières équations permettent d'exprimer les ϕ_{ij}, $j \neq i+1$, en fonction des $\phi_{i,i+1}$. Reste la dernière équation :

$$0 = (\delta\phi)_{0,k-2,k-1} = \phi_{0,k-2} + \phi_{k-2,k-1} + \phi_{k-1,0}.$$

Remarquons que $\forall i \geq 1$, $(\delta\phi)_{0,i,i+1} = 0 \Rightarrow \phi_{0,i+1} = \phi_{0,i} + \phi_{i,i+1}$. La dernière équation peut donc s'écrire $\sum_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \phi_{i,i+1} = 0$. Il faut imposer $\phi_{i,i+1} = \lambda_i\overline{\varphi}_i$ pour

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

que ϕ appartienne à $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla)$. Notre équation devient

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \lambda_i \overline{\varphi}_i = 0, \tag{1}$$

et $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla)$ s'identifie à l'espace des $\Lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ solutions de 1. Si on note $\tilde{T}$ le relevé de T passant par $\tilde{m}$, les v_i appartiennent à $N_{\tilde{m}}\tilde{T}$, l'espace normal à $\tilde{T}$ en $\tilde{m}$, qui est de dimension 2 dans $T_{\tilde{m}}\mathbb{H}^n$. Soit alors (e_1, e_2) une base de $N_{\tilde{m}}\tilde{T}$. En posant $\alpha_j = q(e_j, .)$, $j = 1, 2$, on a $\varphi_i \in \mathrm{Vect}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\forall i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Comme les v_i ne sont pas tous colinéaires, le sous-espace de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$ engendré par les φ_i est de dimension 2 et $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^0_\nabla)$ est de dimension $k-2$. □

THÉORÈME 3.11. *Supposons que M contienne k demi-hypersurfaces totalement géodésiques satisfaisant aux hypothèses faites dans cette section. Alors l'espace des déformations infinitésimales essentielles de la structure conforme plate de (M, g) est de dimension au moins $k-2$ et par conséquent $\mathrm{h}''_{\mathrm{Liouv}}(g)$ est strictement positive dans la direction d'un sous-espace de $\Gamma(S^2M)$ de dimension au moins $k-2$.*

Remarque. Nous ne nous sommes intéressés qu'aux déformations infinitésimales de la structure conforme plate de (M, g). Une importante question est de savoir si ces déformations infinitésimales sont effectivement tangentes à des chemins de métriques localement conformément plates. Pour les déformations associées à des hypersurfaces disjointes, on sait que c'est le cas (cf. par exemple [**7, 11**]). L'étude de l'intégrabilité des déformations infinitésimales par pliages le long d'hypersurfaces qui s'intersectent sera l'objet d'un prochain article.

Enfin, il faut remarquer (voir [**9, 15**]) qu'il peut exister des déformations infinitésimales de structures conformes plates en l'absence d'hypersurface totalement géodésique dans M.

4. *Quelques exemples*

Les premiers exemples de variétés hyperboliques compactes de dimension quelconque $n \geq 3$ contenant des hypersurfaces totalement géodésiques plongées à deux faces ont été obtenus par Millson [**13**]. Ce sont des quotients de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ par des sous-groupes arithmétiques de $SO_0(n, 1)$. En suivant [**13**], nous décrivons brièvement leur construction.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier sans facteur carré, Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $Q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \sqrt{p}x_{n+1}^2$ et $\langle\,,\,\rangle$ le produit scalaire associé à Q. Si A est un anneau, on note G_A le groupe des matrices à coefficients dans A qui sont des isométries de Q. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$: d'après [**3**], $G_{\mathcal{O}}$ est un sous-groupe discret cocompact de $G_{\mathbb{R}}$. On identifie $G_{\mathbb{R}}$ à $O(n, 1)$. Soit $\Gamma_{\mathcal{O}}$ l'intersection de $G_{\mathcal{O}}$ avec $SO_0(n, 1)$. $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } Q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = -\sqrt{p} \text{ et } x_{n+1} > 0\}$.

Soit e_1 le premier vecteur de base de $\mathbb{R}^{n+1}$ et s la symétrie par rapport à $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. s est un élément de $\Gamma_{\mathcal{O}}$. Appelons $\tilde{S}$ l'hypersurface totalement géodésique $\{x \in \mathbb{H}^n \text{ tq } s(x) = x\}$ de $\mathbb{H}^n$. $\Gamma_{\mathcal{O}}$ a de la torsion et donc $\mathbb{H}^n/\Gamma_{\mathcal{O}}$ est seulement un orbifold. De même, $\tilde{S}/\Gamma_{\mathcal{O}}$ n'est pas en général lisse. Cependant, il existe un sous-groupe Γ de $\Gamma_{\mathcal{O}}$, distingué, d'indice fini, sans torsion (et donc agissant librement sur $\mathbb{H}^n$), qui respecte l'orientation

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

de $\tilde{S}$. $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ est alors une variété hyperbolique compacte et $S = \tilde{S}/\Gamma$ est une hypersurface orientable de M. Il reste à montrer que S ne s'auto-intersecte pas, c'est-à-dire qu'il faut voir que si γ est un élément de Γ n'appartenant pas au stabilisateur $\mathrm{Stab}_\Gamma(\tilde{S})$ de $\tilde{S}$, alors $\gamma\tilde{S} \cap \tilde{S} = \emptyset$. Supposons qu'il existe $x, y \in \tilde{S}$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma x = y$. Alors $s\gamma sx = s\gamma x = sy = y = \gamma x$. Mais Γ est distingué dans $\Gamma_{\mathcal{O}}$ et $s \in \Gamma_{\mathcal{O}} : s\gamma s \in \Gamma$. Donc $\gamma^{-1}s\gamma s \in \Gamma$ et $\gamma^{-1}s\gamma sx = x$. Γ agit librement et donc γ et s commutent : $\gamma \in \mathrm{Stab}_\Gamma(\tilde{S})$.

La variété M ainsi construite contient donc une hypersurface S totalement géodésique plongée à deux faces. De plus (voir [**13**]), quel que soit m, il existe un revêtement fini de M qui contient m hypersurfaces totalement géodésiques plongées à deux faces disjointes.

Pour finir, voici quelques exemples de variétés hyperboliques compactes de dimension 3 auxquelles s'appliquent les résultats de 3.2. Notre exposé suit [**10**].

Soit N une variété compacte orientable de dimension 3, Haken, atoroïdale, acylindrique et dont le bord S est une surface connexe incompressible de genre au moins 2. Les nombreuses hypothèses sur N sont en fait souvent satisfaites. En effet, si N' est une variété compacte orientable de dimension 3 et de bord S, alors, par chirurgie de Dehn sur un nœud de N' (cf. [**14**]), on peut éliminer de N' les anneaux et les disques essentiels, les tores incompressibles et les sphères qui ne bordent pas de boules. On obtient une variété N du type voulu.

D'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston, N admet une métrique hyperbolique pour laquelle S est totalement géodésique. Soit $\hat{N}$ le double de N. La métrique hyperbolique de N s'étend par symétrie à $\hat{N}$ qui est donc hyperbolique, compacte, orientable, et qui contient une hypersurface S totalement géodésique plongée à deux faces. Soit maintenant γ une géodésique fermée simple de S qui sépare S en deux composantes connexes S^+ et S^-. Découpons $\hat{N}$ le long de S^+. Il est alors possible de recoller cycliquement k copies de la variété ainsi découpée pour obtenir une variété M qui est un revêtement de $\hat{N}$ ramifié au dessus de γ. Le tiré-en-arrière de la métrique hyperbolique sur $\hat{N}$ est une métrique CAT(-1) singulière. Alors, toujours d'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston, M peut être munie d'une métrique hyperbolique pour laquelle les copies de S^+ et S^- sont des demi-hypersurfaces totalement géodésiques. Ces copies sont plongées, orientables et s'intersectent suivant leur bord commun γ. La réunion de ces $2k$ demi-hypersurfaces sépare M en $2k$ composantes connexes et par conséquent on peut appliquer le Théorème 3.11 : l'espace des déformations infinitésimales de la structure conforme plate de M est de dimension au moins $2k - 2$.

Remerciements. Je remercie vivement Gérard Besson et Jacques Lafontaine pour les nombreuses discussions que nous avons eues au sujet de ce travail et pour l'intérêt qu'ils y ont porté.

References

[1] A. L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer, Berlin, 1987.

[2] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.* **5**(5) (1995), 731–799.

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press

[3] A. Borel. Compact Clifford–Klein forms on symmetric spaces. *Topology*. **2** (1963), 111–122.
[4] L. Flaminio. Local entropy rigidity for hyperbolic manifolds. *Commun. Anal. Geom.* **3**(4) (1995), 555–596.
[5] M. Gromov. Filling Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 1–47.
[6] V. Guillemin et D. Kazhdan. Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds. *Topology*. **19** (1979), 301–312.
[7] D. Johnson et J. J. Millson. Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds. *Discrete Groups in Geometry and Analysis (Progress in Mathematics, 67)*. Birkhaüser, Boston, MA, 1987, 48–106.
[8] A. Katok. Entropy and closed geodesics. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **2** (1982), 339–367.
[9] M. Kapovich. Deformation of representations of discrete subgroups of $SO(3,1)$. *Math. Annal.* **299** (1994), 341–354.
[10] M. Kapovich et J. J. Millson. Bending deformations of representations of fundamental groups of complexes of groups. *Manuscript*.
[11] C. Kourouniotis. Deformations of hyperbolic structures. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **98** (1985), 247–261.
[12] L. Lafontaine. Modules de structures conformes plates et cohomologie de groupes discrets. *C. R. Acad. Sci., Paris* I **297**(13) (1983), 655–658.
[13] J. J. Millson. On the first Betti number of a constant negatively curved manifold. *Ann. Math.* **104** (1976), 235–247.
[14] R. Myers. Simple knots in compact orientable 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **273** (1983), 75–92.
[15] K. Scannell. Infinitesimal deformations of some $SO(3,1)$ lattices. *Pacific J. Math.* **194**(2) (2000), 455–464.

https://doi.org/10.1017/S0143385700000961 Published online by Cambridge University Press