Arabic Sciences and Philosophy, vol. 20 (2010) pp. 53–91
doi:10.1017/S0957423909990087 © 2010 Cambridge University Press

DE L'USAGE DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES À LA NOTION D'INVARIANT: LA CONTRIBUTION D'AL-SIJZĪ

PASCAL CROZET
Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales, CNRS – Université Paris-Diderot – UMR 7219, 5 rue Thomas Mann, Bâtiment Condorcet, Case 7093, 75205 Paris Cedex 13
Email: crozet@paris7.jussieu.fr

Abstract. Between 9th and 11th centuries, the geometrical transformations gave to the mathematicians a method more and more fertile, leading them to modify their modes of apprehension of the geometrical figures. This article aims to highlight al-Sijzī's contribution to this change by setting two tasks: first, to precisely understand what al-Sijzī means by transformation (he is one of the first to recognize explicitly a method in their use); and secondly, to give an account of his research on geometrical invariants, obtained by a variation of some elements of a figure. The use of transformations and the search for invariants seem to be the two faces of the same tendency, that to break with an Euclidean manner to consider the figures in a way isolated and static for better exploiting the common properties which can link them. The article is completed by the edition and the translation of a small treatise devoted to invariants.

Résumé. En offrant une méthode de plus en plus féconde, les transformations géométriques conduisent les mathématiciens, entre les IX^e^ et XI^e^ siècles, à modifier leurs modes d'appréhension des figures géométriques. Le présent article voudrait mettre en évidence la contribution d'al-Sijzī à cette mutation en se fixant deux tâches: en premier lieu, comprendre précisément ce qu'al-Sijzī entend par transformation (il est l'un des premiers à y reconnaître explicitement une méthode); et en second lieu, rendre compte de ses recherches sur les invariants géométriques, obtenus en faisant varier certains éléments d'une figure. L'usage des transformations et la recherche d'invariants apparaissent comme les deux volets d'une même tendance, celle de rompre avec une manière euclidienne de considérer les figures de façon isolée et statique pour mieux exploiter les propriétés communes qui peuvent les unir. L'article s'achève par l'édition et la traduction d'un petit traité consacré à la mise en évidence d'invariants.

L'utilisation de plus en plus fréquente des transformations – homothéties, affinités orthogonales ou similitudes – constitue sans aucun doute l'un des faits les plus marquants de l'histoire de la géométrie entre les IX^e^ et XI^e^ siècles. Parce qu'une telle utilisation s'est étendue à des chapitres de plus en plus nombreux, parce qu'elle

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

incitait à s'intéresser aux relations entre les figures plus qu'à les considérer isolément, parce qu'elle interrogeait dès lors la légitimité du recours au mouvement et, par là, faisait surgir la question des fondements, elle a pu conduire en effet à infléchir la nature même de l'objet de la discipline. Roshdi Rashed a brossé ailleurs les grandes lignes de cette évolution qui, partant de l'œuvre des Banū Mūsā en passant par celles de Thābit ibn Qurra, de son petit-fils Ibrāhīm ibn Sinān et de bien d'autres, aboutit notamment à la remise en ordre d'Ibn al-Haytham dans ses traités sur les *Connus* et sur le *Lieu*.[1]

De cette histoire, le moment qui correspond à la contribution d'al-Sijzī, à la fin du x^e^ siècle, est l'un des plus importants. On ne trouve certes rien dans cette œuvre qui invite à repenser les fondements de la géométrie: contrairement à son successeur Ibn al-Haytham, al-Sijzī ne cherche pas, du moins explicitement, à dépasser le cadre légué par Euclide. Pourtant, deux points particulièrement remarquables suffisent à distinguer les écrits d'al-Sijzī de ceux de ses prédécesseurs: en premier lieu, le fait qu'on y trouve le premier texte connu où non seulement les transformations sont désignées par un terme générique, mais encore où l'on reconnaît explicitement dans leur usage une méthode (*ṭarīq*); et en second lieu, la recherche auquel il se livre explicitement pour dégager des invariants géométriques en faisant varier certains éléments d'une figure. C'est à expliciter le premier point et à mettre en évidence le second que nous voudrions nous consacrer ici.

I. LES TRANSFORMATIONS COMME MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

C'est d'une façon pour le moins succincte qu'al-Sijzī introduit le mot transformation (*naql*).[2] Dans son traité intitulé *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*,[3] où il entreprend

[1] Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. IV: *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques* (Londres, 2002), pp. 1–11. L'ouvrage comprend en outre l'édition critique, la traduction et un commentaire détaillé des traités d'Ibn al-Haytham relatifs aux transformations et aux méthodes géométriques.

[2] Il faut noter qu'al-Sijzī n'est pas le premier à utiliser ce terme dans un contexte géométrique: un siècle avant lui, Thābit ibn Qurra utilisait le mot *naql* pour désigner d'abord un déplacement pour superposer deux figures, puis pour signifier le déplacement d'une grandeur par mouvement continu (voir Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, IV, 696, n. 14). Comme nous allons le voir, le sens en est ici infléchi puisqu'il désigne aussi des transformations plus générales comme des similitudes.

[3] Traité édité, traduit et commenté par Roshdi Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, IV, 690–735 et 766–825. Nous nous référerons à cette édition dans ce qui suit. Ce texte important avait déjà fait l'objet de deux publications: une édition provisoire par Aḥmad Sa'īdān (*Rasā'il Ibn Sinān* [Koweit, 1983], pp. 339–72) et une reprise de cette même édition agrémentée de traductions et de commentaires par Jan Hogendijk [*Al-Sijzī's Treatise on Geometrical Problem Solving*, translated and annotated by Jan P. Hogendijk, with the Arabic text and a Persian translation by Mohammad Bagheri (Téhéran, 1996)].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

d'une façon générale de présenter l'ensemble des méthodes dont dispose le géomètre, il écrit en effet simplement:

> Peut-être apparaîtra-t-il au chercheur une méthode grâce à laquelle il lui sera facile de déterminer de nombreuses propositions difficiles, qui soit la transformation (*naql*) que nous allons expliquer et dont nous donnerons des exemples.[4]

Que recouvre alors une telle méthode et, au-delà, quel sens donner au mot transformation dès lors que l'on entend rendre compte par ce biais de la pratique mathématique de l'époque? Al-Sijzī ne donnant en réalité aucune explication générale, nous sommes donc conduit à revenir de façon détaillée tant sur les exemples qu'il fournit lui-même dans ce traité que sur d'autres résolutions situées ailleurs dans ses écrits.

1. *Premier exemple*

Notre premier exemple est précisément celui sur lequel s'appuie le mathématicien pour illustrer sa méthode.[5] Il est ainsi introduit:

> Comment trouver deux droites proportionnelles à deux droites données dont l'une est tangente à un cercle donné et l'autre rencontre le cercle, et telle que si on la mène dans le cercle, elle passe par son centre? Supposons la figure construite selon la voie de l'analyse afin de chercher ses lemmes; exemple: supposons le rapport, le rapport de A à B et le cercle, le cercle CD, et les deux droites GE et GC dans le rapport de A à B – ce sont celles que nous cherchons; comme si la figure était construite et trouvée et comme si nous avions sa construction d'après ce que nous avons exposé, à savoir que si on mène GC dans le cercle jusqu'à D, CD sera un diamètre de celui-ci.

Les seules données du problème sont donc le cercle et le rapport de A à B. Al-Sijzī remarque qu'on ne connaît ni l'angle en G ni l'arc EC. Si l'on nomme H le centre du cercle, on connaît par contre l'angle GEH, égal à un droit. Pour déterminer l'angle en G, il suffit donc de connaître la forme du triangle rectangle GEH. Le problème pourrait donc être posé de façon légèrement différente: EH étant connue, comment trouver le triangle rectangle GEH, sachant que le rapport de GE, l'un des côtés de l'angle droit, à l'hypoténuse diminuée de EH, l'autre côté de l'angle droit, soit égal à un rapport donné. Toutefois, puisque l'on cherche à déterminer en premier lieu la forme du triangle GEH, l'usage de la transformation permet de se ramener à un problème plus simple. En effet, ne chercher que la forme du triangle permet de s'abstraire des dimensions de la figure d'origine en considérant une figure semblable; dès lors, on va pouvoir changer les données de départ: si, plutôt que se donner le côté à soustraire de l'hypoténuse, on se donne l'autre côté de l'angle droit, le problème est effectivement plus aisé à résoudre. C'est bien ce que propose al-Sijzī,

[4] Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, IV, 770.
[5] *Ibid.*, pp. 774–82.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

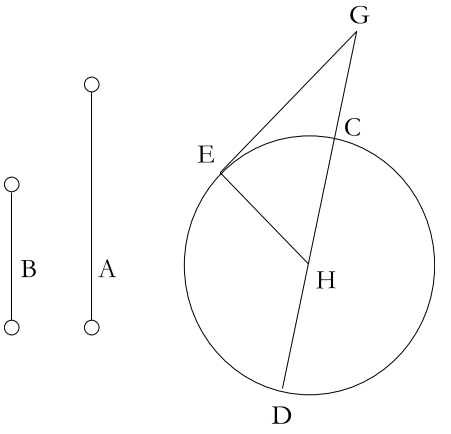


Fig. 1.

en signalant qu'il va procéder à la construction de la figure "par la transformation".[6]

On se donne donc un segment *IK* arbitraire et on cherche le triangle *IMK*, rectangle en *K*, tel que si *N* est le point de l'hypoténuse vérifiant *MN* = *KM*, alors le rapport de *IK* à *IN* est égal au rapport connu de *A* à *B*.

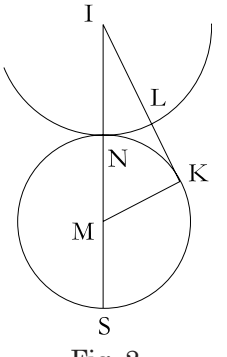


Fig. 2.

Pour résoudre ce nouveau problème, le mathématicien conduit une analyse classique: supposant la figure construite, il trace le cercle de centre *M*. La puissance du point *I* par rapport à ce cercle est alors connue puisque *IK* est connue. Si l'on appelle *S* l'intersection du prolongement de *IM* et du cercle, on aura donc $IN \cdot IS$ connu. Mais puisque le rapport de *IK* à *IN* est connu, *IN* est connue et *IS* est

[6] *Ibid.*, p. 776.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

connue. Par conséquent, *NS* et *MK* sont connues, et donc le triangle *IMK* est connu. Al-Sijzī peut alors conclure:

> Nous avons construit cette figure comme nous le voulions. Nous la transformons (*nanquluhu*) ensuite dans le cercle donné par la similitude et le rapport, et nous le démontrons. Ce qu'il fallait démontrer.

Cet exemple appelle d'emblée plusieurs remarques. En premier lieu, il faut noter que les mots *transformation* et *transformer* sont utilisés ici dans un contexte particulier qui est celui de l'analyse. Tel qu'il est présenté dans ce traité, le recours à la transformation constitue donc une méthode qui s'inscrit au sein d'une méthode de résolution plus vaste et plus générale, la méthode analytique, qu'elle vient enrichir de façon substantielle. Comme le note Roshdi Rashed, "la transformation ponctuelle a une double fonction: mathématique (transformation d'une figure) et logique (réduction à un problème plus facile)".[7] Ainsi qu'il est apparu, la fonction logique repose sur une inversion des données de l'analyse: des grandeurs connues du premier problème sont inconnues dans le second et d'autres qui étaient inconnues y deviennent connues. Or cette inversion n'est permise que par la prise en considération explicite d'une propriété commune à deux figures – ici la forme – autrement dit en faisant abstraction de la position et de la dimension de la première figure. Ces deux fonctions de la transformation sont donc indissociables, et le mathématicien en a bien perçu tous les enjeux.

En second lieu, il faut remarquer que le mot *transformation* ne désigne pas ici une transformation particulière, même si en l'espèce il ne peut s'agir que d'une transformation qui conserve la forme, à savoir une similitude directe. Lorsque al-Sijzī utilise plus haut le mot *similitude*, il veut simplement signifier le fait que les triangles *IMK* et *GEH* sont semblables et que l'on peut dès lors construire la figure demandée. La position et la grandeur de *IM* étant arbitraires, on ne peut définir ici pour cette similitude aucun centre et aucun angle de rotation, ce qui n'est du reste nullement nécessaire pour mener à bien l'analyse. Le mot *transformation* renvoie donc au lien existant entre deux figures, plus qu'au processus géométrique précis par lequel on va pouvoir passer de l'une à l'autre. Ce qui ne veut pas dire qu'on ne puisse trouver ailleurs la description d'un tel processus.

Aussi, avant d'aller plus loin, donnons encore quelques exemples.

2. *Deuxième exemple*

À la différence de l'exemple précédent, notre deuxième exemple prend place dans le cadre d'une synthèse et met en œuvre une isométrie et non plus une simple similitude; il permet néanmoins de confirmer nos premières conclusions. En outre, il permet également de dater plus

[7] *Ibid.*, p. 699.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

précisément l'usage du mot *transformation* par le mathématicien: ce deuxième exemple est en effet issu de son *Anthologie de problème*, un texte composé vers 970 qui est cité dans le traité que nous venons d'évoquer et se trouve donc antérieur à lui;[8] or on trouve dans cette *Anthologie*, en plusieurs endroits, une utilisation du verbe *naqala* semblable à celle dont que nous venons de décrire. C'est le cas en particulier de la proposition 119 de ce traité, où al-Sijzī résout un problème que lui a soumis l'un de ses correspondants, Abū al-Jūd.

Soit donc deux demi-droites *Bx* et *By*, se rencontrant en *B* selon un angle donné. On considère sur la bissectrice de l'angle *B* un point *D* donné, et l'on veut construire une droite passant par *D* et coupant *Bx* et *By* en *A* et *C* de sorte que *AC* soit égal à une grandeur *EG* donnée. L'auteur impose en outre une condition dont il est aisé de se rendre compte du caractère nécessaire: *EG* doit être plus grand que la distance entre les deux points d'intersection de la perpendiculaire à *BD* passant par *D* avec les deux demi-droites *Ax* et *By*.[9]

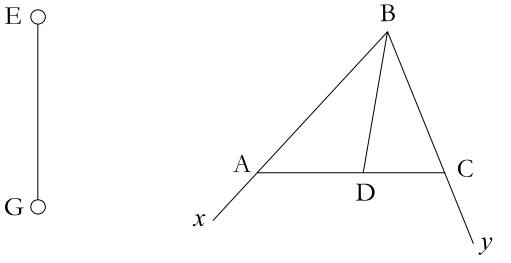


Fig. 3.

Pour résoudre ce problème, al-Sijzī se place délibérément sur le segment *EG*. Il y construit un cercle passant par *E* et *G* tel que l'un des deux arcs *EG* soit capable d'un angle égal à l'angle donné en *B*, puis il partage l'autre arc en deux moitiés selon le point *H* et joint *HG*. Il

[8] *Livre de Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Jalīl sur une anthologie des problèmes qui ont été soulevés entre lui et les géomètres de Shīrāz et du Khurāsān, et ses commentaires*, MS Dublin, Chester Beatty 3652/7, fol. 35^{r}–52^{v}, édition, traduction et commentaires à paraître dans Roshdi Rashed & Pascal Crozet, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. II. Ce traité est cité dans *Pour aplanir les voies* sous son nom abrégé de *Commentaires géométriques*. Il est également cité dans une lettre du mathématicien à son père, datée du 12 février 972 (voir Roshdi Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, vol. I: *Géométrie des coniques et théorie des nombres au* x^{e} *siècle*, Les Cahiers du MIDEO 3 [Louvain / Paris, 2004], p. 208).

[9] Nous évoquerons plus loin le caractère suffisant de cette condition (voir note 11). Notons que ce problème est très vraisemblablement issu du livre I du traité des *Inclinaisons* d'Apollonius, aujourd'hui perdu: en premier lieu parce qu'il correspond bien à l'énoncé général fourni par Pappus pour rendre compte de ce traité; en second lieu parce qu'al-Sijzī lui-même fait suivre sa propre résolution d'une résolution toute différente qu'il attribue à Apollonius; enfin parce que Pappus donne, à propos du 9^{e} problème de ce livre, le même diorisme que nous venons de citer (Pappus, *La collection mathématique*, Œuvre traduite pour la première fois en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, 2 vol. (Paris / Bruges, 1933; nouveau tirage, Paris, 1982), vol. II, pp. 608–10).

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

mène ensuite un cercle de diamètre égal à *BD*, trace un segment *IK* de longueur *HG* qui lui est tangent en *I*, et mène depuis *K* la droite passant par le centre du cercle et le coupant en *D*' et *B*'.[10] Il détermine enfin un point *M* sur le segment *GE* tel que *HM* égale *KD*',[11] et prolonge *HM* jusqu'à ce qu'il coupe le cercle en *L*.

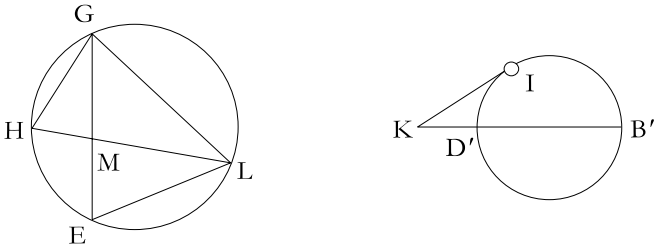
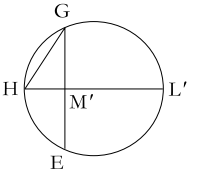


Fig. 4.

Il démontre alors que *LM* est égal à *BD*. En effet, les triangles *HGL* et *HMG* étant semblables, le rapport de *LH* à *HG* est égal au rapport de *HG* à *HM* et donc $HG^2 = HM \cdot HL$. Or $HG^2 = KD' \cdot KB' = HM \cdot KB'$. Donc $HL = KB'$, ce qui assure le résultat, à savoir que $ML = BD$. Puis il conclut:

[10] Al-Sijzī nomme ces deux points *D* et *B*. Nous ne faisons cette modification que pour plus de clarté.

[11] Pour déterminer le point *M*, on peut tracer un cercle de centre *H* et de rayon *KD*'. Comme le remarque al-Sijzī, *KD*' est nécessairement plus petit que *KI* et donc que *HG*; si donc le cercle de centre *H* coupe la droite *GE*, ce ne pourra être qu'entre les points *G* et *E*. Par contre, le mathématicien n'assure pas que ce cercle coupe bien la droite *GE*. Cette intersection existe bien néanmoins si l'on satisfait au diorisme du problème, qui fournit dès lors une condition suffisante. Considérons en effet la médiatrice *HM*'*L*' du segment *EG*.



Il est clair que la condition stipulée par al-Sijzī conduit à $M'L' > BD$. Or on a à la fois

$$HG^2 = HM' \cdot HL' \text{ et } HG^2 = KD' \cdot KB'.$$

Donc

$$HM'^2 + HM' \cdot M'L' = KD'^2 + KD' \cdot D'B' = KD'^2 + KD' \cdot BD < KD'^2 + KD' \, M'L'.$$

Par conséquent, $(HM' - KD')(HM' + KD' + M'L') < 0$ et donc $HM' < KD'$, ce qui assure l'existence d'une intersection. Notons que deux points sont solutions, ce qui donnera deux solutions au problème de départ, symétriques par rapport à la bissectrice *BD*.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Si nous *transportons* (*naqalnā*)[12] la figure du triangle vers les droites *AB* et *BC*, en menant *DA* égale à *MG* et en le faisant parvenir de l'autre côté jusqu'en *C*, alors le triangle *ABD* est semblable au triangle *LMG* et, de même, le triangle *CBD* est semblable au triangle *ELM*. Or la droite *LM* est égale à la droite *BD*, donc la droite *AC* est égale à la droite *EG*; ce qu'il fallait démontrer.

Pour mieux comprendre encore les ressorts d'une telle démonstration, tentons de reconstituer l'analyse qui a pu y conduire. Supposons donc le triangle *ABC* construit, menons-en le cercle circonscrit, appelons *H'* l'intersection de ce cercle avec la droite *BD* et joignons *AH'*.

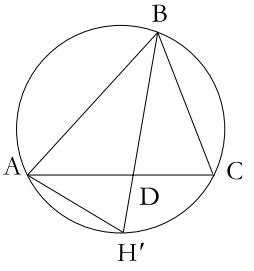


Fig. 6.

H' est alors le milieu de l'arc *AC* et, pour les mêmes raisons que celles expliquées plus haut, on a: $AH'^2 = H'D \cdot H'B$. Des quatre points intervenant dans cette égalité, *B* et *D* sont connus, et *A* et *H'* sont inconnus. Or cette égalité serait plus simple à traiter si l'on avait l'inverse, c'est-à-dire si, toutes choses restant égales par ailleurs (l'angle en *B* et la distance *BD* notamment), on avait *A* et *H'* connus et *B* et *D* inconnus: en traçant un cercle de diamètre connu *BD* et en en considérant une tangente de grandeur *AH'*, on pourrait en effet aisément déterminer *H'D* et *H'B*.

Tout conduit donc à chercher à construire une autre figure, qui sera au bout du compte identique à la première mais en étant définie autrement; c'est bien ce que réalise al-Sijzī dans sa synthèse, et l'on retrouve bien la même fonction logique que dans le premier exemple, reposant de la même façon sur une inversion des données. Le passage d'une figure à l'autre peut être réalisé par une isométrie directe qui, pas plus que précédemment, n'est ici explicitée.[13]

[12] Nous traduisons ici par *transporter* plutôt que par *transformer* en raison de la spécification du lieu d'arrivée et des usages de la langue. Mais il s'agit bien du même verbe arabe et du même sens que plus haut. D'autre part, ce même verbe recouvre bien dans ce traité un sens plus étendu que celui d'un simple déplacement, puisqu'il s'applique à une similitude dans la proposition 135.

[13] Étant donné que les deux solutions du problème sont symétriques l'une de l'autre, ce pourrait être du reste une isométrie quelconque, mais cela ne correspond pas à ce qu'écrit al-Sijzī.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

3. *Troisième exemple*

Notre dernier exemple est constitué de la proposition 143 de l'*Anthologie de problèmes*. Il diffère des précédents sur deux points: en premier lieu parce que le mathématicien n'y a pas recours au verbe *naqala*, et ensuite parce qu'il y fait usage d'une transformation que l'on peut cette fois préciser, puisqu'il s'agit d'une homothétie dont le centre et le rapport sont déterminés.

On se donne un triangle *ABC*, et on veut y inscrire le carré *GHIJ* tel que l'un de ses côtés soit sur l'un des côtés du triangle et les deux sommets opposés sur les deux autres côtés.

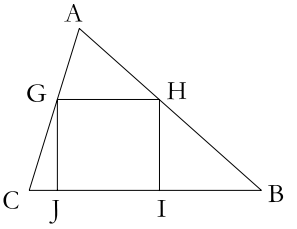


Fig. 7.

Remarquons d'emblée que le problème pourrait être traité exactement de la même façon que dans les deux exemples précédents. On pourrait en effet résoudre le problème obtenu en inversant les données de départ, à savoir en se donnant un carré totalement arbitraire *G'H'I'J'* et en cherchant un triangle circonscrit semblable au triangle donné *ABC*; la solution en est immédiate puisque les angles en *H'* et en *G'* sont connus, et il suffit alors d'utiliser une similitude pour revenir dans la configuration d'origine.

Quoiqu'il nous semble douteux qu'al-Sijzī n'ait pas envisagé une solution aussi simple alors qu'il use de cette méthode dans le même traité et qu'il en souligne ailleurs tout l'intérêt pour le géomètre, la synthèse qu'il propose est, du moins sur un plan formel, légèrement différente. Le fond en est cependant fort voisin. Le mathématicien considère en effet un point *D* arbitraire sur le segment *AB*, il abaisse en *E* la perpendiculaire à *BC* passant par *D*, et construit *DF* perpendiculairement à *DE* en posant *DF* = *DE*. Il mène ensuite *BF*, qu'il prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre *AC* en *G*, achève la construction du rectangle *GHIJ* et démontre, au moyen d'égalité de rapports, que ce rectangle est bien un carré.

La construction est donc obtenue en considérant les éléments d'un carré judicieusement choisi et en en transportant les propriétés par une homothétie de centre *B*. Que le mathématicien n'utilise pas ici le

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

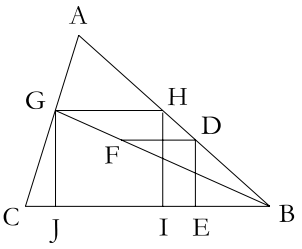


Fig. 8.

mot *transformation* tient essentiellement à ce que cette transformation est contenue dans la figure qu'il construit. En utilisant un tel carré plutôt qu'un carré totalement arbitraire, il exploite cependant les mêmes potentialités logiques que précédemment et sa solution y gagne de surcroît en élégance.

4. *Conclusion*

Que sont alors les transformations pour al-Sijzī? Il ne s'agit sans doute pas – ou du moins pas encore – d'un objet mathématique en tant que tel, dans le sens où il pourrait être étudié pour lui-même. Le mot renvoie simplement, nous semble-t-il, au lien qui existe entre deux figures, sans que soient jamais exploitées les propriétés qui relèvent du processus mathématique de passage de l'une à l'autre. Même dans notre troisième exemple, où l'on peut clairement identifier l'homothétie qui est en jeu, la démonstration repose sur des égalités de rapports et non sur les propriétés de la transformation, qui pourraient assurer en l'espèce que la transformée d'un carré est un carré. On comprend alors pourquoi, dans les deux premiers exemples, la transformation n'est pas même explicitée: de telles propriétés ne sont pas disponibles ni même pensées. Roshdi Rashed a sans aucun doute raison lorsqu'il voit dans le traité d'Ibn al-Haytham *Sur les propriétés du cercle* "la première étude connue de certaines propriétés" de l'homothétie, comme: la figure homothétique d'un arc est un arc, celle d'un rayon un rayon, celle d'un angle de deux droites l'angle des deux droites homologues, les tangentes à deux arcs homothétiques aux points homologues sont parallèles, etc.[14] Chez al-Sijzī en effet, rien de tel: les transformations y demeurent cantonnées à l'usage qui en est fait; elles renvoient essentiellement à une méthode.

Il n'en reste pas moins que reconnaître et nommer une telle méthode, de même qu'en dégager toutes les potentialités logiques, constitue un acte essentiel. Si l'utilisation de cette méthode n'assure pas encore véritablement aux transformations d'existence en tant que telles, elle ne peut en effet qu'attirer bien plus qu'auparavant l'attention sur les propriétés communes entre les figures. Dès lors, il

[14] Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, IV, 21.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

n'est guère surprenant de retrouver chez le même auteur non pas une tentative de dégager les propriétés des transformations – ce qui aurait supposé qu'elles fussent saisies en tant qu'objet – mais un mode d'appréhension des figures qui, de façon explicite et délibérée, rompt avec une manière euclidienne de les considérer de façon isolée et statique.

II. VARIATIONS ET INVARIANTS

Comme le remarque fort justement Roshdi Rashed dans son commentaire,[15] l'idée de variation constitue l'un des thèmes récurrents du traité *Pour aplanir les voies*. On trouve en effet dans ce texte aussi bien une étude des variations d'un élément d'une figure, que des variations de méthodes de résolution d'un même problème, des variations des lemmes par lesquels on peut mener une démonstration, etc. Il y a là un procédé heuristique dont le mathématicien souligne tout l'intérêt, en particulier pour "la recherche des propriétés des figures".[16] Prenant un exemple simple, il écrit ainsi:

> Nous supposons un triangle *ABC* et nous cherchons la propriété de ses angles, à savoir: la somme des trois angles est égale à la somme des angles d'un triangle donné, avant de savoir qu'elle est égale à deux angles droits. La méthode pour notre recherche dans cette première visée est de supposer que l'un de ses angles reste dans l'état et de *faire varier* (*nukhālifu*) ses côtés afin que la somme des deux angles qui restent soit plus grande ou plus petite que celle des deux premiers ou leur soit égale.

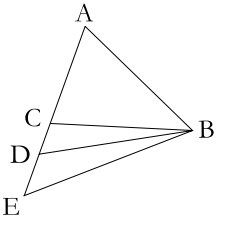


Fig. 9.

Laissant l'angle *A* inchangé, il fait ainsi varier le côté opposé en en maintenant fixée l'extrémité *B*. Lorsque l'un des deux autres angles augmente, alors le troisième diminue. Si nous trouvons que l'augmentation compense la diminution, alors "nous aurons trouvé une propriété pour les triangles, absolument".[17] Il n'y a plus alors, explique al-Sijzī, qu'à soumettre ce résultat à la méthode de l'analyse pour le démontrer ou l'infirmer. Et il ajoute plus loin:

[15] *Ibid.*, p. 697.
[16] *Ibid.*, p. 782.
[17] *Ibid.*, p. 784.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

l'examen de la nature des figures[18] et de leurs propriétés en elles-mêmes ne manque pas de se faire de l'une de ces deux manières: ou bien nous imaginons la nécessité de leurs propriétés en faisant varier leurs espèces, imagination qui puise à la sensation ou à ce qui est commun aux sens; ou bien nous posons ces propriétés et aussi les lemmes qu'elles nécessitent, successivement, par une nécessité géométrique […]. Quant à l'imagination de la nécessité de leurs propriétés par la variation de leurs espèces grâce à ce qui est commun aux sens, c'est comme ce dont nous avons précédemment donné un exemple: pour tout triangle, les sommes des angles sont égales les unes aux autres.[19]

Une telle démarche ne pouvait que conduire à faire surgir la notion d'invariant, à savoir une propriété commune entre figures de même genre comme ici la somme des angles d'un triangle. C'est bien ce à quoi al-Sijzī consacre un petit traité, dont nous donnons plus loin une édition et la traduction française.

Ce texte, vraisemblablement contemporain de l'*Anthologie de problèmes*, porte un titre qui pourrait paraître à première vue énigmatique: *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* (*Fī taḥṣīl al-qawānīn al-handasiyya al-maḥdūda*). Le mot *déterminé* s'applique habituellement en effet à des objets géométriques ou à des problèmes à résoudre, mais il semble peu adapté à désigner une classe de théorèmes ou de "lois géométriques". Pour mieux comprendre l'intention d'al-Sijzī, il nous faut donc décrire plus précisément le texte lui-même.

Celui-ci comprend douze propositions, ou plutôt douze énoncés puisque la plupart ne sont pas accompagnés de démonstration, le mathématicien se contentant en effet le plus souvent de renvoyer à ses traités antérieurs: son *Anthologie de problèmes*, désignée sous son nom abrégé de *Commentaires géométriques*; ses traités, aujourd'hui perdus, sur les *Propriétés de l'ellipse* et sur les *Cercles tangents*; le texte qu'il consacre à des démonstrations alternatives d'un certain nombre de propositions des *Éléments* d'Euclide.[20] Il ne peut donc s'agir de signaler des résultats nouveaux. Si ces propositions sont ainsi rassemblées par al-Sijzī, ce ne peut donc être que parce qu'il tient à en souligner la proximité, comme si elles relevaient d'un même ordre d'intention.

Or l'examen de ces énoncés montre qu'ils mettent tous en œuvre des figures dans lesquelles certains éléments sont fixes, et d'autres variables ou, du moins, quelconques. Dans la première proposition, se superposent ainsi deux résultats issus de l'*Anthologie de problèmes*. Le premier qui, notons-le, fera l'objet de la proposition 22 du livre I des

[18] Le mot *ashkāl*, qui est utilisé ici, peut désigner aussi bien des *propositions* que des *figures*.
[19] *Ibid*., pp. 818–21.
[20] Voir notre article "Al-Sijzī et les *Éléments* d'Euclide: commentaires et autres démonstrations des propositions", dans A. Hasnawi, M. Aouad, A. Elamrani-Jamal (éds), *Perspectives médiévales (arabes, latines, hébraïques) sur la tradition scientifique et philosophique grecque* (Louvain / Paris, 1997), pp. 61–77.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Connus d'Ibn al-Haytham,[21] envisage un demi-cercle de diamètre *AB* et un couple de points de ce même diamètre, symétriques par rapport au centre, et situés soit à l'extérieur du cercle (*H* et *G*), soit à l'intérieur (*K* et *I*); si l'on appelle *C* un point quelconque (ou variable) du demi-cercle, alors $HC^2 + GC^2$ (ou $KC^2 + IC^2$) est égal à une constante indépendante de *C*.

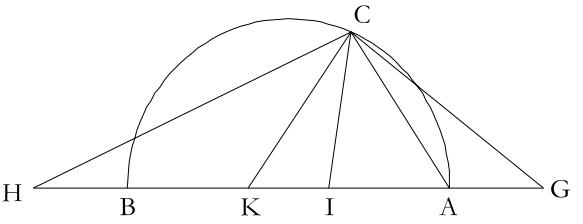


Fig. 10.

Dans le second, qui est une sorte de généralisation du théorème de Pythagore, on considère trois arcs sur le segment *AB*, l'un capable d'un angle droit et les deux autres capables de deux angles supplémentaires, l'un aigu et l'autre obtus. Puis on mène à partir de *B* une droite quelconque coupant les trois arcs successivement en *D*, *C* et *E*. On obtient alors deux quantités invariables, indépendantes de la droite issue de *B:*

$$AD^2 + DB^2 + BD \cdot DE = AB^2 \text{ et } AE^2 + EB^2 - BE \cdot ED = AB^2.$$

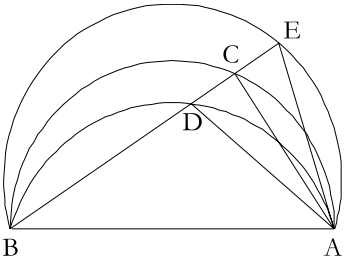


Fig. 11.

La deuxième proposition du traité fait également apparaître des quantités invariables. On considère deux cercles concentriques de diamètres *EG* et *AB*, où $AB > EG$, et l'on mène du point *B* la corde *HB*, coupant le cercle intérieur en deux points dont le plus proche de *H* est nommé *S*. Le produit $BS \cdot SH$ est alors une constante indépendante de la corde menée de *B*.[22]

[21] Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, IV, 530–3.

[22] La proposition fait également apparaître un troisième cercle, intérieur au cercle de diamètre *EG*. Le résultat obtenu étant similaire, nous l'omettons ici par souci de simplification.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

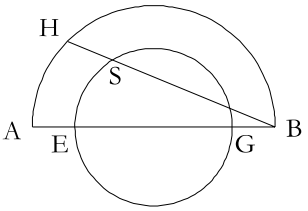


Fig. 12.

Certains résultats faisant apparaître des quantités invariables sont bien connus, comme la propriété bifocale de l'ellipse (proposition 7). D'autres font apparaître des transformations. Ainsi la proposition 5 met en œuvre deux cercles tangents, intérieurement ou extérieurement, et signale l'invariance du rapport de l'homothétie qui fait de l'un le transformé de l'autre. De même, la proposition 12 dégage l'invariance du produit de l'inversion qui échange un cercle et une droite; si une droite DL est perpendiculaire au diamètre AB d'un cercle, toute droite issue de B rencontrant le cercle et la droite DL définit deux segments dont le produit des longueurs est constant: $BI \cdot BG = BM \cdot BL = BC^2$.

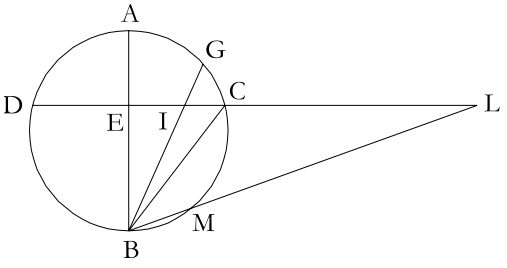


Fig. 13.

Dans certaines propositions toutefois, ce ne sont pas des quantités qui sont invariables, mais des propriétés, comme des proportions. C'est le cas, par exemple, pour la proposition 6, où al-Sijzī donne la propriété pôle/polaire dans le cercle.[23] Si A est un point extérieur à un cercle, on appelle B et C les points du cercle appartenant aux deux tangentes issues de A, on mène la polaire BC puis une droite quelconque issue de A et coupant le cercle en G et D et la polaire en E; on a alors, quelle que soit cette droite: $AD/AG = DE/EG$.

[23] Cette propriété fait l'objet de deux démonstrations dans l'*Anthologie de problèmes* (propositions 7 à 9), l'une attribuée à al-Qūhī et une autre par al-Sijzī lui-même. Ce résultat était déjà énoncé à la proposition III.38 des *Coniques* d'Apollonius, mais les démonstrations de l'*Anthologie* sont, à notre connaissance, les premières à être réalisées dans le contexte d'une géométrie à la règle et au compas.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

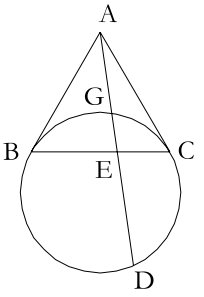


Fig. 14.

Le dessein d'al-Sijzī est donc parfaitement clair: faire apparaître des quantités ou des propriétés invariables alors même que les éléments qui les définissent sont soumis à la variation. Dans ce sens, ces quantités ou ces propriétés sont parfaitement déterminées malgré cette variabilité. Tel est selon nous le sens qu'il faut donner au titre même du traité: par "lois géométriques déterminées", d'une manière peut-être maladroite, le mathématicien nous semble ne pas vouloir désigner autre chose que des propriétés invariantes.

En cela, ce texte annonce le traité des *Connus* d'Ibn al-Haytham, où celui-ci explore lui aussi ce qui est invariant – et donc connu[24] – dans une figure dont certains éléments sont mobiles. Les projets sont certes différents: outre que celui d'Ibn al-Haytham est sans aucun doute plus ambitieux et plus maîtrisé – le mathématicien redéfinit une notion de connu restée figée depuis les *Données* d'Euclide, il met en œuvre des transformations de façon beaucoup plus nette que son prédécesseur immédiat – il faut en effet remarquer qu'al-Sijzī n'interprète pas ses résultats en termes de connus et que, du reste, une propriété comme la propriété pôle/polaire peut difficilement l'être dans le sens que donne Ibn al-Haytham au mot *connu*. Mais on ne peut que relever une communauté de préoccupations qui est bien le signe d'une inflexion de la rationalité géométrique.

C'est bien cette inflexion qui nous semble se trouver au cœur de l'activité géométrique d'al-Sijzī, tant dans la reconnaissance de l'usage des transformations que dans la recherche de propriétés invariantes. Car les deux sujets entretiennent bien évidemment des rapports étroits: ne cherche-t-on pas des invariants parce que l'on *transforme* une figure? et d'autre part, ne voit-on pas apparaître de façon toute naturelle, parmi les "lois géométriques déterminées", les propriétés de transformations comme l'homothétie ou l'inversion? Ces rapports ne sont certes pas toujours immédiats: ainsi, il serait difficile de décrire, au moyen d'une transformation simple, les variations de la

[24] Pour Ibn al-Haytham, "le connu est la notion qui n'admet pas le changement" (Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, IV, 446).

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

figure à l'œuvre dans la proposition 2 du traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées*; en outre, le fait que les transformations n'apparaissent pas encore en tant qu'objets d'étude ne pouvait que gêner un rapprochement plus explicite. Il reste que c'est bien l'usage des transformations, parce qu'il ouvrait sur une appréhension désormais non statique des figures et donc sur l'idée de variation, qui a permis, en quelque sorte, que puisse être conçu le projet dont rend compte le traité que nous éditons plus loin.

III. CONCLUSION

Ibn al-Haytham ne cite pas al-Sijzī, de sorte qu'il serait hasardeux d'affirmer en toute certitude qu'il ait eu connaissance des travaux de son prédécesseur. Le fait qu'on ne retrouve dans les *Connus* que certaines propositions du traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* tendrait même à suggérer le contraire, tant il est vrai que des résultats comme la propriété de l'inversion, pour ne prendre qu'un exemple, avaient de quoi séduire Ibn al-Haytham tout en s'insérant parfaitement dans le cadre de son étude. Toutefois, la comparaison entre les deux textes permet de mesurer la distance parcourue et d'apprécier toute la nouveauté de la contribution de ce dernier: début de l'étude des transformations ponctuelles pour elles-mêmes, fondements théoriques renouvelés pour prendre acte des nouveaux modes d'appréhension des figures. En cette fin de x^{e} siècle, l'heure n'est sans doute pas à de tels développements programmatiques, même si peut se manifester, comme chez al-Sijzī, un souci de tenter de penser autrement l'activité du géomètre, de chercher des raisons plus profondes derrière la saisie première des faits géométriques et de dépasser une manière strictement euclidienne d'envisager figures et propositions. Il s'agit alors plutôt de multiplier les exemples et de déployer une activité en quelque sorte exploratoire qui, nous semble-t-il, trouve tout naturellement son expression dans les anthologies de problèmes qui fleurissent à l'époque.

La contribution d'al-Sijzī est ainsi le témoin d'un moment particulièrement riche de l'histoire des mathématiques, de ces moments de bascule où l'on commence à mettre des mots – transformation, lois géométriques déterminées – sur des pratiques antérieures pour faire surgir de façon explicite de nouvelles réalités ou de nouveaux objets, permettant ainsi aux successeurs de mieux les penser et de s'en saisir de façon plus ample.

IV. TEXTE ET TRADUCTION

Le traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* nous est parvenu sous la forme de deux manuscrits:

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

– Paris, Bibliothèque nationale 2458/3, fol. 3^{r}-5^{r}, copié en 539 de l'Hégire (1144–1145), noté "B";[25]
– Istanbul, Reçit 1191, fol. 70^{r}-72^{v}, copié avant le milieu du XVIII^{e} siècle, noté "R". Ce manuscrit fait partie d'un recueil copié à partir d'un volume consacré aux œuvres géométriques d'al-Sijzī et conservé à la bibliothèque Chester Beatty à Dublin sous la côte 3652. Ce dernier volume, dont la copie a été achevée le vendredi matin 7 ramaḍān de l'année 611, soit le 9 janvier 1215, comprend des textes copiés à partir de l'original; certains feuillets en ont été arrachés puis perdus après la copie de R et contenaient, comme le montre l'index en début de volume, le texte qui nous intéresse ici.

Ces deux manuscrits offrent quelques différences: B ne contient pas la douzième et dernière proposition, consacrée à la propriété de l'inversion et qui est issue de l'*Anthologie de problèmes*; dans la proposition 10, B renvoie aux *Données* d'Euclide alors que R renvoie à "notre livre sur les *Commentaires géométriques*", autrement dit encore l'*Anthologie de problèmes*. Ces différences ne sont pas assez nombreuses pour conclure de façon certaine, mais elles suggèrent que ces deux manuscrits puissent être issus de deux versions successives du même texte. En effet, les renvois des propositions 10 et 12 dans le manuscrit R ciblent des propositions qui se trouvent plus en aval dans le texte de l'*Anthologie* que les renvois précédents; d'autre part, quelques propositions encore plus éloignées de l'*Anthologie* pourraient trouver leur place dans le traité qui nous occupe. Al-Sijzī pourrait ainsi avoir voulu amender et étendre son texte selon le dernier état d'avancement de la composition de son *Anthologie*, ce qui ferait du traité *Sur l'obtention de lois géométriques déterminées* un contemporain de cette dernière.

[25] Une erreur de reliure fait que les pages doivent être lues dans l'ordre suivant: 4^{v}, 3^{r}, 3^{v}, 5^{r}, la page 4^{r} étant relative à un autre traité.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

Livre d'Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Abd al-Jalīl sur l'obtention de lois géométriques déterminées

1) La droite *AB* est donnée, nous lui appliquons un demi-cercle et deux arcs capables de deux angles, aigu et obtus, soit *ACB*, *ADB* et *AEB*, et posons les deux arcs capables de deux angles dont la somme égale deux droits. Menons le diamètre des deux côtés de sorte que *AG* soit égale à *BH* et posons également *AI* égale à *BK*. Menons des points *G*, *A*, *I*, *K*, *B* et *H* des droites vers la circonférence du demi-cercle *ACB*, soit *GC*, *HC*, *AC*, *BC*, *IC* et *KC*. Prolongeons *BC* jusqu'en *E*, et joignons *AE* et *AD*; je dis que la somme des carrés de *AC* et de *BC* égale le carré de *AB*, que la somme des carrés de *IC* et de *CK* égale la somme des carrés des deux droites menées des deux points *I* et *K* vers la circonférence du demi-cercle *ACB* et de même que la somme des carrés de *GC* et de *HC* égale la somme des carrés des deux droites menées des deux points *G* et *H* vers la circonférence du demi-cercle *ACB*, que la somme des carrés de *AD* et de *DB* est inférieure au carré de *AB* du

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

بسم الله الرحمن الرحيم

ر-٧٠-و
ب-٤-ظ

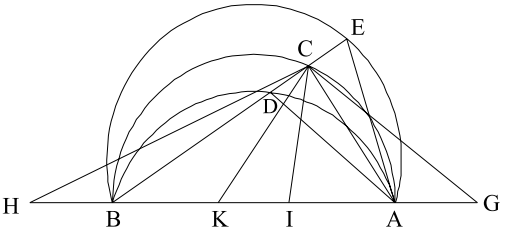
كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل :
في تحصيل القوانين الهندسية المحدودة

آ. خط ا ب معطىً، ونضيف إليه نصف دائرة وقوسين تقبلان زاويتين حادّة ومنفرجة، وهي ا ج ب ا د ب ا ه ب، ونجعل القوسين تقبلان زاويتين يكون مجموعهما يعدل قائمتين. ونخرج القطر في الجهتين على أن يكون ا ز مثل ب ح، ونجعل ا ط أيضاً مساوياً لِ ب ك. ونخرج من نقط ز ا ط ك ب ح خطوطاً إلى محيط نصف دائرة ا ج ب، وهي ز ج ح ج ا ج ب ج ط ج ك ج. ونخرج ب ج إلى ه، ونصل ا ه ا د؛ أقول : إن مجموع مربعي ا ج ب ج يعدل مربع ا ب، وإن مجموع مربعي ط ج ج ك يعدل مجموع مربعي الخطين المخرجين من نقطتي ط ك إلى محيط نصف دائرة ا ج ب، وكذلك مجموع مربعي ز ج ح ج يعدل مجموع مربعي الخطين المخرجين من نقطتي ز ح إلى محيط نصف دائرة ا ج ب، وإن مجموع مربعي ا د ب

1 البسملة : ناقصة [ر] تجد بعدها «رَب يسرّ» [ب] — 2-3 كتاب (...) المحدودة : تحصيل القوانين الهندسية المحدودة لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي رحمه الله [ب] — 4 آ : ناقصة [ر] / معطىً : معطا، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ر] معطاة [ب] / تقبلان : متقابلان [ر] — 5 تقبلان : يقبلان [ر] — 6 يعدل : يعدلان [ر، ب] — 7 مساوياً لِ ب ك : يعدل ب ك [ب] — 9 يعدل : يعدلان [ر، ب] — 10 يعدل : يعدلان [ر، ب] — 10-12 نقطتي ط ك (...) الخطين المخرجين : ناقصة [ر] — 11 يعدل : يعدلان [ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

produit de *BD* par *DE*, et que la somme des carrés de [R-70^{v}] *AE* et *EB* excède le carré de *AB* du produit de *BE* par *ED*.



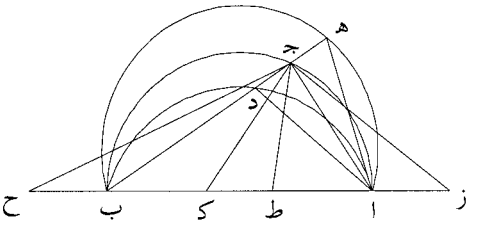
Démonstration. Pour l'égalité du carré de *AB* et de <la somme des> deux carrés de *AC* et de *CB*: puisque l'angle *ACB* est droit, alors <la somme des> deux carrés de *AC* et de *CB* est égale au carré de *AB*. Pour l'égalité <de la somme> des deux carrés de *IC* et de *CK*, de *GC* et de *CH* et <de la somme> des deux carrés de deux droites quelconques menées des deux points *I* et *K* ou *G* et *H* vers la circonférence du demi-cercle *ACB*: nous avons démontré cela dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*.[26] Pour <le fait que> le carré de *AB* excède <la somme des> deux carrés de *AD* et de *DB* du produit de *BD* par *DE:* <cela> a également été démontré dans ce même livre.[27] De même <pour> le défaut du carré de *AB* sur <la somme des> deux carrés de *AE* et de *EB* du produit de *BE* par *EB:* <cela> a également été démontré dans ce livre;[28] ce qu'il fallait démontrer.

2) Dans la construction de trois cercles de même centre, le fait de mener le diamètre, de la position des points sur les extrémités des deux diamètres du cercle intérieur et <du cercle> extérieur, et le fait de mener les droites des points vers les deux circonférences du petit cercle et du moyen et vers les deux circonférences du cercle moyen et du grand, il se produit une proportion très étonnante.

[26] *Anthologie de problèmes*, problème 5 (propositions 11 à 16).
[27] *Ibid*., problème 21 (proposition 32).
[28] *Ibid*.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

ناقص عن مربع ا ب بضرب ب د في د ه، وإن مجموع مربعي / ا ه ه ب زائد على ر-٧٠-ظ
مربع ا ب بضرب ب ه في ه د.



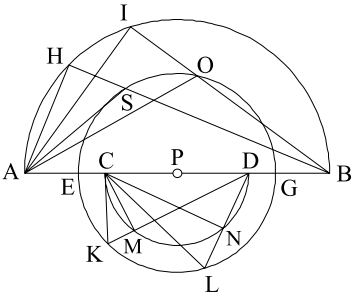
برهان ذلك : أمّا مساواة مربع ا ب مربعي ا ج ج ب، فلأن زاوية ا ج ب قائمة، يكون مربعا ا ج ج ب يعدلان مربع ا ب. وأمّا مساواة مربعي ط ج ج ك وز ج ج ح مربعي أي خطين مخرجين من نقطتي ط ك أو ز ح إلى محيط نصف دائرة ا ج ب، فقد بيّنا ذلك في كتابنا في *التعليقات الهندسية*. وأمّا مربع ا ب زائد على مربعي ا د د ب بضرب ب د في د ه، فقد بين أيضاً في ذلك الكتاب بعينه. وكذلك نقصان مربع ا ب عن مربعي ا ه ه ب بضرب ب ه في ه ب، فبين في ذلك الكتاب أيضاً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ب. في عمل ثلاث دوائر على مركز واحد وإخراج القطر ووقوع النقط على أطراف قطري الدائرة الداخلة والخارجة وإخراج الخطوط من النقط إلى محيطي الدائرة الصغرى والوسطى وإلى محيطي الدائرة الوسطى والعظمى، يحدث مناسبة عجيبة جداً.

3 برهان ذلك : برهانه [ب] — 4 مربعا : مربعي [ر، ب] / يعدلان مربع : مساويان لمربع [ر] — 5 أي : ا د [ر] ا ب [ب] / ط ك : آ ل [ر] — 6 ذلك : ناقصة [ر] / التعليقات : تعليقات [ر، ب] — 7 بيّن : بيّنا [ر، ب] / في (الثانية) : ناقصة [ر] — 9 ما أردنا أن نبيّن : ما أردناه [ر] — 11 محيطي : محيط [ر، ب] — 12 والوسطى : والواسطى [ر] / محيطي : محيط [ب] / يحدث : محدث [ر] / جداً : ناقصة [ر].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Traçons, autour du centre *P*, les cercles *AIB*, *EOG* et *CND*, le diamètre du grand cercle étant *AB*; je dis que les droites menées de *A* et de *B* vers la circonférence du cercle *AIB* sont partagées par le cercle *EOG* selon la proportion inverse, et que les droites menées de *C* et de *D* vers la circonférence du cercle *EOG* sont partagées par le cercle *CND* selon la proportion inverse. Menons *BI*, *BH*, *DL* et *DK*. Il faut que nous démontrions que *BO* par *OI* est égal à *BS* par *SH*, et que *DL* par *LN* est égal à *DK* par *KM*.

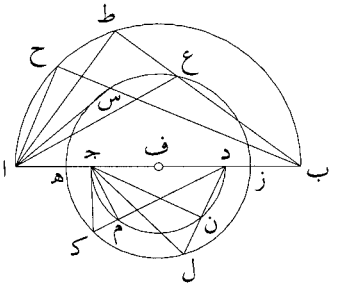


Démonstration. Menons *CN*, *CM*, *AO* et *AS*. Puisque le carré de *CD* est inférieur à <la somme des> deux carrés de *DK* et de *CK* du double de *DK* par *KM*, que le carré de *CD* est également inférieur à <la somme des> deux carrés de *DL* et de *LC* du double de *DL* par *LN*, et que <la somme des> deux carrés de *DK* et de *KC* égale <la somme des> deux carrés de *DL* et de *LC*, alors le double de *LD* par *LN* égale le double de *DK* par *KM*. Donc *DL* par *LN* égale *DK* par *KM*. De même, toutes les droites menées du point *C* vers le cercle *EOG* et que coupe le cercle *CND* sont coupées par lui selon ce rapport. [R-71^{r}]

Également, puisque le carré de *AB* excède <la somme des> deux carrés de *AO* et de *BO* du double de *BO* par *OI*, que le carré de *AB* excède également <la somme des> deux carrés de *BS* et de *AS* du

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

فلندر على مركز ف دوائر ا ط ب هـ ع ز جـ ن د، وقطر الدائرة العظمى ا ب؛ أقول : إن الخطوط المخرجة من آ ب إلى محيط دائرة ا ط ب تقسمها دائرة هـ ع ز على التكافئ، وإن الخطوط المخرجة من جـ د إلى محيط دائرة هـ ع ز تقسمها دائرة جـ ن د على التكافئ. فلنخرج ب ط ب ح د ل د ك. ينبغي أن نبيّن أن ب ع في ع ط مساوٍ لِ ب س في س ح، وأن د ل في ل ن مساوٍ لِ د ك في ك م.



برهان ذلك : أن نخرج جـ ن جـ م ا ع ا س. فلأن مربع جـ د ناقص عن مربعي د ك جـ ك بضعف د ك في ك م، ومربع جـ د ناقص أيضاً عن مربعي د ل ل جـ بضعف د ل في ل ن، ومربعي د ك ك جـ يعدلان مربعي د ل ل جـ، يكون ضعف ل د في ل ن يعدل ضعف د ك في ك م. فـ د ل في ل ن يعدل د ك في ك م. وكذلك جميع الخطوط المخرجة من نقطة جـ إلى دائرة هـ ع ز التي تقطعها دائرة جـ ن د، فلتقطعها على هذه النسبة.

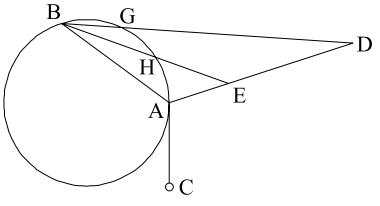
/ وأيضاً، لأن مربع ا ب زائد على مربعي ا ع ب ع بضعف ب ع في ع ط، ومربع ا ب أيضاً زائد على مربعي ب س ا س بضعف ب س في س ح، ر-٧١-و

2 آ ب : ا ب [ر، ب] / تقسمها : نفسها [ر] — 3 جـ د : جـ د [ر] / هـ ع ز : معدل [ر] / تقسمها : يقسمها [ر] — 5 مساوٍ لِ ب س : يعدل ب س [ب] / مساوٍ لِ د ك : يعدل د ك [ب] — 6 برهان ذلك : برهانه [ب] — 7 د ك جـ ك : د ل جـ ل / [ر] د ك (الثانية) : د ل [ر] — 9 د ك : د ل [ر] / وكذلك : ولذلك [ب] — 12 مربعي : مربع [ر] — 13 مربعي : مربع [ر].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

double de *BS* par *SH*, et que <la somme des> deux carrés de *BO* et de *AO* égale <la somme des> deux carrés de *BS* et de *AS*, alors le double de *BO* par *OI* égale le double de *BS* par *SH*, donc *BO* par *OI* égale *BS* par *SH*; ce qu'il fallait démontrer. [B-3^{r}]

3) Si l'on suppose, sur la circonférence d'un cercle quelconque comme le cercle *AB*, deux points comme *A* et *B*, que l'on mène du point *A* vers *B* la ligne droite *AB*, que l'on mène du point *A* la droite *AC* tangente au cercle, et que l'on mène *AD* de sorte que l'angle *BAD* égale l'angle *CAB*, alors toute droite menée du point *B* vers la droite *AD* est partagée par l'arc *AGB* selon la proportion inverse; ainsi de *BD* et de *BE*: *BD* par *BG* égale *BE* par *BH* et égale le carré de *AB*. Cela a été démontré dans nos *Commentaires géométriques*;[29] ce qu'il fallait démontrer.



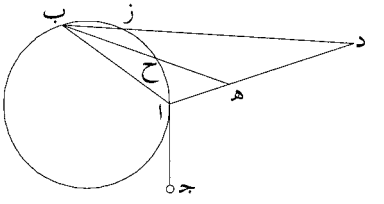
4) Dans la position du point à l'intérieur et à l'extérieur du cercle, le fait de mener deux lignes droites vers la circonférence du cercle et leur intersection ou de leur jonction au point donné, il se produit une propriété <relevant> de la proportion et de la proportion inverse.

[29] *Ibid*., problème 4 (proposition 10). Le résultat signifie que le cercle et la droite *AD* sont des images réciproques par une inversion de centre *B*. La même inversion est mise en évidence dans la proposition 12 de ce traité, la droite *AD* étant alors définie, ce qui est équivalent, comme la perpendiculaire passant par *A* au diamètre du cercle passant par *B*.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

ومربعي ب ع ، ا ع يعدلان مربعي ب س ، ا س، يكون ضعف ب ع في ع ط يعدل ضعف ب س في س ح، ف ب ع في ع ط يعدل ب س في س ح؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

/ جـ. وإن فرض على محيط دائرة ما مثل دائرة ا ب نقطتين مثل آ ب، وأخرج من ب-٣-و
نقطة آ إلى ب خط ا ب المستقيم، وأخرج من نقطة آ خط ا جـ يماسّ الدائرة، وأخرج ا د تكون زاوية ب ا د تعدل زاوية جـ ا ب، فأي خط أخرج من نقطة ب إلى خط ا د تقسمه قوس ا ز ب على التكافئ؛ مثل ب د ب هـ، فيكون ب د في ب ز يعدل ب هـ في ب ح ويعدل مربع ا ب. وقد تبيّن ذلك في *تعليقاتنا الهندسية*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

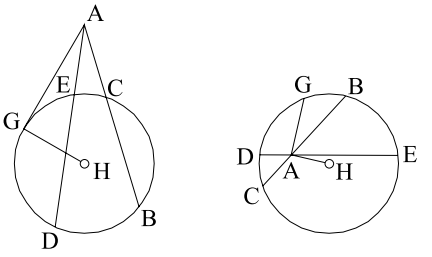


دـ. وفي وقوع النقطة داخل الدائرة وخارجها، وإخراج خطين مستقيمين إلى محيط الدائرة، وتقاطعهما أو اتصالهما على النقطة المعطاة، تحدث خاصة من التناسب والتكافئ.

2-1 ومربعي ب ع ، ا ع (...) ضعف ب س في س ح : ناقصة [ر] — 2 يعدل : مساوٍ لضعف [ر] 6 تكون : يكون [ر] / تعدل : يعدل [ر] — 7 مثل : مثلي [ر] — 8-7 يعدل ب هـ في ب ح ويعدل مربع ا ب : مساو لـ ب هـ في ب ح ولمربع ا ب [ر] — 9-8 وذلك ما أردنا أن نبيّن : ناقصة [ر] — 11 وتقاطعهما : وتقاطعها [ر] / أو اتصالهما : واتصالها [ر] أو اتصالها [ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Supposons le point *A* dans deux <cas de> figure, qu'il soit <dans> l'un des deux à l'extérieur et <dans> l'autre à l'intérieur, que le cercle soit *BC* et le centre *H*, on a mené du point *A* deux droites vers la circonférence du cercle, soit *BCA* et *DEA*; je dis que le rapport de *AB* à *AD* est égal au rapport de *AE* à *AC*.



Démonstration. Puisque *AB* par *AC* est égal à *AD* par *AE*, alors le rapport de *AB* à *AD* est égal au rapport de *AE* à *AC*.

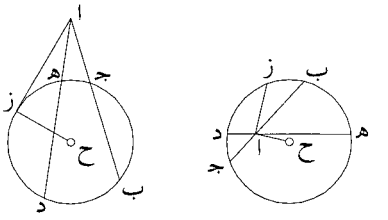
Je dis que si l'on mène, du point *A* vers la circonférence du cercle, une droite qui entoure, avec la droite menée de *G* vers le centre dans le premier <cas de figure>, ou avec la droite menée de *A* vers le centre dans le second, un angle droit, alors le rapport de *AE* à *AG* est égal au rapport de *AG* à *AD*.

Démonstration. Puisque *AE* par *AD* égale le carré de *AG*, alors le rapport de *AE* à *AG* est égal au rapport de *AG* à *AD*; ce qu'il fallait démontrer.

5) Dans la tangence des deux cercles en un point et le fait de mener les lignes droites vers les deux circonférences des deux cercles, il se produit également une proportion.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

فلنفرض في صورتين نقطة آ، إحداهما خارج الدائرة والأخرى داخلها، والدائرة ب ج والمركز ح، وقد خرج من نقطة آ خطان إلى محيط الدائرة، وهما ب ج آ د هـ ا؛ أقول : إن نسبة آ ب إلى آ د كنسبة آ هـ إلى آ ج.



برهان ذلك : لأن آ ب في آ ج مثل آ د في آ هـ، تكون نسبة آ ب إلى آ د كنسبة آ هـ إلى آ ج.

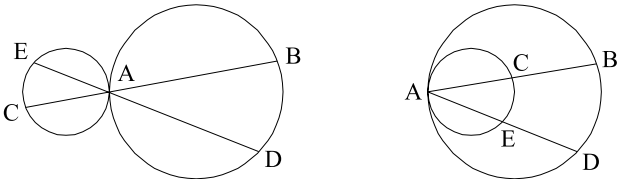
وأقول : إنه إذا أخرج خطٌّ من نقطة آ إلى محيط الدائرة ويحيط مع الخط المخرج من ز إلى المركز في الأولى، أو مع الخط المخرج من آ إلى المركز في الثانية، بزاوية قائمة، فتكون نسبة آ هـ إلى آ ز كنسبة آ ز إلى آ د.

برهان ذلك : لأن آ هـ في آ د يعدل مربع آ ز، فإن نسبة آ هـ إلى آ ز كنسبة آ ز إلى آ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

هـ. وفي تماسّ الدائرتين على نقطة وإخراج الخطوط المستقيمة إلى محيطي الدائرتين، تحدث أيضاً مناسبة.

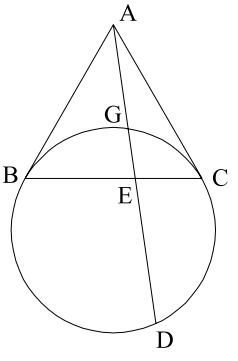
1 إحداهما : إحديهما [ب، ر] / والدائرة : مشطوبة، ثم أثبتها في الهامش [ب] — 2 خطان : خطين [ر، ب] / الدائرة : دائرة ب ج [ر] — 3 إلى آ د : إلى د [ر] مكررة [ب] — 4 آ ج : ج آ [ر] / تكون : يكون [ر] — 6 خطٌّ : خطا [ر] / ويحيط : يحيط [ر] — 7 مع : من [ر، ب] — 8 فتكون : فيكون [ر] — 9 برهان ذلك : برهانه [ب] / يعدل مربع : مساوٍ لمربع [ر] — 10 ما أردنا أن نبيّن : ما أردناه [ر] — 11 محيطي : محيطا [ر] محيط [ب] — 12 تحدث : يحدث [ر].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press



Que les deux cercles tangents soient dans les deux <cas de> figures, qu'ils soient *AB* [R-71^{v}] et *AC* et leur point de tangence *A*. On a mené les deux droites *BAC* et *DAE*, le rapport de *AB* à *AC* alors produit est égal au rapport de *AD* à *AE*; nous avons démontré cela dans la première proposition de notre livre *Sur les cercles*.[30]

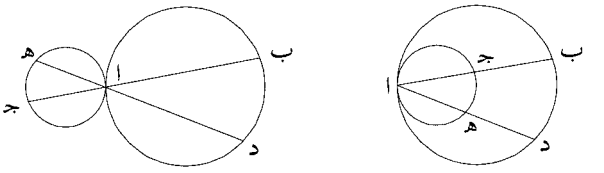
6) Du fait de mener, d'un point donné, deux droites tangentes à un cercle donné, de leur jonction par une ligne droite, et du fait de mener les droites du point donné vers la circonférence du cercle donné, dans son intérieur, il se produit une proportion très étonnante.



Que le point *A* soit donné et que le cercle *BCD* soit donné, on a mené *AB* et *AC* tangentes au cercle en *C* et en *B*, et on a joint *CB* par une ligne droite; je dis que les droites menées du point *A* vers l'arc *CDB*, comme la droite *AD*, sont partagées par l'arc *CGB* et la droite *EB*

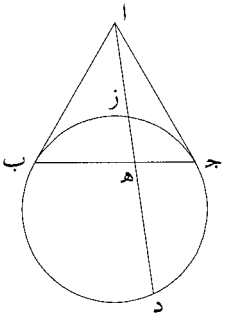
[30] Al-Sijzī a composé un livre, aujourd'hui perdu, sur les cercles tangents.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press



فليكن الدائرتان المتماستان في الصورتين، عليهما ا ب / ا جـ، ونقطة تماسهما آ. وقد أخرج خطا ب ا جـ د ا هـ، فتحدث نسبة ا ب إلى ا جـ كنسبة ا د إلى ا هـ؛ وقد بيّنا ذلك في الشكل الأول من كتابنا *في الدوائر*. ر-٧١-ظ

و. ومن إخراج خطين مماسين لدائرة معطاة من نقطة معطاة واتصالهما بخط مستقيم، وإخراج الخطوط من النقطة المعطاة إلى محيط الدائرة المعطاة في داخلها، تحدث مناسبة عجيبة جداً.



فليكن نقطة آ معطاة ودائرة ب جـ د معطاة، وقد خرج ا ب ا جـ ويماسّا الدائرة على جـ ب، ووصل جـ ب بخط مستقيم؛ أقول : إن الخطوط المخرجة من نقطة آ إلى قوس جـ د ب، مثل خط ا د، تقسمه قوس جـ ز ب وخط هـ ب على نسبة

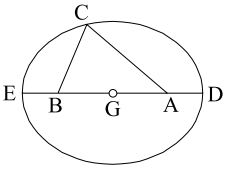
1 الدائرتان المتماستان : الدائرتين المتماستين [ب، ر] / تماسهما : تماسها [ب] — 2 خطا : خطي [ر] / فتحدث : فيحدث [ر] — 4 معطاة : معطا [ر] / من : ومن [ب] — 5 النقطة : النقط [ب] — 6 تحـدث : يحـدث [ر] / جـداً : ناقصـة [ب] — 8 جـ ب : جـ ب [ر، ب] — 9 تقسمه : يقسمه [ر] / جـ ز ب : جـ د ز [ر].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

selon un même rapport, c'est-à-dire que le rapport de *AD* à *AG* est égal au rapport de *DE* à *EG*; nous avons démontré cela dans nos *Commentaires géométriques*.[31]

7) Parmi les conséquences de ce paragraphe,[32] on trouve une propriété sur l'ellipse qu'il convient d'adjoindre aux propriétés du cercle, qui est que toute ellipse, si son grand diamètre est divisé en trois parties de sorte que le produit de <la somme de> deux parties quelconques des trois par l'autre qui est adjacente à l'extrémité égale le carré de la moitié de son petit diamètre, alors <la somme des> droites menées des deux points qui sont le lieu du partage du grand diamètre vers la circonférence de la section et qui se rencontrent sur sa circonférence en un même point, considérée comme une même ligne droite, égale le diamètre de l'ellipse.

Que l'ellipse soit *DCE*, et que son grand diamètre soit *DE*. Posons *DB* [B-3^{v}] par *BE* égal au carré de la moitié du petit diamètre, avec *DA* égal à *BE*. Menons les deux droites *AC* et *BC* vers la circonférence de la section. Alors <la somme des> deux droites *AC* et *BC* égale la droite *DE*. Nous avons démontré cela dans la soixante-douzième proposition de notre livre sur les *Propriétés de l'ellipse*;[33] ce qu'il fallait démontrer.



8) On trouve sur l'ellipse et le cercle une proportion inverse du point de vue de la proportion des diamètres.

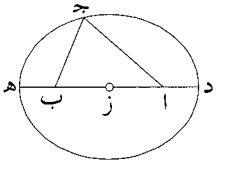
[31] *Anthologie de problèmes*, problème 3, en particulier les propositions 7 à 9.
[32] C'est-à-dire la proposition précédente.
[33] Livre aujourd'hui perdu, où al-Sijzī semble avoir déduit les propriétés de l'ellipse de l'étude des sections du cylindre.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

واحدة، أعني أن تكون نسبة ا د إلى ا ز كنسبة د ه إلى ه ز؛ وقد بيّنا ذلك في *تعليقاتنا الهندسية*.

ز. ومن لوازم هذا الفصل يقع خاصة في القطع الناقص يليق أن نُضيفها إلى خواص الدائرة، وهي أن كل قطع ناقص، إذا قسم قطره الأطول بثلاثة أقسام يكون ضرب أحد كل قسمين من الثلاثة في الآخر الذي يلي الطرف يعدل مربع نصف قطره الأصغر، فإن الخطوط المخرجة من النقطتين اللتين هما موضعا القسمة من القطر الأطول إلى محيط القطع ويجتمعان على محيطه على نقطة واحدة، فيكون مجموعهما، كخط واحد مستقيم، يعدل قطر القطع الناقص.

فليكن القطع الناقص د ج ه، وقطره الأطول د ه. ونجعل د ب / في ب ه ب-٣-ظ مثل مربع نصف القطر الأصغر، و د ا مثل ب ه. ونخرج خطي ا ج ب ج إلى محيط القطع، فيكون خطا ا ج ب ج يعدلان خط د ه؛ وقد بيّنا ذلك في الشكل الثاني والسبعين من كتابنا *في خواص القطع الناقص*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

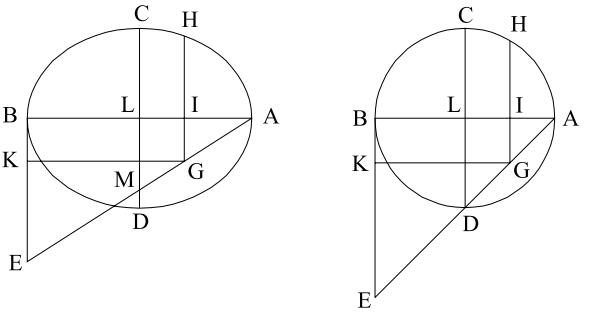


ح. ويقع في القطع الناقص والدائرة تكافئ من جهة تناسب الأقطار.

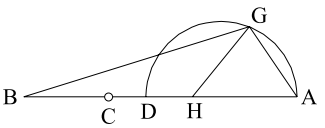
1 تكون : يكون [ر] / د ه : ز ه [ر] — 3 نُضيفها : نضيف [ب، ر] — 4 وهي : وهو [ر، ب] — 6 الأصغر : الأقصر، ثم كتب تحتها «أصغر» [ر] — 8 القطع الناقص : القطع [ر] — 11 خطا : خطي [ر، ب] / خط : لخط [ر] / د ه : ج ه [ب] — 12 ما أردنا أن نبيّن : ما أردناه أن نبيّن [ر] — 13 ويقع : وقد يقع [ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Supposons que *ACB* soit une ellipse ou un cercle, que son grand diamètre soit *AB* et le petit *CD*. Posons le rapport de *AB* à *CD* égal au rapport de *CD* à *BE*. Menons *BE* s'élevant [R-72^{r}] sur la droite *AB* selon des angles droits et joignons *AE*; je dis que la perpendiculaire menée de la circonférence de l'ellipse ou du cercle vers le diamètre de l'ellipse ou du cercle, comme *IH*, prolongée jusqu'à la droite *AE*, comme *IG*, je veux dire que *IH* peut le rectangle *IG* par *IB*, c'est-à-dire *IK* dans le cercle. Quant à l'ellipse, le rapport du carré de *IH* au carré de *CL* est égal au rapport du rectangle *IB* par *IG* au rectangle *LB* par *LM*; nous avons démontré cela dans les *Propriétés de l'ellipse*; ce qu'il fallait démontrer.

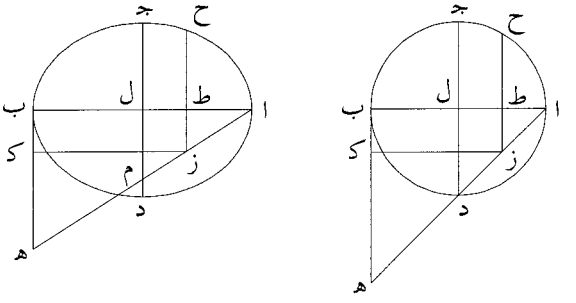


9) Il y a également une circonférence de cercle telle que si l'on mène de deux points donnés deux droites vers elle, alors le rapport de l'une d'elles à l'autre est égal à un même rapport donné.

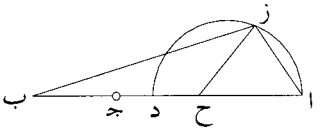


https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

وذلك أنا نفرض ا ج ب قطعاً ناقصاً أو دائرةً، وقطره الأطول ا ب والأصغر ج د. ونجعل نسبة ا ب إلى ج د كنسبة ج د إلى ب ه، ونخرج ب ه يقوم / على خط ر-٧٢-و ا ب على زوايا قائمة، ونصل ا ه؛ أقول : إن العمود المخرج من محيط القطع أو الدائرة إلى قطر القطع أو الدائرة، مثل ط ح، وأخرج إلى خط ا ه، مثل ط ز، أعني ط ح يقوى على سطح ط ز في ط ب، أعني ط ك في الدائرة. وأمّا في القطع الناقص، فتكون نسبة مربع ط ح إلى مربع ج ل كنسبة سطح ط ب في ط ز إلى سطح ل ب في ل م؛ وقد بيّنا ذلك في خواص القطع الناقص؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



ط. وقد يوجد أيضاً محيط دائرة إذا أخرج من نقطتين مفروضتين خطين مستقمين إليه، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة واحدة مفروضة.

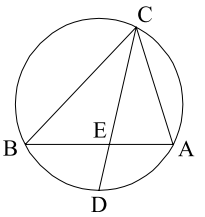


1 قطعاً ناقصاً : قطع ناقص [ر] — 2 نسبة : ناقصة [ب] / خط : ناقصة [ب] — 4-5 أعني ط ح (...) سطح ط ز : ناقصة [ر] — 5 ط ك : ط ل [ر] — 6 فتكون : فيكون [ر] / نسبة : فوق السطر [ب] / ط ح : خط [ر] — 7 خواص : الخواص [ر] / ما أردنا أن نبيّن : ما أردناه أن نبيّن [ر] — 8 مفروضتين : مفترضتين [ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Supposons *H* et *B* et joignons *H* et *B* par la ligne droite *HB*, le rapport de *HD* à *DB* étant donné. Partageons *HB* en deux moitiés en *C*, posons le produit de *HD* par *DB* égal à *AD* par *DC* et traçons sur *AD* le demi-cercle *AGD*, alors les deux droites menées des deux points *H* et *B* vers la circonférence du demi-cercle *AGD* sont selon le rapport de *HD* à *DB*, <cela> a été démontré dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*;[34] ce qu'il fallait démontrer.

10) Il reste également une propriété du fait de mener deux lignes droites de deux points donnés sur la circonférence du cercle se rencontrant également sur la circonférence en un même point.



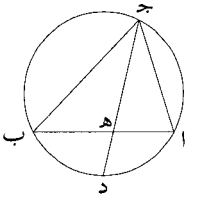
Soit le cercle *ACBD*, et que les deux points donnés sur sa circonférence soient *A* et *B*, partageons l'arc *ADB* en deux moitiés en *D*, joignons *AB* et menons *AC*, *BC* et *DEC*, il s'ensuit que le rapport de *AC* à *CB* est égal au rapport de *AE* à *EB*. Ceci a été démontré dans le sixième <livre> des *Éléments* et dans nos *Démonstrations de l'ouvrage*

[34] *Anthologie de problèmes*, problème 2, proposition 4.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

وذلك أن نفرض ح ب ونصل ح ب بخط ح ب المستقيم، ونسبة ح د إلى د ب معطاة. ونقسم ح ب بنصفين على جـ، ونجعل ضرب ح د في د ب مساوياً لِ ا د في د جـ، ونُدير على ا د نصف دائرة ا ز د، فإن الخطين المخرجين من نقطتي ح ب إلى محيط نصف دائرة ا ز د يكونان على نسبة ح د إلى د ب، وقد تبيّن من كتابنا *في التعليقات الهندسية*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ي. وقد بقي أيضاً خاصة من جهة إخراج خطين مستقيمين من نقطتين مفروضتين على محيط الدائرة واجتماعهما على المحيط أيضاً على نقطة واحدة.



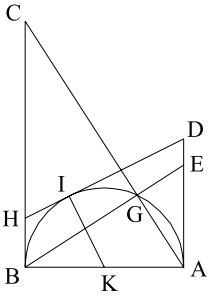
فليكن دائرة ا جـ ب د والنقطتان المفروضتان على محيطها ا ب، ولنقسم قوس ا د ب بنصفين على د، ونصل ا ب، ونخرج ا جـ ب جـ د ه جـ، فيلزم أن تكون نسبة ا جـ إلى جـ ب كنسبة ا ه إلى ه ب. وذلك بيّن في السادسة من *كتاب الأصول*

1 ح ب (الأولى) : حب [ر] / ح ب (الثانية) : حب [ر، ب] — 2-3 مساوياً لِ ا د : يعدل ا د [ب] — 3 دائرة ا ز د : نجد بعدها «ونخرج جـ ه عموداً على ا ب»، وعلى الشكل نقطة ه على استقامة خط ز د [ب]؛ ونقطة ه يستعملها السجزي في البرهان من كتابه في التعليقات الهندسية، ولكنها بدون فائدة هنا في الدعوى / فإن الخطين : فالخطين [ب] — 3-4 ح ب : حب [ب] — 4 محيط : المحيط، و«ال» مشطوب [ر] / يكونان : يكون [ر، ب] — 5 التعليقات : تعليقات [ر، ب] / ما أردنا أن نبيّن : ما أردناه [ر] — 6 مستقيمين : ناقصة [ب] — 7 مفروضتين : مفترضتين [ب] — 8 والنقطتان المفروضتان : النقطتين المفروطتين [ر] النقطتين المفترضتين [ب] — 9 د ه جـ : د جـ ه جـ [ب] / تكون : يكون [ر] — 10 كتاب الأصول : كتاب أقليدس [ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

des Éléments.[35] Il s'ensuit également que le produit de la somme de *AC* et de *CB* par *ED* est égal au produit de <la somme> des deux droites menées des deux points *A* et *B* vers la circonférence du cercle par la droite qui est menée du point *D* vers la droite *AB* et dont le complément prolongé <aboutit> au <point de> rencontre des deux droites menées des deux points *A* et *B* vers la circonférence du cercle. Il s'ensuit également que le rapport de la somme de *BC* et de *CA* à *CD* est égal au rapport <de la somme> des deux droites menées de *A* et *B* vers la circonférence du cercle à la droite menée du lieu de leur rencontre vers le point *D*, nous avons démontré cela dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*;[36] ce qu'il fallait démontrer. [R-72^{v}]

11) Il peut être produit, du fait de mener deux droites tangentes à un cercle donné et parallèles entre elles, du fait de mener deux autres droites des deux points de tangence vers la circonférence du cercle, leur rencontre étant sur la circonférence, et de leur séparation de par ce qu'elles rencontrent les deux droites tangentes, une proportion entre le diamètre et les deux droites qui séparent les deux droites menées des deux droites tangentes. De même, du fait de mener une droite tangente au cercle dont les deux extrémités sont sur les deux droites tangentes [B-5^{r}] parallèles entre elles, il se produit une proportion entre elles deux et entre le demi-diamètre du cercle.

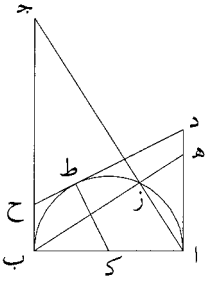


[35] *Éléments*, VI.3.
[36] *Anthologie de problèmes*, problèmes 42 et 43, propositions 63 et 64. Dans le manuscrit *B*, on trouve : "Euclide a démontré cela dans son livre sur les *Données*" (*Données*, proposition 94).

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

وفي *براهيننا لكتاب الأصول*. ويلزم أيضاً أن ضرب ا ج ج ب مجموعين في ه د مثل ضرب الخطين المخرجين من نقطتي ا ب إلى محيط الدائرة في الخط الذي يخرج من نقطة د إلى خط ا ب، الذي يكون تمامه المخرج على استقامته إلى اجتماع الخطين المخرجين من نقطتي ا ب إلى محيط الدائرة. ويلزم أيضاً أن نسبة ب ج ج ا مجموعين إلى ج د كنسبة الخطين المخرجين من ا ب إلى محيط الدائرة إلى الخط المخرج من موضع اجتماعهما إلى نقطة د، وقد بيّنا ذلك في كتابنا *في التعليقات الهندسية*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

/ يا. وقد يحدث من إخراج خطين مماسّين لدائرة معطاة ويكونان متوازيين، وإخراج خطين آخرين من نقطتي التماسّ إلى محيط الدائرة واجتماعهما على المحيط وافتراقهما إلى أن يلقيا الخطين المماسّين، تناسباً بين القطر وبين الخطين اللذين يفصلان الخطين المخرجين من الخطين المماسّين. وكذلك من إخراج خطٍ مماسٍّ للدائرة ويكون طرفاهما على الخطين المماسّين / المتوازيين، يحدث تناسباً بينهما وبين نصف قطر الدائرة. ر-٧٢-ظ ب-٥-و

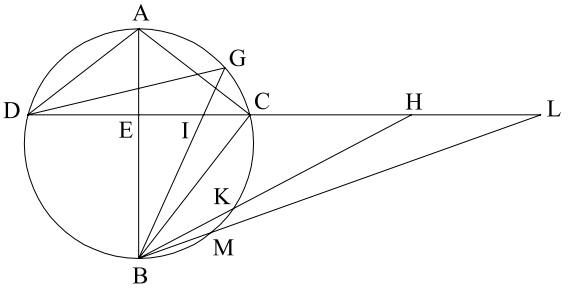


1 وفي براهيننا لكتاب الأصول : ناقصة [ب] / مثل : ناقصة [ر] — 3-2 نقطة د : نقطة ج [ر] نقطتي د، و«د» فوق السطر [ب] — 6 وقد بيّنا ذلك في كتابنا في التعليقات الهندسية : قد بيّن ذلك أقليدس في كتابه في المعطيات [ب] / التعليقات : تعليقات [ر] — 7-6 وذلك ما أردنا أن نبيّن : ناقصة [ر] — 8 متوازيين : موازيين [ر، ب] — 10 يلقيا : يلتقيا [ر] ليقيا [ب] — 11 من الخطين : ناقصة [ر] / مماسٍّ : مماسين [ر] / طرفاهما : طرفيهما [ر، ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

Soit le demi-cercle *AIB*, et que *AD* et *BC* lui soient tangentes, on a mené *AGC* et *BGE*. Alors le rapport de *BC* à *AB* est égal au rapport de *AB* à *AE*. Nous avons démontré cela dans notre livre sur les *Commentaires géométriques*.[37] Également, menons *DIH* tangente au cercle *AIB* au point *I* et menons du centre *K* la droite *KI*. Il se produit de cela que le rapport de *AD* à *IK*, qui est le demi-diamètre du cercle, est égal au rapport de *IK* à *BH*. Nous avons également démontré cela dans ce même livre;[38] ce qu'il fallait démontrer.

12)[39] On peut trouver une propriété en menant, du milieu de l'arc *CBD*, qui est le point *B*, des droites comme les droites *BEA*, *BIG*, *BC*, *BKH* et *BML:* alors *BA* par *BE* est égal à *BG* par *BI*, au carré de *BC*, à *BH* par *BK* et à *BL* par *BM*. On trouve une autre propriété: si nous menons les droites *BG*, *GD*, *CA* et *AD*, alors le rapport de *BA* à *AG* est égal au rapport de la somme de *CA* et de *AD* à la somme de *BG* et de *GD*, nous avons démontré cela dans le livre des *Commentaires géométriques*;[40] ce qu'il fallait démontrer.



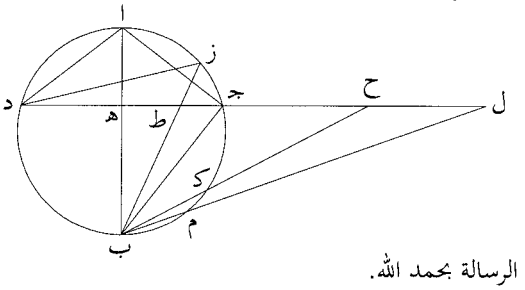
L'épître est achevée, grâce à Dieu.

[37] *Anthologie de problèmes*, problème 1, propositions 1 à 3.
[38] *Ibid.*, problème 6, proposition 17.
[39] Proposition absente du manuscrit *B*.
[40] *Anthologie de problèmes*, problèmes 41 et 42, propositions 62 et 63.

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

فليكن نصف دائرة ا ط ب وا د ب ج يماسّانه، وقد خرج ا ز ج ب ز ه. فإن نسبة ب ج إلى ا ب كنسبة ا ب إلى ا ه. وقد بيّنا ذلك في كتابنا في *التعليقات الهندسية*. وأيضاً نخرج د ط ح يماسّ دائرة ا ط ب على نقطة ط، ونخرج من مركز ك خط ك ط، فيحدث من ذلك أن تكون نسبة ا د إلى ط ك، الذي هو نصف قطر الدائرة، كنسبة ط ك إلى ب ح. وقد بيّنا ذلك أيضاً في ذلك الكتاب بعينه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

يب. وقد يقع خاصة من إخراج خطوط من منتصف قوس ج ب د، الذي هو نقطة ب، مثل خطوط ب ه ا ب ط ز ب ج ب ك ح ب م ل، فيكون ب ا في ب ه مساوياً لِ ب ز في ب ط ولمربع ب ج ولا ب ح في ب ك ولا ب ل في ب م. ويقع خاصة أخرى وهي : إذا أخرجنا خطوط ب ز ز د ج ا ا د، فتكون نسبة ب ا إلى ا ز كنسبة ج ا ا د مجموعين إلى ب ز ز د مجموعين. وقد بيّنا ذلك في كتاب *التعليقات الهندسية*؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



تمت الرسالة بحمد الله.

1 وا د ب ج : ا د بج [ر] — 2 التعليقات : تعليقات [ر، ب] — 3-4 ونخرج من مركز ك خط ك ط : ناقصة [ب] — 4 تكون : يكون [ر] / ط ك : ط ل [ر] — 5 ط ك : ط ل [ر] — 7-12 يب وقد يقع (...) وذلك ما أردنا أن نبيّن : ناقصة [ب] — 8 مثل خطوط : خطوطا [ر] — 9 مساوياً : مساو [ر] / ولمربع : لمربع [ر] / ب ك : ب ل [ر] — 10 ب ز : ج ز [ر] / فتكون : فيكون [ر] — 11 ب ز : ج ز [ر] — 12 التعليقات : تعليقات [ر] — 13 تمت الرسالة بحمد الله : تم بحمد الله ومنة في شوال سنة ثلط هجرية [ب].

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press

https://doi.org/10.1017/S0957423909990087 Published online by Cambridge University Press